CONTINUITA' E DERIVABILITA'

La continuità e la derivabilità di una funzione sono proprietà differenti.

TEOREMA: CONTINUITA' DELLE FUNZIONI DERIVABILI
Se f(x) è una funzione <u>derivabile</u> in un punto x_0, allora f(x) è <u>continua</u> in x_0

Dimostrazione

Ipotesi: $\exists finito \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

Tesi: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Scriviamo: $f(x) = f(x_0) + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$

Segue:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0) =$$
$$\underbrace{f(x_0)}_{\text{(costante)}} + \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{(per ipotesi } f'(x_0))} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0}(x-x_0)}_{(0)} = f(x_0)$$

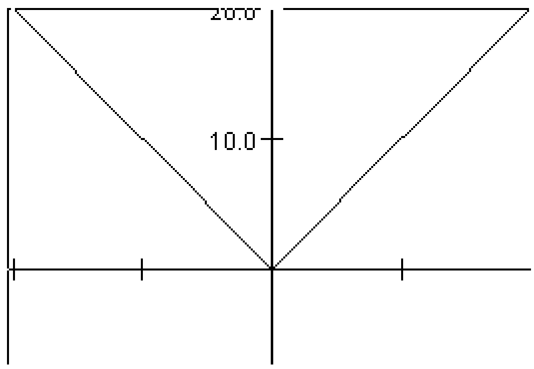
Allora:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ c.v.d.

Osservazione

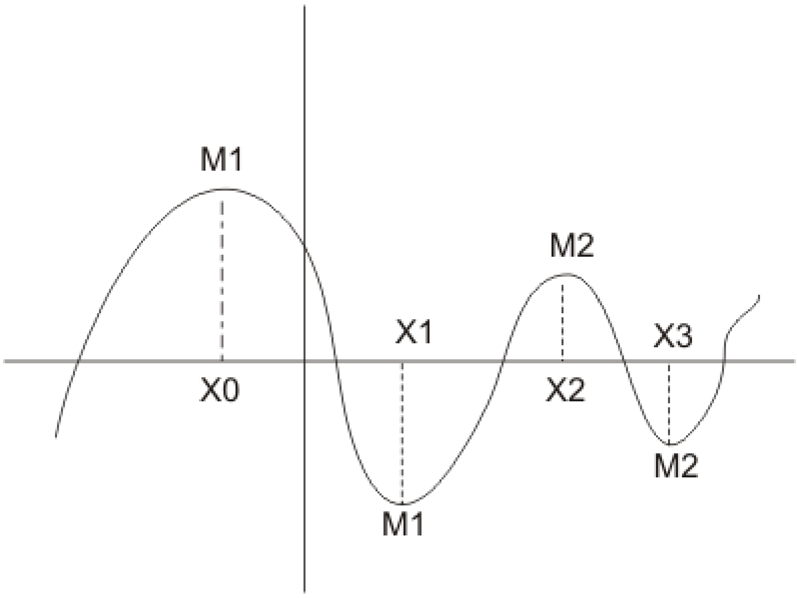
1. f(x) derivabile in x_0 → continua in x_0 (no viceversa!)
2. f(x) non è continua in x_0 → non derivabile

y = |x| continua in R però non è derivabile in x = 0

la tg a x = 0 è differente a seconda che si arrivi da destra o sinistra



ESTREMANTI E PUNTI CRITICI
(ricerca dei massimi e minimi delle funzioni)



<u>Def: punto di massimo</u>
La funzione f(x) ha un massimo relativo (o locale) in x_0 se esiste un $Ix_0 \,/\, f(x) \leq f(x_0)\_\forall x \in Ix_0$
<u>Def: punto di minimo</u>
La funzione f(x) ha un minimo relativo (o locale) in x_0 se esiste un $Ix_0 \,/\, f(x) \geq f(x_0)\_\forall x \in Ix_0$
N.b. se la proprietà valgono su tutto il dominio allora sono massimi (o minimi) assoluti

<u>Def: estremante</u>
I punti del dominio in corrispondenza dei quali la f raggiunge un max o un min si dicono stremanti per f
<u>Def: punto critico</u>
È una soluzione dell'equazione f'(x) = 0
x1, x2, x3 → trovati dalla risoluzione dell'equazione (punti con la tg orizzontale)

TEOREMA
Se f definita in D è derivabile in $x_0 \in D$ e se x_0 è estremante per f allora $f'(x_0) = 0$.
Quindi un estremante è sempre un p.critico.

N.b.: non vale il viceversa

dall'equazione f'(x) = 0 trovi gli estremanti ma anche i flessi.

CRITERIO DELLA DERIVATA PRIMA

1. f'(x) = 0 ottengo punti critici
2. f'(x) > 0 f crescente
   f'(x) < 0 f decrescente

esempio

$$y = \frac{4x^2 + 3x + 1}{x} \qquad D: x \neq 0$$

$$y' = \frac{(8x+3)x - 4x^2 - 3x - 2}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2}$$

$$\frac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad 4x^2 - 1 = 0 \quad x^2 = \frac{1}{4} \quad x = \pm\frac{1}{2}\ p.critici$$

$$\frac{4x^2 - 1}{x^2} > 0 \quad \begin{matrix} 4x^2 - 1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{matrix}$$

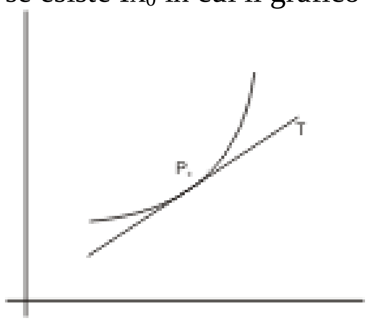
$$x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2}\ f.crescente$$

FUNZIONI CONCAVE E CONVESSE

<u>Funzione convessa in x_0:</u>

concavità verso l'alto

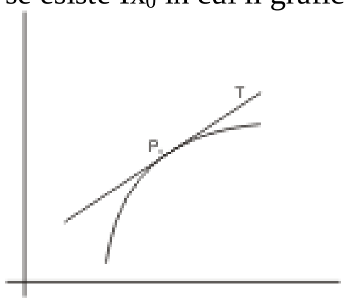
se esiste Ix_0 in cui il grafico non è mai al di sotto della retta tg in P_0



<u>Funzione concava in x_0:</u>

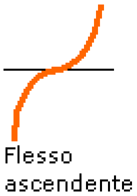
concavità verso il basso

se esiste Ix_0 in cui il grafico non è mai al di sopra della retta tg in P_0



Flesso:
in P_0 $(x_0, f(x_0))$ il grafico della funzione ha un punto di flesso se in tale punto il grafico attraversa la retta tg in P_0.

Flesso a tg obliqua
y''=0 y''=D[y']



flesso a tg orizzontale → p. critico → la y' è 0

flesso a tg verticale
(p. di non derivabilità)

CRITERIO DELLA DERIVATA SECONDA
(flessi e concavità)

1. si trova la y''
2. si risolve y''= 0 → si trovano i flessi (obliqui e orizzontali)
3. y''>0 > 0 convessa
   < 0 concava

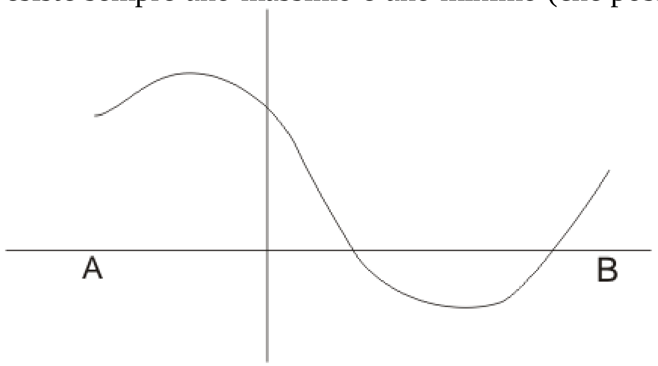
TEOREMI FONDAMENTALI

Funzioni continue	Funzioni continue e derivabili
1. Teorema di Weierstrass 2. Teorema dell'esistenza degli zeri 3. Teorema dei valori intermedi	1. Teorema di Rolle 2. Teorema di Cauchy 3. Teorema di Lagrange 4. Teorema di De l'Hopital

FUNZIONI CONTINUE

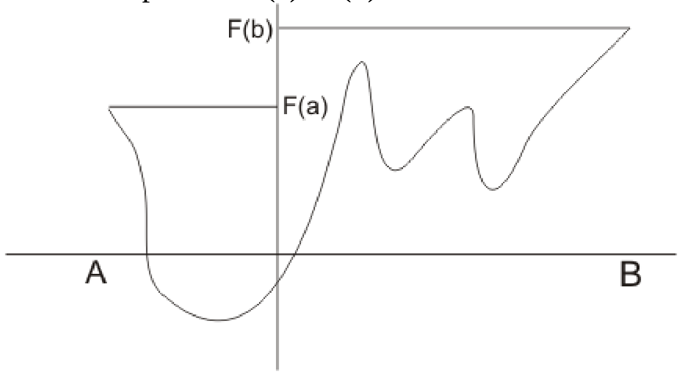
Teorema di Weierstrass

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b], allora fra i valori assunti da f(x) ne esiste sempre uno massimo e uno minimo (che possono anche coincidere).



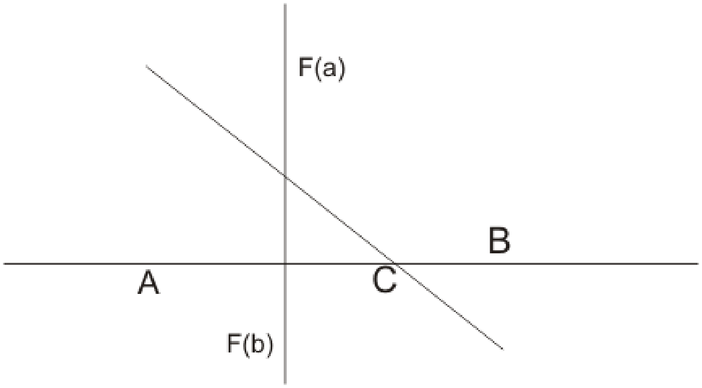
Teorema dei valori intermedi

Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b], allora assume almeno una volta tutti i valori compresi tra f(a) e f(b).



Oss. Le funzioni continue trasformano intervalli in intervalli. F: I → I'

Teorema dell'esistenza degli zeri
Se f(x) è una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] e se f(a) ed f(b) hanno segno opposto, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[/ f(c) = 0$



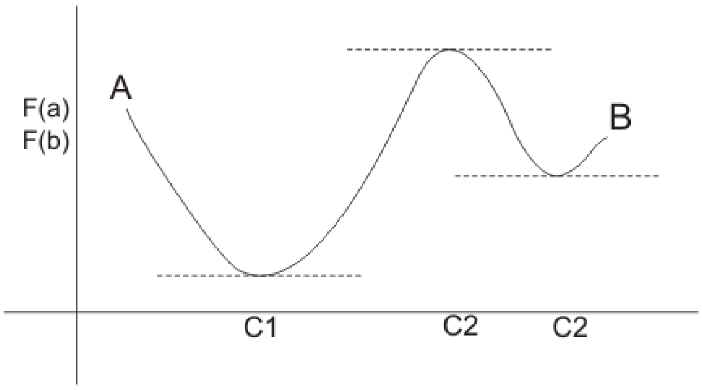
Ovvero
Se una funzione cambia segno in un intervallo ed è continua, allora ha almeno uno zero. (taglia l'asse x).

Oss.1
L'inverso del teorema è falso.
Non è vero che se $\exists c / f(c) = 0$ allora la f cambia segno. Es. y = x^2
Oss. 2
Il teorema di esistenza degli zeri da una condizione sufficiente, non necessaria.
Oss. 3
Il teorema di esistenza degli zeri è una conseguenza del teorema dei valori intermedi.

FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI

Teorema di Rolle
Data una funzione f che sia
1. definita e continua in [a, b]
2. derivabile in]a, b[
3. f(a) = f(b)

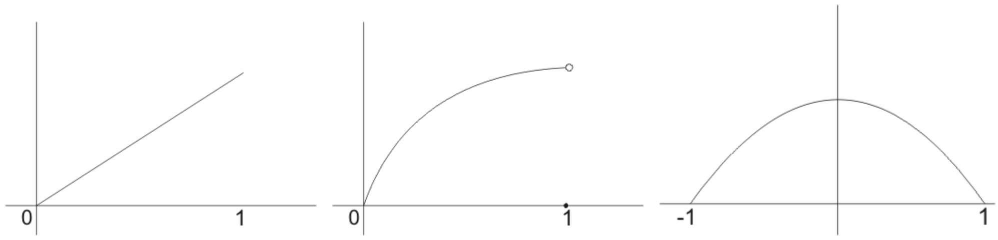
allora
esiste almeno un valore $c \in]a, b[/ f'(c) = 0$



tg // asse x in almeno 1 punto del grafico (c1, c2, c3)

Assicura l'esistenza del punto critico.

Controesempi



y = x NO NO SI

Teorema di Cauchy
Date <u>due</u> funzioni f(x) e g(x) che siano definite, <u>continue</u> in [a, b] e <u>derivabili</u> in]a, b[, con la condizione: g'(x) ≠ 0 $\forall x \in]a,b[$

<u>Allora</u> esiste almeno un punto $c \in]a,b[/ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Dimostrazione:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = k$$

$$f(b)-f(a) = kg(b)-kg(a) \to f(b)-kg(b) = f(a)-kg(a)*$$

$$chiamiamo: F(x) = f(x)-kg(x).$$

$$*\,Risulta:$$

$$F(b) = F(a)$$

F(x) è continua e derivabile in]a, b[e F(a) = F(b)

<u>Dunque</u> la F(x) soddisfa il teorema di Rolle
Esiste $c \in]a,b[/ f'(c) = 0$

$$F'(c) = f'(c) - kg'(c) = 0$$

$$da \quad cui$$

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} CVD$$