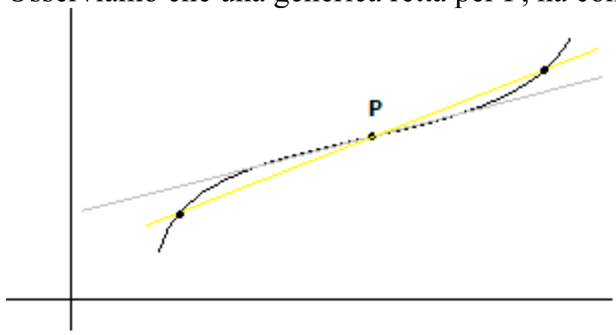
Derivate successive

Punti di flesso.
Un punto $P(x_0, f(x_0))$ si dirà di flesso per la funzione $y = f(x)$ se, considerata la tangente t, esiste un intorno I_{x_0}, in cui la funzione sta a destra e a sinistra da parte opposte, ovvero cambia concavità.

Osserviamo che una generica retta per P, ha con la funzione tre punti di intersezione, con y=f(x).



Il flesso si dice ascendente, se a destra la funzione si trova sopra la retta tangente, discendente se si trova sotto la retta tangente.

Derivata seconda.
Una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo I, ivi continua e derivabile, l'insieme delle valori derivati costituiscono una funzione, la funzione derivata $y = f'(x)$. Se La funzione $y = f'(x)$ è ancora derivabile l'insieme dei valori al variare di x si chiama derivata seconda e si indica $y = f''(x)$. Continuando si può arrivare ad avere una derivata di ordine n della funzione $y = f(x)$, e si indica $y = f^n(x)$.
Una funzione continua in un intervallo I si dice di classe $C^0(I)$ o semplicemente C^0, un funzione continua e derivabile si dice di classe $C^1(I)$ o C^1. Una funzione continua e derivabile fino alla derivata n-ma si dice di classe C^n.

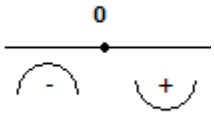
Teorema.
Sia $y = f(x)$, definita in un intervallo I, ivi continua e derivabile di classe C^2,
1) se $f''(x) > 0$ per un intervallo I allora la funzione è convessa in I.
2) se $f''(x) < 0$ per un intervallo I allora la funzione è concava in I.

Ricerca dei punti di flesso.
Sia $y = f(x)$, definita in un intervallo I e se $x_0 \in I$, ivi continua e derivabile di classe C^2, condizione necessaria affinché $P(x_0, f(x_0))$ sia di flesso è che $f''(x_0) = 0$.

Se a destra e a sinistra di x_0, la derivata è discorde allora $P(x_0, f(x_0))$, è un punto di Flesso, altrimenti, è punto in cui la funzione è convessa o concava.

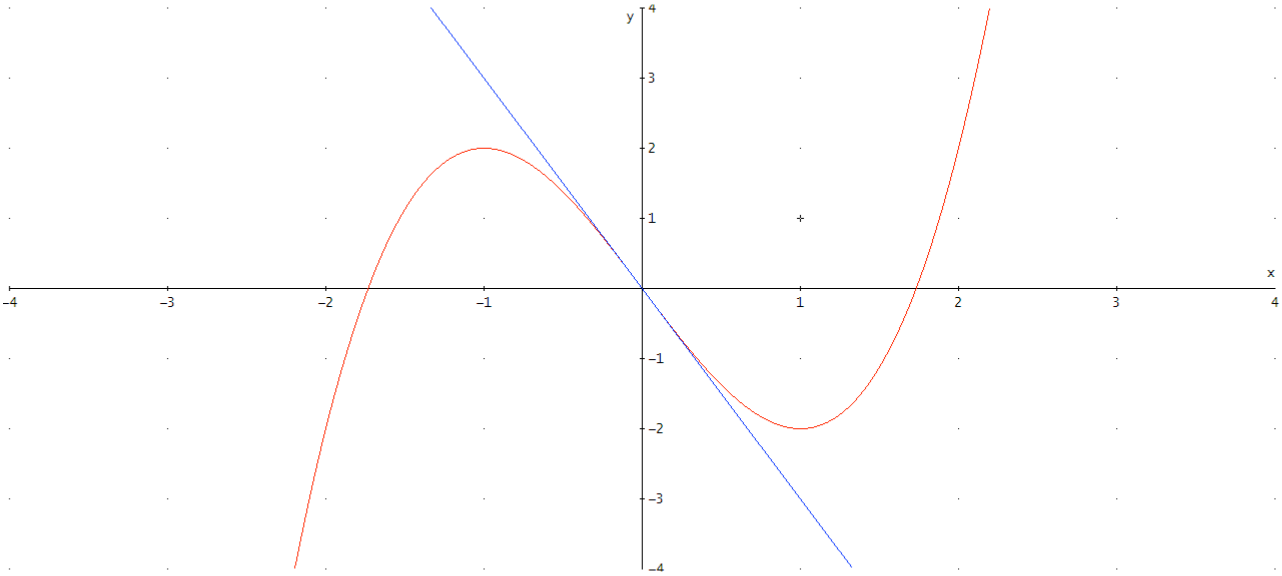
Quindi per cercare i punti di flesso devo studiare la derivata seconda, e gli eventuali punti di flesso devo cercarli per $f''(x_0) = 0$, e se $f'''(x_0) \neq 0$ allora ho un punto di flesso.
Non serva fare la derivata terza basta che studio il segno della derivata seconda.

P.E.



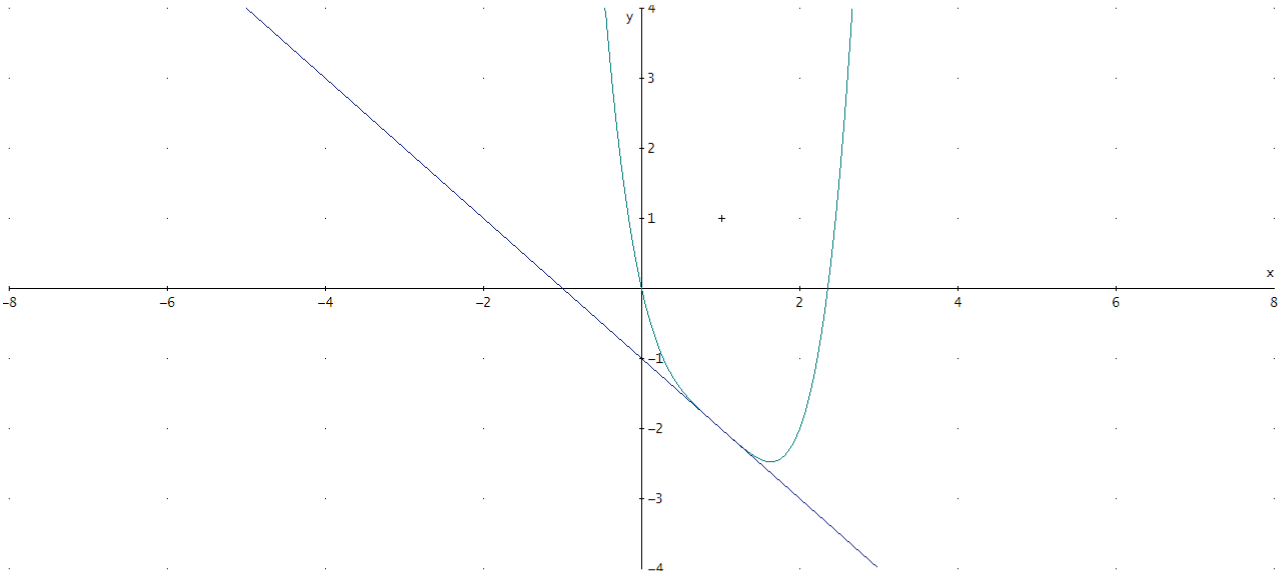
$y = x^3 - 3x \quad y' = 3x^2 - 3 \quad y'' = 6x \geq 0$

La funzione ha un flesso per x=0 a destra ha la concavità verso l’alto, a sinistra verso il basso.
La tangente in flessionale per x=0 è $y = -3x$



$y = (x-1)^4 - x - 1 \quad y' = 4(x-1)^3 - 1 \quad y'' = 12(x-1)^2 \geq 0$

La funzione è sempre positiva e quindi ha sempre la concavità verso l’alto anche se f’’(1)=0 per x=1 non ho un flesso ma un punto in cui la concavità è verso l’alto. Tale funzione non ha flessi.
La retta tangente per x=1 $y = -x + 1$



Teorema.
Sia $y = f(x)$, definita in un intervallo I, ivi continua e derivabile di classe C^2,

1) se la funzione è convessa in x_0 segue che $f''(x_0) \geq 0$.
2) se la funzione è concava in x_0 segue che $f''(x_0) \leq 0$.

Teorema.(ricerca massimo o minimo per derivate successive)
Sia $y = f(x)$, definita in un intervallo I, ivi continua e derivabile di classe C^2,

1) se la funzione è in x_0 è tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$, ho punto di massimo
2) se la funzione è in x_0 è tale che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$, ho punto di minimo
3) se la funzione è concava in x_0 segue che $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$ allora ho un punto di flesso a tangente orizzontale.

In generale se
$f'(x_0) = f''(x_0) = .. = f^{n-1}(x_0) = 0$ e e $f^n(x_0) \neq 0$
Allora se n è pari ho un massimo ($f^n(x_0) < 0$) o un minimo ($f^n(x_0) > 0$) , se ne è dispari ho un flesso a tangente orizzontale.
Dimostrazione.
Per la formula di Taylor ho che $\Delta f(x) = df + f''(x_0)\dfrac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_0)\dfrac{\Delta x^3}{3!}$... da cui
Per n=pari
$\Delta f(x) = f^n(x_0)\dfrac{\Delta x^n}{n!} > 0$ quindi ho che $\Delta f(x) > 0$ $f(x) > f(x_0)$ e quindi un minimo.
Analogamente per il caso minore
Per n=pari, se per esempio $f^n(x)>0$
$\Delta f(x) = f^n(x_0)\dfrac{\Delta x^n}{n!}$ dato che Δx^n è positivo a destra e negativo a sinistra (perché n dispari=
quindi ho che $\Delta f(x) > 0$ a destra e $\Delta f(x) < 0$ a sinistra, quindi la funzione cambia di concavità e ho un flesso.