5 Calcolo integrale

1 Richiami di teoria

1.1 Integrali indefiniti

In questo capitolo si considerano funzioni reali $y = f(x)$ di una variabile reale, definite in un intervallo I, limitato o illimitato: in simboli $y = f(x): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In relazione al calcolo differenziale si è osservato che la funzione derivata di una funzione, se esiste, è unica; ora si affronta il problema inverso alla derivazione, ovvero, considerata una funzione $y = f(x)$, si valuta la possibilità di determinare una funzione che ammette $y = f(x)$ come sua funzione derivata.

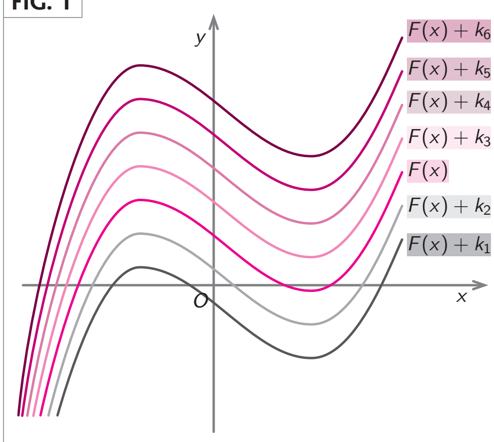
Funzione primitiva: definizione e interpretazione geometrica

Una funzione $F(x)$ si dice **primitiva** di una funzione $y = f(x): I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, se $F(x)$ è derivabile nell'intervallo I e risulta $F'(x) = f(x)$.

In base ai corollari del teorema di Lagrange, relativi alle funzioni costanti, riportati nel **capitolo 4** dedicato al calcolo differenziale, si deduce che la funzione primitiva di una funzione non è unica; precisamente, se una funzione $f(x)$ ammette una funzione primitiva $F(x)$, allora ammette infinite funzioni primitive del tipo $F(x) + k$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Dal punto di vista geometrico le funzioni del tipo $F(x) + k$ $\forall k \in \mathbb{R}$ ammettono grafici che si ottengono applicando al grafico della funzione $F(x)$ una traslazione verticale di vettore $\vec{v}\,(0; k)$.

FIG. 1



Integrale indefinito: definizione

Si denomina **integrale indefinito** della funzione $y = f(x)$ l'insieme di tutte e sole le funzioni primitive $F(x) + k$ $\forall x \in \mathbb{R}$ e si indica

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \, .$$

La funzione $f(x)$ è detta **funzione integranda**, mentre x è la **variabile di integrazione**.

Risulta:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + k \quad \text{con } F'(x) = f(x) \ \forall k \in \mathbb{R}.$$

L'integrale indefinito può quindi essere interpretato come l'operatore inverso della derivata.

Linearità dell'integrale indefinito

L'integrale indefinito è un **operatore lineare**:

$$\int [h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \ldots + h_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x = \\ = h_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + h_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + h_n \int f_n(x)\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{1}$$

$h_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

Integrali indefiniti immediati

funzione potenza		funzioni goniometriche	
$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k \quad \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	2	$\int \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = -\cos x + k$	5
se $n = 0$ $\quad \int \mathrm{d}x = x + k$		$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen} x + k$	6
se $n = \frac{1}{2}$ $\quad \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k$		$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + k$	7
caso escluso dalla regola di integrazione della funzione potenza:		$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg} x + k$	8
se $n = -1$ $\quad \int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\|x\| + k$	3	funzione le cui primitive sono le funzioni inverse circolari	
funzione esponenziale		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen} x + k$	9
$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + k \quad a \in \mathbb{R}^+$	4	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos x + k$	10
se $a = e$ $\quad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + k$		$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} x + k$	11

Integrali di funzioni la cui primitiva è una funzione composta

funzione potenza		funzioni goniometriche	
$\int [f(x)]^n f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + k \quad \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	12	$\int \operatorname{sen}[f(x)] f'(x)\,\mathrm{d}x = -\cos[f(x)] + k$	16
se $n = \frac{1}{2}$ $\quad \int \sqrt{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sqrt{[f(x)]^3} + k$		$\int \cos[f(x)] f'(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{sen}[f(x)] + k$	17
se $n = -2$ $\quad \int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{f(x)} + k$		$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg}[f(x)] + k$	18
caso escluso dalla regola di integrazione della funzione potenza:		$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ctg}[f(x)] + k$	19
se $n = -1$ $\quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\|f(x)\| + k$	13	funzione le cui primitive sono le funzioni inverse circolari	
funzione esponenziale		$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen}[f(x)] + k$	20
$\int a^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + k \quad a \in \mathbb{R}^+$	14	$\int -\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos[f(x)] + k$	21
se $a = e$ $\quad \int e^{f(x)} f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + k$	15	$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg}[f(x)] + k$	22

1.2 Principali criteri di integrazione

Oltre alle regole relative al calcolo degli integrali indefiniti immediati o degli integrali di funzioni la cui primitiva è una funzione composta, in base alla tipologia della funzione integranda, si possono applicare i seguenti criteri.

Integrazione per sostituzione

In alcuni casi il calcolo dell'integrale indefinito risulta semplificato applicando il metodo di sostituzione in base al quale, assegnato l'integrale $\int f(x)\,\mathrm{d}x$:

- si pone $x = g(t)$, con $g(t)$, funzione in una variabile t, derivabile e invertibile;
- si determina il differenziale $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$;
- si effettua la sostituzione nell'integrale assegnato ottenendo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f[g(t)]\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t \;; \tag{23}$$

- si calcola $\int f[g(t)]\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$ rispetto alla variabile t, ottenendo, per sostituzione, la soluzione dell'integrale $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Si propongono alcune sostituzioni particolari.

1. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

La semplice sostituzione $\sqrt{1-x^2} = t$ non risulta adeguata; è opportuno porre $x = \operatorname{sen} t$, da cui $t = \operatorname{arc\,sen} x$, con $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$, intervallo di invertibilità della funzione $x = \operatorname{sen} t$.

Da $\sqrt{1-x^2} = t$ si ricava $\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t} = \cos t$, poiché $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t \ge 0$. Differenziando entrambi i membri dell'uguaglianza $x = \operatorname{sen} t$ si ha $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, per cui, con la sostituzione nell'integrale assegnato, si ottiene

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \cos t\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

che, applicando, ad esempio, la formula di bisezione della funzione coseno

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2},$$

si risolve come

$$\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int 2\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cdot\operatorname{sen} 2t + k =$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\cdot 2\operatorname{sen} t\cos t + k = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t\cos t + k.$$

Tenendo presente che $t = \operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{sen} t = x$ e $\cos t = \sqrt{1-x^2}$, si ricava:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + k.$$

Si può generalizzare il precedente criterio per risolvere gli integrali del tipo

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ , \; a \in \mathbb{R}^+,$$

o a essi riconducibili, ponendo $x = a\operatorname{sen} t$, $t = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{a}\right)$.

2. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

In tal caso è opportuno porre $\sqrt{x^2+1} = t - x$, da cui $\sqrt{x^2+1} + x = t$; differenziando entrambi i membri si ricava

$$\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + 1\right) \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

e, tenendo presente l'uguaglianza $\sqrt{x^2+1} + x = t$, si ha

$$\left(\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}\right) \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Con la sostituzione nell'integrale assegnato si ottiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + k, \text{ ovvero } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \mathrm{d}x = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + k.$$

Si può generalizzare il precedente criterio per risolvere gli integrali del tipo

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2x^2 \pm b^2}} \mathrm{d}x \quad , a \wedge b \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

o a essi riconducibili, ponendo $\sqrt{a^2x^2 \pm b^2} = t - ax$.

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \mathrm{d}x$.

In tal caso è opportuno porre $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, da cui $x = 2 \operatorname{arc\,tg} t$; differenziando entrambi i membri si ricava $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t$. Ricordando la formula parametrica $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}$ ed effettuando la sostituzione nell'integrale assegnato si ottiene

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t = \int \frac{1+t^2}{1+t^2+2t} \cdot \frac{2}{1+t^2} \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{2}{(1+t)^2} \mathrm{d}t = -\frac{2}{1+t} + k = -\frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + k.$$

In genere tale sostituzione semplifica la risoluzione di integrali contenenti solo funzioni goniometriche di primo grado.

Integrazione per parti

Nel caso in cui la funzione integranda sia il prodotto di due funzioni o, comunque, interpretabile come tale, risulta spesso utile applicare il criterio di integrazione per parti, deducibile dalla regola di derivazione del prodotto tra due funzioni, cioè:

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x \qquad \textbf{24}$$

ove $f'(x) \, \mathrm{d}x$ è detto **fattore differenziale**, mentre $g(x)$ è detto **fattore finito**.

Per applicare adeguatamente tale criterio è importante scegliere come fattore differenziale quello di cui si calcola più semplicemente la primitiva.

Integrazione delle funzioni razionali fratte

Si consideri una funzione

$$y = \frac{N(x)}{D(x)}$$

razionale fratta, ovvero il quoziente di due polinomi $N(x)$ di grado m e $D(x)$ di grado n. Se $m \geq n$, si può effettuare la divisione tra il polinomio al numeratore $N(x)$ e il polinomio a denominatore $D(x)$, ricavando come quoziente un polinomio $Q(x)$ di grado $m - n$ e come resto un polinomio $R(x)$ di grado $r < m$.

La funzione $y = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ si può scrivere nella forma

$$y = \frac{Q(x) \cdot D(x) + R(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

In tal caso, quindi, calcolare $\displaystyle\int \frac{N(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$ equivale a calcolare

$$\int \left[Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)} \right] \mathrm{d}x = \int Q(x)\,\mathrm{d}x + \int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Il primo integrale $\int Q(x)\,\mathrm{d}x$ è facilmente calcolabile poiché la funzione $Q(x)$ è un polinomio, mentre il secondo integrale $\int \frac{R(x)}{D(x)}\,\mathrm{d}x$ richiede l'applicazione del criterio relativo all'integrazione delle funzioni razionali fratte, il cui numeratore è un polinomio di grado inferiore al grado del polinomio a denominatore.

A tal scopo vengono presentati i casi più significativi e ricorrenti.

a. Il polinomio a denominatore è di primo grado o una sua potenza naturale.

Si presentano i seguenti casi:

- $\displaystyle\int \frac{c}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{a}\ln|ax+b| + k \quad , \quad a, c \in \mathbb{R}_0 \wedge b, k \in \mathbb{R};$ **25**
- $\displaystyle\int \frac{c}{(ax+b)^n}\,\mathrm{d}x = c\int (ax+b)^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{-n+1}}{-n+1} + k \quad ,$

  $a, c \in \mathbb{R}_0 \wedge b, k \in \mathbb{R} \wedge n \in \mathbb{N}_0;$ **26**

b. Il polinomio a denominatore è di secondo grado, $D(x) = ax^2 + bx + c$, $a \in \mathbb{R}_0$, $b, c \in \mathbb{R}$. L'integrale ha un'espressione del tipo

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x, \quad a \in \mathbb{R}_0 \ \wedge \ b, c \in \mathbb{R}, \quad p,\ q \text{ non contemporaneamente nulli.}$$

In tal caso occorre fare un'ulteriore distinzione, a seconda del discriminante Δ del polinomio a denominatore.

- Se $\Delta > 0$, il trinomio a denominatore ammette due soluzioni reali e distinte x_1, x_2, e quindi risulta scomponibile nella forma $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

  La funzione integranda può essere decomposta nella somma di due frazioni elementari, imponendo l'uguaglianza

  $$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_2)},$$

  con A e B numeri reali da determinare applicando il principio di identità dei polinomi, come viene descritto negli esercizi. Il calcolo dell'integrale viene ricondotto al calcolo di due integrali elementari, cioè

  $$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{A}{a(x-x_1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{a(x-x_2)}\,\mathrm{d}x =$$

  $$= \frac{A}{a}\ln|x-x_1| + \frac{B}{a}\ln|x-x_2| + k.$$ **27**

- Se $\Delta = 0$, il trinomio a denominatore ammette due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2$ e quindi risulta scomponibile nella forma $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

L'integrale del tipo

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,\ a,\ q \in \mathbb{R}_0 \wedge b,\ c \in \mathbb{R}$$

può essere scritto nella forma

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,\mathrm{d}x$$

e quindi risolto applicando la regola di integrazione della potenza di una funzione, ovvero

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{q}{a}\int (x-x_1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{q}{a}\cdot\frac{(x-x_1)^{-2+1}}{-2+1}+k =$$
$$= -\frac{q}{a}\cdot(x-x_1)^{-1}+k = -\frac{q}{a(x-x_1)}+k.$$

L'integrale del tipo

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,\ a,\ p \in \mathbb{R}_0 \wedge b,\ c,\ q \in \mathbb{R}$$

può essere scritto nella forma

$$\int \frac{px+q}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x$$

e quindi risolto scomponendo la funzione integranda nella somma di due frazioni, con A e B numeri reali da determinare applicando il principio di identità dei polinomi. Si ha quindi:

$$\boxed{\int \frac{px+q}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x} = \int \frac{A}{a(x-x_1)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B}{a(x-x_1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \boxed{\frac{A}{a}\ln|(x-x_1)| - \frac{B}{a(x-x_1)}+k}\,.$$

28

- Se $\Delta < 0$, il trinomio a denominatore non ammette soluzioni reali e quindi non è scomponibile in $\mathbb{R}$; può però essere scritto nella forma:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{c}{a}\right) = a\left(x^2+\tfrac{b}{a}x+\tfrac{b^2}{4a^2}-\tfrac{b^2}{4a^2}+\tfrac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left[\left(x+\tfrac{b}{2a}\right)^2+\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Raccogliendo a fattor comune il termine $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, si ricava

$$a\left(\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\left[\frac{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}{\left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)}+1\right] = a\left(\tfrac{4ac-b^2}{4a^2}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}}\right)^2+1\right],$$

e, tenendo presente che $\Delta = b^2-4ac < 0$, ovvero $4ac-b^2 = -\Delta > 0$, la precedente espressione risulta:

$$a\left(\tfrac{-\Delta}{4a^2}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}}\right)^2+1\right] = \tfrac{-\Delta}{4a}\left[\left(\tfrac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right].$$

In base a tali osservazioni, l'integrale del tipo

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,\ a,\ q \in \mathbb{R}_0 \wedge b,\ c \in \mathbb{R}$$

può essere scritto nella forma:

$$\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \int \frac{q}{\frac{-\Delta}{4a}\left[\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2+1\right]}\,\mathrm{d}x = \frac{4qa}{-\Delta}\int \frac{1}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2q}{\sqrt{-\Delta}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dalla regola di integrazione **22** si ricava:

$$\boxed{\int \frac{q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x} = \frac{2q}{\sqrt{-\Delta}}\int \frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{\left[1+\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right]}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \boxed{\frac{2q}{\sqrt{-\Delta}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)+k}\ . \qquad \mathbf{29}$$

Per risolvere l'integrale del tipo

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,\ a,\ p \in \mathbb{R}_0 \wedge b,\ c,\ q \in \mathbb{R}$$

si scompone la funzione integranda nella somma di due frazioni algebriche, in modo che nella prima il numeratore sia la derivata del denominatore e nella seconda il numeratore sia una costante. Il primo integrale risulta quindi calcolabile con una funzione logaritmica, mentre il secondo è ricondotto al caso precedentemente esaminato dell'arcotangente di una funzione.

c. Il polinomio a denominatore è di grado superiore al secondo. In tal caso occorre fare un'ulteriore distinzione.

▷ Il polinomio $D(x)$ a denominatore, di grado n, $2 < n < m$ ammette n soluzioni reali e distinte, ovvero di molteplicità 1, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e quindi risulta scomponibile nella forma $D(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdot \ldots \cdot (x-x_n)$. La funzione integranda può essere decomposta nella somma di n frazioni elementari
$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_n)}$
ove A_i, con $i = 1, 2, \ldots, n$, sono costanti reali da determinare applicando il principio di identità dei polinomi, per cui il criterio per il calcolo dell'integrale è analogo a quello descritto nel caso $\Delta > 0$.

▷ Il polinomio $D(x)$ a denominatore, di grado n, $2 < n < m$, ammette soluzioni reali anche di molteplicità maggiore di 1; ad esempio risulta scomponibile nella forma $D(x) = (x-x_1)^r(x-x_2)^s \ldots (x-x_h)^p$ e $r+s+\ldots+p = n$. La funzione integranda può essere decomposta nella somma di frazioni elementari

$$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-x_1)^r} + \frac{B_1}{(x-x_2)} + \frac{B_2}{(x-x_2)^2} + \frac{B_3}{(x-x_2)^3} + \ldots + \frac{B_s}{(x-x_2)^s} +$$

$$+ \ldots +$$

$$+ \frac{G_1}{(x-x_h)} + \frac{G_2}{(x-x_h)^2} + \ldots + \frac{G_h}{(x-x_h)^s}$$

con $A_i, B_i, \dots, G_i$ costanti reali da determinare applicando il principio di identità dei polinomi, e il criterio per il calcolo dell'integrale è una generalizzazione di quello descritto nel caso $\Delta = 0$.

▷ Il polinomio $D(x)$ a denominatore, di grado n, $2 < n < m$, ammette, oltre a soluzioni reali, anche zeri complessi di molteplicità 1. In tal caso la funzione integranda può essere decomposta nella somma di frazioni in modo che il numeratore delle frazioni, con denominatore un polinomio di secondo grado a zeri complessi, sia un polinomio di primo grado. Il calcolo dei corrispondenti integrali segue i criteri precedentemente descritti.

1.3 Integrali definiti

Integrale definito: definizione

Si consideri una funzione $y = f(x)$ definita e continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, con $f(x) \geq 0$ in $[a; b]$; si divida l'intervallo in n parti uguali, ciascuna di ampiezza $h = \frac{b-a}{n}$. Siano $\min_i(f)$ e $\max_i(f)$, rispettivamente, i valori minimi e i valori massimi che la funzione assume in ciascuno degli n sottointervalli, al variare dell'indice i da 1 a n. Il prodotto $\min_i(f) \cdot h$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, rappresenta l'area del rettangolo avente base di ampiezza h e altezza di misura uguale a $\min_i(f)$, ovvero al valore minimo assunto dalla funzione nell'intervallo i-esimo. Analogamente, il prodotto $\max_i(f) \cdot h$, con $i = 1, 2, 3, \dots, n$, rappresenta l'area del rettangolo avente base di ampiezza h e altezza di misura uguale a $\max_i(f)$, ovvero al valore minimo assunto dalla funzione nell'intervallo i-esimo. Si denomina **integrale definito** della funzione continua $y = f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ il limite comune delle due successioni

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \min_i(f) \cdot h \text{ e } S_n = \sum_{i=1}^{n} \max_i(f) \cdot h, \text{ cioè:}$$

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} S_n .$$

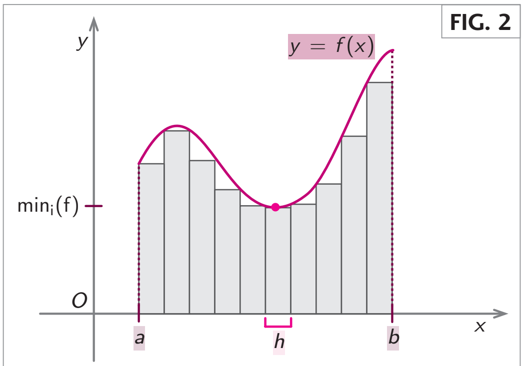


FIG. 2

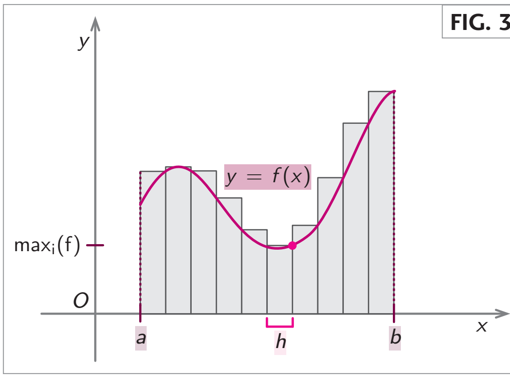


FIG. 3

Nota bene. Assegnata la funzione $y = f(x)$ e l'intervallo $[a; b]$, l'integrale definito $\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$ assume un valore numerico e quindi non dipende dalla variabile di integrazione che, per tale motivo, viene denominata **variabile muta**.

Interpretazione geometrica dell'integrale definito

L'integrale definito assume l'importante significato geometrico di area con segno; esiste cioè una relazione fondamentale tra l'integrale definito di una funzione $y = f(x)$ in un intervallo $[a; b]$ e l'area $\mathcal{A}$ della regione piana delimitata dal grafico della funzione e dall'asse delle ascisse.

Precisamente:

▷ se $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \mathcal{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (**figura 4**);

▷ se $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \mathcal{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (**figura 5**).

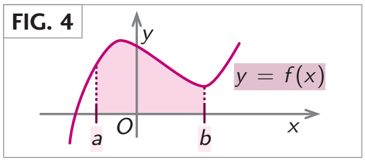


FIG. 4

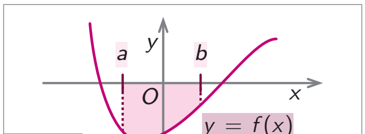


FIG. 5

Proprietà dell'integrale definito

Posto per definizione:

▷ $$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0\,,$$ 30

▷ $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$ 31

l'integrale definito soddisfa importanti proprietà.

▷ L'integrale definito è un **operatore lineare**:

$$\int_a^b [h_1 f_1(x) + h_2 f_2(x) + \ldots + h_n f_n(x)]\,\mathrm{d}x = \\ = h_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + h_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + h_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$$ 32

$$h_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

▷ **Additività** dell'integrale definito rispetto all'intervallo di integrazione.
Se $y = f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$ risulta:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\ \forall c \in\ ]a;b[.$$ 33

▷ **Confronto** tra gli integrali definiti di due funzioni.
Se $y = f(x)$ e $y = g(x)$ sono due funzioni continue, tali che $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a;b]$, risulta:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$ 34

▷ Integrale del **valore assoluto** di una funzione.
Se $y = f(x)$ è una funzione continua nell'intervallo $[a;b]$ risulta:

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$ 35

Teorema della media integrale 36

Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a;b]$, allora $\exists c \in [a;b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\cdot(b-a)\,,$$

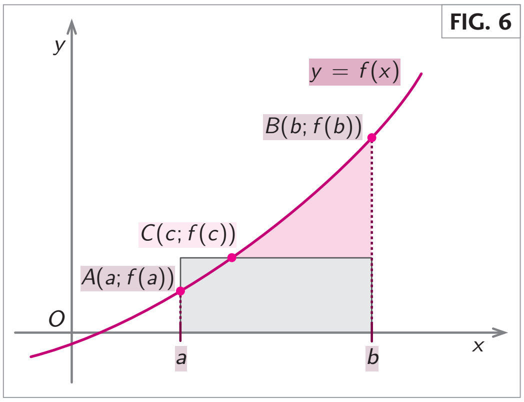
ove $f(c)$ è denominato **valor medio** della funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $[a;b]$.

Interpretazione geometrica del teorema della media integrale

Se la funzione $y = f(x)$ risulta $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a; b]$, il teorema della media integrale garantisce l'esistenza di almeno un punto c, appartenente all'intervallo $[a; b]$, tale che il rettangolo avente come base l'ampiezza $b - a$ dell'intervallo e come altezza il valore $f(c)$ assunto dalla funzione in c, è equivalente al trapezoide la cui area è espressa dall'integrale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

FIG. 6



Funzione integrale: definizione

Considerata una funzione $y = f(x)$, il valore del suo integrale definito varia a seconda dell'intervallo considerato. In particolare, se si fissa un estremo dell'intervallo, ad esempio l'estremo inferiore a, e si fa variare l'estremo superiore x, il valore dell'integrale dipende da tale estremo, ovvero è funzione di x.

Si denomina **funzione integrale** $F(x)$ della funzione $y = f(x)$ nell'intervallo $[a; x]$ la funzione che associa a ogni x il valore $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, ovvero

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}\,.$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale (o di Torricelli-Barrow) **37**

Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, allora la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, con $x \in [a; b]$, è derivabile e risulta una sua funzione primitiva, ovvero $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in [a; b]$.

Formula di Newton-Leibniz per il calcolo di un integrale definito

Se $y = f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a; b]$, allora

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}\,, \qquad \textbf{38}$$

ove $F(x)$ è una funzione primitiva di $f(x)$.

1.4 Integrali impropri o generalizzati

Gli integrali generalizzati rappresentano un'estensione del concetto di integrale definito e si distinguono in:

Integrali generalizzati di prima specie **39**

Data una funzione $y = f(x)$ continua su un intervallo superiormente illimitato $I = [a; +\infty[$, e quindi integrabile su ogni suo sottointervallo limitato $[a; b]$ con $b > a$, si dice che $y = f(x)$ è integrabile in senso generalizzato di prima specie su $I = [a; +\infty[$ se esiste finito il limite $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. In tal caso $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ è denominato **integrale improprio** o **generalizzato di prima specie**, si pone

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

e si dice anche che l'integrale generalizzato **converge**.

Se invece

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$$

si dice che l'integrale generalizzato **diverge**.

Si osserva che se $f(x)>0$ nell'intervallo $I=[a;+\infty[$, l'integrale generalizzato convergente rappresenta l'area finita del trapezoide illimitato individuato dal grafico della funzione e dall'asse x.

Analoga definizione è estesa anche alle funzioni continue su intervalli illimitati del tipo $]-\infty;b]$, se esiste finito $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con $b>a$, allora

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

o del tipo $]-\infty;+\infty[$, se esiste finito il doppio limite $\lim\limits_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, con $b>a$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Integrali generalizzati di seconda specie **40**

Una funzione $y=f(x)$ continua su un intervallo $I=[a;b[$, illimitata per $x=b$, ovvero $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\infty$, risulta integrabile su ogni suo sottointervallo del tipo $[a;b-\varepsilon]$, con $\varepsilon>0$, e il valore dell'integrale $\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$ dipende da ε.

Si dice che $y=f(x)$ è integrabile in senso generalizzato di seconda specie su $I=[a;b[$ se esiste finito il limite $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$. In tal caso $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$ è denominato **integrale improprio** o **generalizzato di seconda specie**, si pone

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x$$

e si dice anche che l'integrale generalizzato **converge**.

Se invece

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)\,\mathrm{d}x=\infty$$

si dice che l'integrale generalizzato **diverge**.

Si osserva che se $f(x)\geq0$ nell'intervallo $I=[a;b[$, l'integrale generalizzato convergente rappresenta l'area finita del trapezoide illimitato individuato dal grafico della funzione, dall'asse x e dalla retta $x=a$.

Analoga definizione è estesa anche alle funzioni continue su intervalli illimitati del tipo $]a;b]$, se esiste finito il $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ allora $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$; o del tipo $]a;b[$, se esiste finito il doppio limite $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \delta\to0^+}}\int_{a+\varepsilon}^{b-\delta}f(x)\,\mathrm{d}x$, con $\varepsilon\neq\delta$, allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\substack{\varepsilon\to0^+\\ \delta\to0^+}}\int_{a+\varepsilon}^{b-\delta}f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

1.5 Applicazioni dell'integrale definito

Calcolo di aree

Tenendo presente le precedenti osservazioni circa il legame tra integrale definito e area, si possono evidenziare importanti applicazioni.

- Calcolo dell'area Δ delle regioni finite di piano delimitate dalla curva grafico di una funzione $y = f(x)$, definita e continua in un dato intervallo, e dall'asse x. **41**

  Con riferimento alla **figura 7**, si ha che

  $f(x) \leq 0 \ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \Omega = -\int_a^b f(x)\,dx;$

  $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [b;c] \Rightarrow \Sigma = \int_b^c f(x)\,dx,$

  quindi l'area complessiva Δ risulta:

  $$\Delta = \Omega + \Sigma = -\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

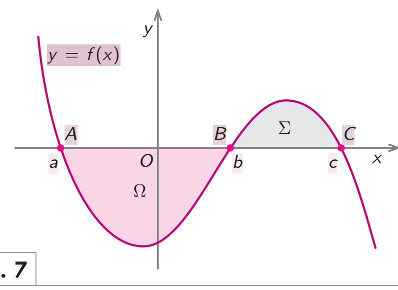


FIG. 7

- Calcolo dell'area Ω della regione finita di piano compresa tra le curve grafici di due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, definite e continue in un dato intervallo, tali che $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a;b]$, e le rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ con $b > a$. Con riferimento alla **figura 8**, si ha che:

  $$\Omega = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \ .$$ **42**

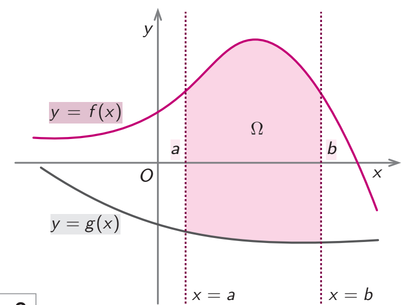


FIG. 8

- Calcolo dell'area Σ della regione finita di piano compresa tra le curve grafici di due funzioni $y = f(x)$ e $y = g(x)$, definite e continue in un dato intervallo, che si intersecano in due punti di ascisse $x = a$ e $x = b$ con $b > a$ e che soddisfano la condizione $f(x) \geq g(x) \ \forall x \in [a;b]$.

  Con riferimento alla **figura 9**, si ha che:

  $$\Sigma = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \ .$$ **43**

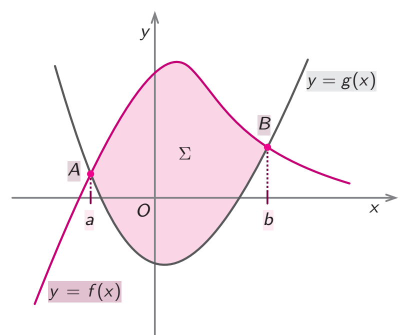


FIG. 9

- Calcolo dell'area Ψ della regione finita di piano compresa tra le curve grafici di tre (o più) funzioni $y = f(x)$, $y = g(x)$ e $y = h(x)$, definite e continue in un dato intervallo, che si intersecano nei punti di ascisse $x = a$, $x = b$ e $x = c$. Scelto un punto iniziale tra quelli di intersezione, ad esempio A, seguendo il senso orario, con riferimento alla **figura 10**, si ha che:

  $$\Psi = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c h(x)\,dx + \int_c^a g(x)\,dx \ .$$ **44**

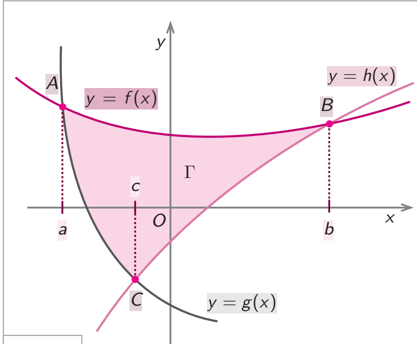


FIG. 10

Il calcolo dell'area Ψ può essere effettuato anche mediante la formula **43** di cui la **44** è un'immediata conseguenza:

$$\Psi = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x + \int_c^b [f(x) - h(x)]\,\mathrm{d}x \ .$$

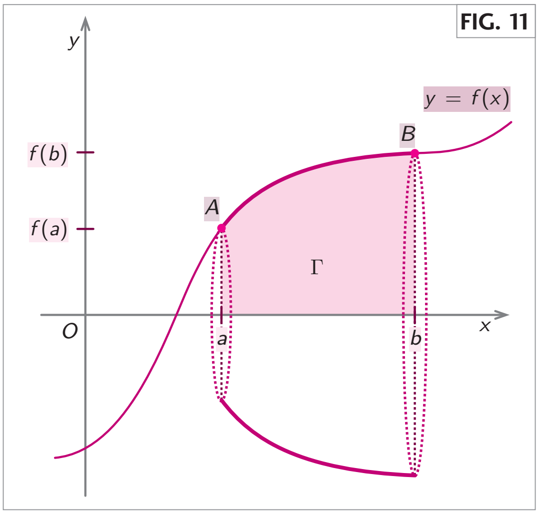
Volumi di solidi di rotazione

▷ Sia $y = f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $I \equiv [a; b]$ e sia Γ la curva che ne rappresenta il grafico.

Il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse x del trapezoide delimitato da Γ, dalle rette di equazioni $x = a$, $x = b$ e dall'asse x (**figura 11**), ha volume $\mathcal{V}_x$ dato da:

$$\mathcal{V}_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x \ . \qquad \textbf{45}$$

FIG. 11



▷ Sia $y = f(x)$ una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato $I \equiv [a; b]$, invertibile in I, con funzione inversa $x = f^{-1}(y)$, e sia Γ la curva che ne rappresenta il grafico.

Il solido generato dalla rotazione completa attorno all'asse y del trapezoide delimitato da Γ, dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ e dall'asse x, ha volume $\mathcal{V}_y$ dato da:

$$\mathcal{V}_y = \pi \int_{f(a)}^{f(b)} [f^{-1}(y)]^2\,\mathrm{d}y \ . \qquad \textbf{46}$$

Lunghezza di un arco di curva piana

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile, con funzione derivata prima $y' = f'(x)$ continua su un intervallo chiuso e limitato $I \equiv [a; b]$ e sia Γ la curva che ne rappresenta il grafico.

La lunghezza L della curva Γ delimitata dalle rette di equazioni $x = a$ e $x = b$ è data da:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \ . \qquad \textbf{47}$$

Area di una superficie di rotazione

Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile, con funzione derivata prima $y' = f'(x)$ continua su un intervallo chiuso e limitato $I \equiv [a; b]$ e sia Γ la curva che ne rappresenta il grafico. L'area $\mathcal{A}_{\text{s.l.}}$ della superficie laterale di rivoluzione, generata dalla rotazione completa attorno all'asse x della curva Γ, è data da:

$$\mathcal{A}_{\text{s.l.}} = 2\pi \int_a^b |f(x)| \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \ . \qquad \textbf{48}$$

2 Esercizi svolti

Altri problemi e quesiti sono presenti all'indirizzo www.loescher.it/librionline

Quesito 1

QUESITO 2
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

+ risorse online

Sia $f(x)$ reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$.

Calcolare $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{2xe^x}$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

Risoluzione

La funzione $f(x)$ è continua in $\mathbb{R}$, quindi ivi integrabile; per la **30** si ha $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Anche il denominatore tende a zero per $x \to 0$, quindi, passando al limite, si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$. La continuità in $\mathbb{R}$ della funzione $f(x)$ consente di applicare il teorema di Torricelli-Barrow **37**, in base al quale la derivata di $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ risulta uguale a $f(x)$. Inoltre, anche il denominatore è derivabile, con derivata prima $2e^x(1+x) \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, quindi è possibile risolvere la forma indeterminata attraverso il teorema di L'Hôpital ricavando:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{2xe^x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{2e^x(1+x)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Quesito 2

QUESITO 1
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Provare che una sfera è equivalente ai $\dfrac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

Risoluzione

Il testo del quesito non richiede un procedimento specifico e la modalità di risposta dipende dalle conoscenze del candidato. Si propone dapprima la verifica più rigorosa, anche se difficilmente nota alla maggioranza dei candidati, basata sul principio di Cavalieri, su un famoso teorema di Archimede e sulla successiva applicazione legata alla «scodella di Galileo».

Principio di Cavalieri: «Due solidi sono equivalenti se possono essere collocati rispetto a un piano in modo tale che, ogni altro piano, a esso parallelo, determini su di essi sezioni equivalenti».

Teorema di Archimede (*formulazione originale*): «Una sfera è quadrupla del cono avente la base uguale al circolo massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera; il cilindro avente base uguale al circolo massimo della sfera e altezza uguale al diametro della sfera è un volta e mezzo la sfera».

In base a quest'ultimo teorema, una sfera risulta equivalente al cilindro a essa circoscritto diminuito del cono in esso inscritto, come illustrato dalla **figura 1**.

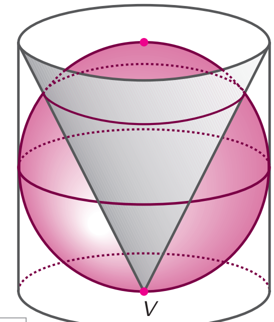


FIG. 1

Galileo prese in esame un emisfero, il cilindro a esso circoscritto e il cono inscritto, come riportato in **figura 2a**. Con tale scelta il teorema di Archimede viene riformulato come segue.

Teorema di Archimede (*formulazione dipendente dalle considerazioni di Galileo*): «Il cono è equivalente al cilindro diminuito dell'emisfero».

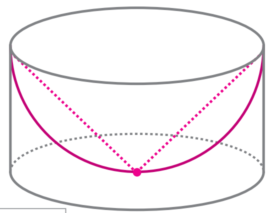


FIG. 2a

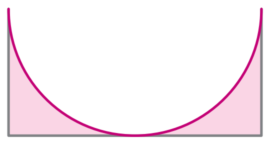


FIG. 2b

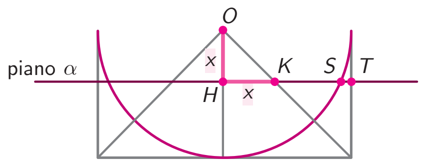


FIG. 2c

Il solido che si ottiene togliendo al cilindro l'emisfero inscritto assume la forma, denominata dallo stesso Galileo, di una «scodella», la cui sezione è rappresentata nella **figura 2b**.

Indicando con $\mathcal{V}_{\text{cono}}$, $\mathcal{V}_{\text{cilindro}}$, $\mathcal{V}_{\text{scodella}}$ i volumi, rispettivamente del cono, del cilindro e della scodella, occorre dimostrare che valgono le uguaglianze:

$$\mathcal{V}_{\text{cono}} = \mathcal{V}_{\text{cilindro}} - \mathcal{V}_{\text{emisfero}} = \mathcal{V}_{\text{scodella}}.$$

Facendo riferimento alla **figura 2c**, si consideri la sezione determinata da un piano α, parallelo alla base del cilindro, posto a distanza $\overline{OH} = x$, con $0 < x < r$, dal centro della sfera.

I tre solidi considerati risultano tagliati secondo sezioni circolari aventi raggi, rispettivamente: $\overline{HK} = x$ il cono, $\overline{HS}$ l'emisfero, $\overline{HT} = r$ il cilindro. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OHS, ed essendo $\overline{OS} = r$, si ha:

$$\overline{HS}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{OH}^2 = r^2 - x^2.$$

Sul piano α le superfici delle sezioni dei tre solidi sono:

$$\mathcal{S}_{\text{cilindro}} = \pi r^2, \quad \mathcal{S}_{\text{cono}} = \pi x^2, \quad \mathcal{S}_{\text{emisfero}} = \pi(r^2 - x^2);$$

pertanto si ricava: $\mathcal{S}_{\text{emisfero}} = \mathcal{S}_{\text{cilindro}} - \mathcal{S}_{\text{cono}}$.

Tale relazione vale $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $0 < x < r$ e, in base al principio di Cavalieri, implica la corrispondente relazione sui volumi, ovvero: $\mathcal{V}_{\text{emisfero}} = \mathcal{V}_{\text{cilindro}} - \mathcal{V}_{\text{cono}}$, che determina l'asserto. Raddoppiando le altezze dei rispettivi solidi si ottiene:

$$\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \mathcal{V}_{\text{cilindro}} - \mathcal{V}_{\text{cono}} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi r^3 = \frac{2}{3}\mathcal{V}_{\text{cilindro}}.$$

Si potrebbe anche rispondere al quesito osservando che i due volumi da confrontare si riferiscono a solidi ottenibili dalla rotazione di regioni finite di piano.

Precisamente, scelto un sistema di riferimento cartesiano ortogonale con l'origine coincidente con il centro della sfera di raggio r e l'asse x contenente un suo diametro, si ha che la sfera è interpretabile come solido ottenuto dalla rotazione completa, attorno all'asse x, del semicerchio delimitato dal grafico della funzione di equazione

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$, con $-r \le x \le r$.

Quindi, in base alla **45**, e tenendo presente la simmetria della regione rispetto all'asse y, risulta:

$$\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \mathcal{V}_{\text{S}} = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{4}{3} \pi r^3 .$$

Il cilindro circoscritto alla sfera è ottenibile dalla rotazione completa, attorno all'asse x, del rettangolo delimitato dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazioni $x = -r$, $x = r$, $y = r$.

Pertanto, in base alla **45** e tenendo nuovamente presente la simmetria della regione rispetto all'asse y, risulta:

$$\mathcal{V}_{\text{cilindro}} = \mathcal{V}_{\text{C}} = \pi \int_{-r}^{r} (r)^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{0}^{r} r^2 \, \mathrm{d}x = 2\pi [r^2 x]_0^r = 2\pi r^3 .$$

Pertanto si ottiene: $\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} 2\pi r^3 = \frac{2}{3} \mathcal{V}_{\text{cilindro}}$.

Un'altra alternativa di risposta, anche se un po' banale e troppo semplicistica, potrebbe essere quella di fare riferimento alle formule per il calcolo dei volumi dei solidi in oggetto, illustrati in **figura 3**. Precisamente, il volume $\mathcal{V}_{\text{sfera}}$ di una sfera $\mathcal{S}$ di noto raggio r è dato da $\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$, mentre il volume $\mathcal{V}_{\text{cilindro}}$ del cilindro $\mathcal{C}$, circoscritto alla sfera, di raggio di base corrispondente al raggio r della sfera e altezza h pari al diametro $2r$, è espresso dalla relazione $\mathcal{V}_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$.

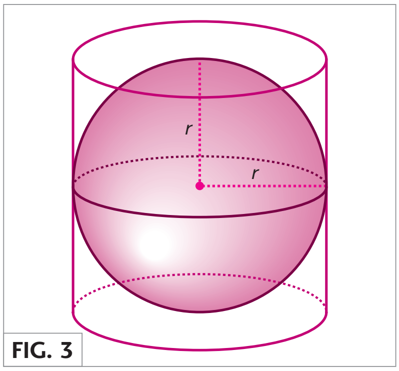


FIG. 3

Anche in tal caso si ha $\mathcal{V}_{\text{sfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} 2\pi r^3 = \frac{2}{3} \mathcal{V}_{\text{cilindro}}$.

Quesito 3

QUESITO 5
A.S. 2000/2001
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Calcolare l'integrale $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x$.

Risoluzione guidata

Ponendo $\ln x = t$ e differenziando entrambi i membri si ricava $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}t$. Effettuando la sostituzione nell'integrale assegnato si ha

$$\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \int t \, \mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + k,$$

per cui, tenendo presente che $\ln x = t$, l'integrale da risolvere risulta

$$\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + k.$$

Si osservi che tale integrale può essere facilmente risolto come integrale di una funzione la cui primitiva è una funzione composta, del tipo **12**:

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + k \;\; \forall n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \text{ con } f(x) = \ln x \text{ e } f'(x) = \frac{1}{x} \text{; infatti}$$

$$\int \frac{\ln x}{x} \, \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\ln^2 x}{2} + k.$$

QUESITO 7
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Quesito 4

Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t, \text{ con } x > 0.$$

Risoluzione

La funzione $f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t$, con $x > 0$, dipende dalla variabile reale x che compare agli estremi di integrazione. In base alla proprietà **33** inerente all'additività dell'integrazione definita, considerata una qualsiasi costante $h > 0$, l'integrale assegnato può essere riscritto nella forma

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t = \int_x^{h} \ln t \, \mathrm{d}t + \int_h^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Inoltre, tenendo presente la proprietà **31** in base alla quale, scambiando gli estremi di integrazione, l'integrale definito cambia segno, risulta

$$f(x) = -\int_h^{x} \ln t \, \mathrm{d}t + \int_h^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t.$$

Infine, applicando il teorema di Torricelli-Barrow **37** si ricava:

$$f'(x) = \mathrm{D}[f(x)] = \mathrm{D}\left[-\int_h^{x} \ln t \, \mathrm{d}t + \int_h^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t\right] = \mathrm{D}\left[-\int_h^{x} \ln t \, \mathrm{d}t\right] + \mathrm{D}\left[\int_h^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t\right] =$$

$$= -\ln x + \ln h + \ln(x+1) - \ln h = -\ln x + \ln(x+1) = \ln \frac{x+1}{x}.$$

Poiché l'integrale assegnato è facilmente risolubile in forma esplicita, è possibile rispondere al quesito proposto applicando il metodo di integrazione per parti al corrispondente integrale indefinito e, successivamente, calcolare l'integrale definito mediante la formula di Newton-Leibniz **38**.

La funzione integranda può essere interpretata come il prodotto di due fattori, ovvero $\ln t = 1 \cdot \ln t$, per cui $\int \ln t \, \mathrm{d}t = \int 1 \cdot \ln t \, \mathrm{d}t$. Si assume come fattore differenziale $1 \cdot \mathrm{d}t$ e come fattore finito $\ln t$. In base alla **24**, $\int f'(t) \cdot g(t) \, \mathrm{d}t = f(t) \cdot g(t) - \int f(t) \cdot g'(t) \, \mathrm{d}t$, si determinano la primitiva della funzione $f'(t)$ corrispondente al valore zero della costante additiva e la derivata della funzione $g(t)$, cioè:

$$f'(t) = 1; \quad f(t) = t; \quad g(t) = \ln t; \quad g'(t) = \frac{1}{t}$$

per cui si ha:

$$\int \ln t \, \mathrm{d}t = \int 1 \cdot \ln t \, \mathrm{d}t = t \ln t - \int \frac{t \, \mathrm{d}t}{t} = t \ln t - t + k.$$

Applicando a questo punto la formula di Newton-Leibniz si ottiene:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t \, \mathrm{d}t = [t \ln t - t]_x^{x+1} = (x+1)\ln(x+1) - x - 1 - x \ln x + x =$$

$$= (x+1)\ln(x+1) - 1 - x \ln x.$$

Calcolando la derivata prima si ricava

$$f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \ln x - 1 = \ln \frac{x+1}{x}.$$

QUESITO 10
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Quesito 5

La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = a$, $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = b$, dove a e b sono numeri reali.

Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta

$$\int_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 4.$$

Risoluzione guidata

Si tratta di valutare la possibilità di esprimere i due integrali $\int_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$ e $\int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 4$ in funzione di quelli assegnati, dipendenti dai parametri a e b.

Considerando l'integrale $\int_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 2$, occorre effettuare un cambio della variabile di integrazione, ponendo $2x = t$, ovvero $x = \frac{t}{2}$ da cui, differenziando entrambi i membri, si ricava $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$ Per quanto riguarda gli estremi di integrazione si ha che $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $x = 3 \Rightarrow t = 6$

Effettuando la sostituzione, l'integrale in esame viene riscritto nella forma

$$\int_0^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^6 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 2, \text{ da cui si ottiene}$$

$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2.$$

Poiché la variabile di integrazione t è muta, la condizione assegnata $\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x = b$ implica

$$b = \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 2, \text{ ovvero } b = 2\ln 2$$

Si procede in modo analogo per l'integrale $\int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \ln 4$, ponendo $2x = t$, ovvero $x = \frac{t}{2}$, da cui, differenziando entrambi i membri, si ricava $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$, mentre per gli estremi di integrazione si ha che $x = 1 \Rightarrow t = 2$ e $x = 3 \Rightarrow t = 6$. Effettuando la sostituzione, l'integrale in oggetto viene riscritto nella forma

$$\int_1^3 f(2x)\,\mathrm{d}x = \int_2^6 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 4, \text{ da cui si ricava}$$

$$\int_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 2\ln 4 = 4\ln 2$$

Applicando la proprietà di additività dell'integrale definito **33** si ottiene l'uguaglianza

$$\int_2^6 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

che, in base ai precedenti risultati e alle condizioni assegnate dal testo, diviene $4\ln 2 = b - a$
Poiché si è ottenuto $b = 2\ln 2$, la soluzione del sistema

$$\begin{cases} 4\ln 2 = b - a \\ b = 2\ln 2 \end{cases}$$

fornisce i valori dei parametri a e b che risolvono il quesito, ovvero

$$\begin{cases} a = 2\ln 2 - 4\ln 2 = -2\ln 2 \\ b = 2\ln 2 \end{cases}$$

Quesito 6

QUESITO 9
A.S. 2001/2002
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Trovare $f(4)$ sapendo che: $\int_0^x f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$.

Risoluzione guidata

L'integrale assegnato dal testo è una funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x\cos(\pi x)$.

In base al teorema di Torricelli-Barrow **37** risulta

$$F'(x) = \mathrm{D}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] = f(x)$$

per cui si ricava

$$F'(x) = \mathrm{D}[x\cos(\pi x)] = \cos(\pi x) - \pi x\,\mathrm{sen}(\pi x) = f(x).$$

Sostituendo al posto della variabile x il valore 4 si ha $f(4) = \cos(4\pi) - 4\pi\,\mathrm{sen}(4\pi) = 1$.

Quesito 7

QUESITO 6
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$.

Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

Risoluzione

La funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ può essere interpretata come una funzione composta di due funzioni, precisamente $z(x) = x^2$ e $g(z) = e^{-z}$ e riscritta come $f(z) = \int_0^z e^{-t^2}\,dt$. Applicando il teorema sulla derivata di una funzione composta, in base al quale $\mathrm{D}[f(z)] = f'(z)\cdot z'(x)$, e tenendo presente il teorema di Torricelli-Barrow **37** per cui la derivata della funzione integrale, $f'(z)$, coincide con la funzione integranda calcolata nell'estremo superiore di integrazione, si ricava $f'(z) = e^{-z^2}$. Sostituendo alla variabile z la sua espressione dipendente da x, ovvero $z(x) = x^2$, si ha

$$f'(x) = \mathrm{D}[f(x)] = \mathrm{D}\left[\int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt\right] = e^{-z^2}\cdot z'(x) = e^{-(x^2)^2}\cdot 2x = 2xe^{-x^4}.$$

Problema 1

PROBLEMA 2
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Sia $f(x) = a\,2^x + b\,2^{-x} + c$, con a, b e c numeri reali. Si determinino a, b e c in modo che:

1. la funzione f sia pari; **2.** $f(0) = 2$; **3.** $\int_0^1 f(x)\,dx = \dfrac{3}{2\log 2}$.

a. Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b e c i valori così determinati e se ne disegni il grafico $\mathcal{G}$.

b. Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca $\mathcal{G}$, mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

c. Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e $\mathcal{G}$.

d. Si calcoli $\int \dfrac{1}{g(x)}\,dx$.

e. Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di $\mathcal{G}$ rispetto alla retta r.

Risoluzione

Per determinare i valori dei parametri a, b e c occorre risolvere un sistema di tre equazioni e tre incognite, ottenute imponendo le condizioni assegnate dal testo. Si deduce che:

1. poiché una funzione f è pari se e solo se $f(-x) = f(x)\ \forall x$ nel suo campo di esistenza, essendo $f(-x) = a\,2^{-x} + b\,2^{x} + c\ \forall x \in \mathbb{R}$ si deve imporre la condizione $a2^{-x} + b2^{x} + c = a2^{x} + b2^{-x} + c$, da cui si ricava $a(2^{-x} - 2^{x}) - b(2^{-x} - 2^{x}) = 0 \Rightarrow (2^{-x} - 2^{x})(a - b) = 0 \Rightarrow (2^{-x} - 2^{x}) = 0 \vee (a - b) = 0 \Rightarrow 2^{-x} = 2^{x} \Leftrightarrow -x = x \Leftrightarrow x = 0 \vee a = b$.

   Poiché la condizione deve valere $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $a = b$;
2. la condizione $f(0) = 2$ implica $f(0) = a\,2^0 + b\,2^0 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$;
3. la condizione $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\log 2} = \frac{3}{2\ln 2}$ implica $\int_0^1 (a2^{-x} + b2^{x} + c)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow$

$\left[-a\,\frac{2^{-x}}{\ln 2} + b\,\frac{2^{x}}{\ln 2} + c\right]_0^1 = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow \left(-a\,\frac{2^{-1}}{\ln 2} + b\,\frac{2}{\ln 2} + c\right) - \left(-a\,\frac{1}{\ln 2} + b\,\frac{1}{\ln 2} + c\right) = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow$

$-a\,\frac{1}{2\ln 2} + b\,\frac{2}{\ln 2} + c + a\,\frac{1}{\ln 2} - b\,\frac{1}{\ln 2} - c = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow a\left(\frac{-1+2}{2\ln 2}\right) + b\left(\frac{2-1}{\ln 2}\right) = \frac{3}{2\ln 2} \Rightarrow$

$a + 2b = 3$.

Ponendo le condizioni ricavate a sistema, si ha:

$$\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \\ a + 2b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ c = 2 - 2a \\ 3a = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione della funzione g, così ottenuta, risulta essere $g(x) = 2^x + 2^{-x}$.

a. La funzione $g(x) = 2^x + 2^{-x}$ è definita e continua su tutto $\mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{D}_g = \left]-\infty; +\infty\right[$.

Una delle condizioni assegnate per la determinazione della funzione è la sua simmetria rispetto all'asse y, per cui $g(x)$ è pari. In base a tale simmetria, per determinare il comportamento della funzione agli estremi $-\infty$, $+\infty$ si possono unificare i due limiti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} (2^x + 2^{-x}) = +\infty.$$

La funzione non ammette asintoti verticali poiché è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$; essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} (2^x + 2^{-x}) = +\infty$$

non vi è asintoto orizzontale ma neppure asintoti obliqui, che, in caso di esistenza, per la simmetria della funzione, dovrebbero avere coefficienti angolari opposti. Infatti, valutando l'eventuale coefficiente angolare m e applicando il teorema di L'Hôpital, per risolvere la forma indeterminata ottenuta, ovvero

$$m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \frac{+\infty}{\mp\infty}, \text{ si ricava } m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{2^x \ln 2 - 2^{-x}\ln 2}{1} = \mp\infty.$$

La funzione, essendo somma di due esponenziali, è positiva in tutto il suo campo di esistenza, quindi non interseca l'asse delle ascisse e, come richiesto dal testo, passa per il punto $A(0; 2)$.

Valutando la derivata prima della funzione si ha

$g'(x) = 2^x \ln 2 - 2^{-x} \ln 2 = \ln 2(2^x - 2^{-x})$,

il cui dominio coincide con il dominio di $g(x)$, ovvero con $\mathbb{R}$, per cui non vi sono punti critici.

Per classificare gli eventuali punti stazionari si devono ricercare i valori che annullano la derivata prima e studiare il segno della derivata stessa:

$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln 2(2^x - 2^{-x}) = 0 \Rightarrow 2^x = 2^{-x} \Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

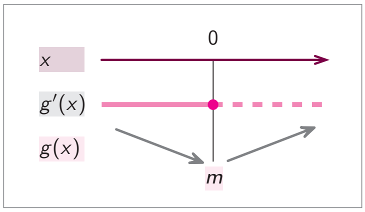
Quindi $x = 0$ è l'ascissa del punto stazionario coincidente con $A(0; 2)$.

$g'(x) > 0 \Rightarrow \ln 2(2^x - 2^{-x}) > 0 \Rightarrow 2^x - 2^{-x} > 0$ poiché $\ln 2 > 0, \Rightarrow 2^x > 2^{-x} \Rightarrow$ $x > -x \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0.$

Si deduce quindi che:

- $g'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$;
- se $x < 0$ $g'(x) < 0 \Rightarrow g(x)$ è monotòna decrescente;
- se $x > 0$ $g'(x) > 0 \Rightarrow g(x)$ è monotòna crescente,

per cui il punto $A(0; 2)$ è minimo relativo.



Derivando la funzione $g'(x) = \ln 2(2^x - 2^{-x})$ si ricava:

$g''(x) = \ln 2(2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2) \Rightarrow g''(x) = \ln^2 2(2^x + 2^{-x}),$

il cui dominio coincide ancora con $\mathbb{R}$.

Si osserva che $g''(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, per cui la funzione $g(x)$ presenta un grafico $\mathcal{G}$ con la concavità rivolta verso l'alto in tutto il suo dominio.

In base allo studio effettuato, tenendo presente che non vi sono punti critici e che

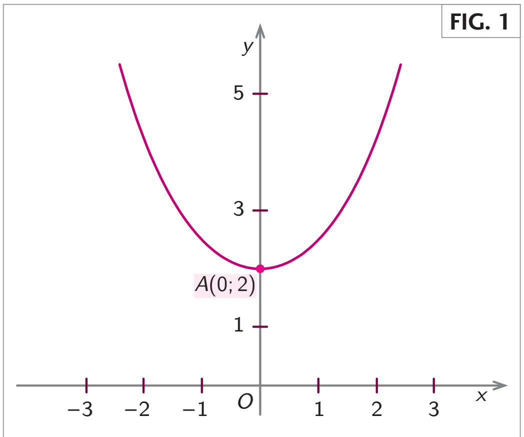
$\lim_{x \to \pm\infty} (2^x + 2^{-x}) = +\infty,$

il punto $A(0; 2)$ risulta essere un minimo assoluto. La funzione non ammette massimo assoluto, ma estremo superiore $\sup[f(x)] = +\infty$ essendo

$\lim_{x \to \pm\infty} 2^x + 2^{-x} = +\infty.$

La **figura 1** illustra il grafico $\mathcal{G}$ della funzione.

FIG. 1



b. La retta di equazione $y = 4$ interseca la curva grafico della funzione $g(x)$ nei punti soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases}$$

Applicando la sostituzione si ricava un'equazione esponenziale risolubile con la regola delle equazioni di secondo grado; infatti si ha

$$\begin{cases} 2^x + 2^{-x} = 4 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \\ y = 4 \end{cases}$$

da cui, estraendo in entrambi i membri della prima equazione il logaritmo in base 2, si ha

$$\begin{cases} x_{1;2} = \log_2(2 \pm \sqrt{3}) \\ y = 4 \end{cases}, \text{ o, in base } e, \begin{cases} x_{1;2} = \dfrac{\ln(2 \pm \sqrt{3})}{\ln 2} \approx \pm 1{,}899 \\ y = 4 \end{cases}$$

Pertanto le coordinate dei due punti P e Q di intersezione sono $P\left(\frac{\ln(2-\sqrt{3})}{\ln 2}; 4\right)$ e $Q\left(\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2}; 4\right)$.

La **figura 2** illustra la situazione.

Il testo richiede di determinare, approssimativamente, le ascisse dei punti di intersezione tra le retta di equazione $y = 4$ e il grafico $\mathcal{G}$, mediante un procedimento iterativo a scelta.

Si osservi che determinare tali intersezioni equivale a ricercare gli zeri della funzione differenza $h(x) = 4 - 2^x - 2^{-x}$.

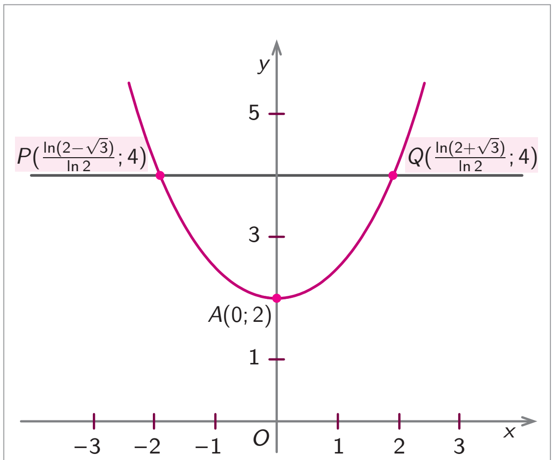


FIG. 2

Dalle precedenti valutazioni si sono ricavate le ascisse dei due punti di intersezione $x_{1;2} = \frac{\ln(2\pm\sqrt{3})}{\ln 2} \approx \pm 1{,}899$.

Tenendo conto della simmetria rispetto all'asse y, si può, ad esempio applicare il metodo di bisezione alla funzione $h(x) = 4 - 2^x - 2^{-x}$ nell'intervallo $[1; 2]$ ed estendere le considerazioni nell'intervallo simmetrico $[-2; -1]$, dopo aver verificato l'esistenza e l'unicità dello zero. A tal proposito si deduce facilmente che sono verificate le ipotesi del teorema di esistenza e unicità dello zero di una funzione in un dato intervallo; infatti:

- la funzione $h(x) = 4 - 2^x - 2^{-x}$ è continua nell'intervallo $[1; 2]$ poiché continua su tutto $\mathbb{R}$,
- $h(1) = 4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > 0 \wedge h(2) = 4 - 4 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow h(1) \cdot h(2) < 0$;
- $h'(x) = -2^x \ln 2 + 2^{-x} \ln 2 = \ln 2(-2^x + 2^{-x})$ e $h'(x) < 0\ \forall x \in [1; 2]$; poiché $\ln 2(-2^x + 2^{-x}) > 0 \Rightarrow 2^{-x} > 2^x \Rightarrow -x > x \Rightarrow x < 0$, quindi $\exists!\, \alpha \in]1; 2[$ tale che $h(\alpha) = 0$.

Volendo applicare il metodo di bisezione, posto $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$ si calcolano $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$ e $f(x_0)$:

- se $f(x_0) = 0$, $\alpha = x_0$ è lo zero cercato;
- se $f(x_0)$ e $f(a_0)$ sono concordi, cioè $f(a_0) \cdot f(x_0) > 0$, si pone $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$;
- se $f(x_0)$ e $f(a_0)$ sono discordi, cioè $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$, si pone $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$.

Si ripete il procedimento applicandolo all'intervallo $[a_1; b_1]$, $[a_2; b_2]$ e così via sino a ottenere una differenza $|b_n - a_n|$ minore dell'errore richiesto o scelto.

Applicando tale metodo, con un errore inferiore a un decimo, considerando quattro cifre decimali, si ha:

n	a_n	b_n	$h(a_n)$	$h(b_n)$	x_n	$h(x_n)$	$\lvert b_n - a_n \rvert$
0	1	2	1,5	−0,25	1,5	0,8180	1
1	1,5	2	0,8180	−0,25	1,75	0,3391	0,5
2	1,75	2	0,3391	−0,25	1,875	0,0594	0,25
3	1,875	2	0,0594	−0,25	1,9375	−0,09148	0,125
4	1,875	1,9375	0,0594	−0,09148	1,9063	−0,01524	0,0625

per cui $\alpha \approx 1{,}9063$.

Si allega anche la tabella eseguita con Excel, con un grado di approssimazione $a = 0{,}001$.

n	x_0	x_1	x_i	$x_1 - x_0$	$x_1 - x_0 < \varepsilon$	$h(x_0)$	$h(x_1)$	$h(x_i)$
0	1,000000	2,000000	1,500000	1,000000	1,000000	1,500000	−0,250000	0,818019
1	1,500000	2,000000	1,750000	0,500000	0,500000	0,818019	−0,250000	0,339113
2	1,750000	2,000000	1,875000	0,250000	0,250000	0,339113	−0,250000	0,059357
3	1,875000	2,000000	1,937500	0,125000	0,125000	0,059357	−0,250000	−0,091482
4	1,875000	1,937500	1,906250	0,062500	0,062500	0,059357	−0,091482	−0,015120
5	1,875000	1,906250	1,890625	0,031250	0,031250	0,059357	−0,015120	0,022352
6	1,890625	1,906250	1,898438	0,015625	0,015625	0,022352	−0,015120	0,003674
7	1,898438	1,906250	1,902344	0,007813	0,007813	0,003674	−0,015120	−0,005708
8	1,898438	1,902344	1,900391	0,003906	0,003906	0,003674	−0,005708	−0,001013
9	1,898438	1,900391	1,899414	0,001953	0,001953	0,003674	−0,001013	0,001331
10	1,899414	1,900391	1,899902	0,000977		0,001331	−0,001013	0,000159

c. La regione finita di piano PAQ, compresa tra il grafico della retta di equazione $y = 4$ e quello della funzione $g(x)$, evidenziata in colore nella **figura 3**, risulta simmetrica rispetto all'asse delle y.

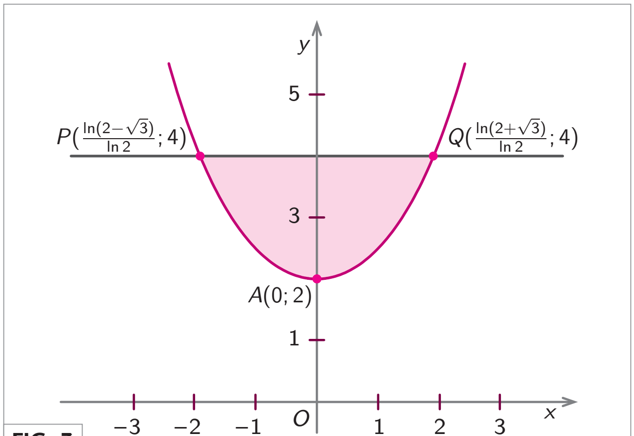


FIG. 3

Pertanto la sua area Ω, in base alla **43** e ricordato che

$\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2} = \log_2(2+\sqrt{3})$,

risulta:

$$\Omega = 2\int_0^{\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2}} (4 - 2^x - 2^{-x})\,\mathrm{d}x = 2\left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_0^{\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2}} =$$

$$= 2\left[4\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2} - \frac{(2+\sqrt{3})}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2\,(2+\sqrt{3})} - \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}\right] =$$

$$= 2\left[4\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{\ln 2} - \frac{(2+\sqrt{3})}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2\,(2+\sqrt{3})}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left[4\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{-(2+\sqrt{3})^2+1}{(2+\sqrt{3})}\right] = \frac{2}{\ln 2}\left[4\ln(2+\sqrt{3}) + \frac{-(4+3+4\sqrt{3})+1}{(2+\sqrt{3})}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}\left[4\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{6+4\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})}\right] = \frac{2}{\ln 2}\left[4\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{(2+\sqrt{3})}\right] =$$

$$= \frac{2}{\ln 2}[4\ln(2+\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}] = \frac{4}{\ln 2}[2\ln(2+\sqrt{3}) - \sqrt{3}].$$

d. Per calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{2^x + 2^{-x}}$$

conviene scrivere la funzione integranda nella forma $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{2^x}{2^{2x}+1}$

e applicare il metodo di sostituzione 23, ponendo $2^x = t$. Differenziando entrambi i membri si ricava $2^x \cdot \ln 2\, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, ovvero

$$2^x\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\ln 2}.$$

Pertanto si ottiene:

$$\int \frac{1}{g(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{2^x\, \mathrm{d}x}{2^{2x}+1} = \frac{1}{\ln 2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arc\,tg} t + k = \frac{1}{\ln 2} \operatorname{arc\,tg} 2^x + k\,.$$

e. Il testo richiede di determinare l'espressione della funzione g', simmetrica della $g(x)$ rispetto alla retta di equazione $y = 4$ (da non confondere con la derivata prima della funzione $g(x)$).

Le equazioni della simmetria assiale rispetto alla retta di equazione $y = 4$ si ottengono da

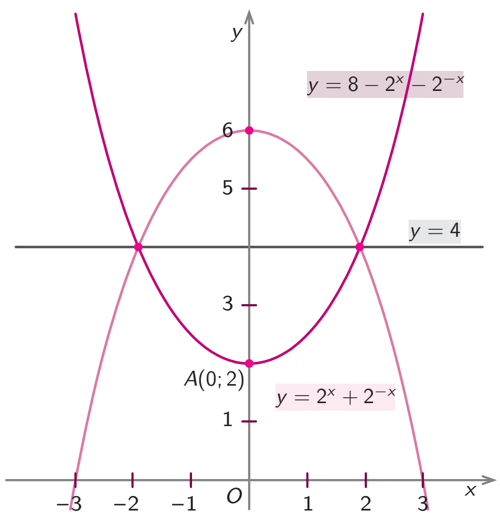
$$\sigma\colon \begin{cases} x' = x \\ \frac{y'+y}{2} = 4 \end{cases}$$

da cui si ricavano le equazioni della trasformazione inversa

$$\sigma^{-1}\colon \begin{cases} x = x' \\ y = 8 - y' \end{cases}$$

Applicando σ^{-1} alla funzione $y = 2^x + 2^{-x}$ si ha $8 - y' = 2^x + 2^{-x}$; esplicitando y' e togliendo gli apici, si ricava l'equazione della funzione g', ovvero $y = 8 - 2^x - 2^{-x}$, rappresentata in **figura 4**.

FIG. 4



Quesito 8

QUESITO 7
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Verificare l'uguaglianza

$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

Risoluzione guidata

La verifica dell'uguaglianza $\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ si effettua facilmente, tenendo presente l'integrale immediato 11, $\int \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,tg} x + k$, per cui, applicando la formula di Newton-Leibniz per il calcolo dell'integrale definito 38, si ottiene

$$4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x = 4[\operatorname{arc\,tg} x]_0^1 = 4(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi\,.$$

Successivamente, il testo richiede di calcolare un'approssimazione di π, applicando un metodo di integrazione numerica.

Poiché la funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$ è positiva $\forall x \in \mathbb{R}$, e quindi, sicuramente, nell'intervallo $[0;1]$, l'integrale definito $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ corrisponde, geometricamente, all'area della regione finita di piano evidenziata nella **figura 1**, compresa tra la curva grafico della funzione $y = \frac{1}{1+x^2}$ e l'asse x, nell'intervallo $[0;1]$.

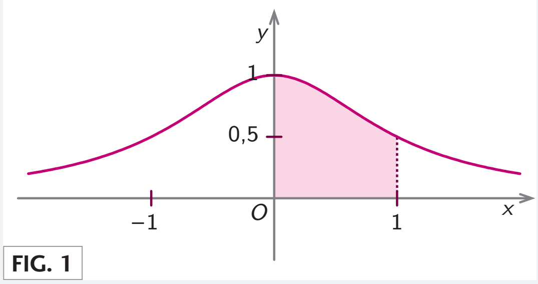


FIG. 1

Scegliendo di applicare il metodo dei trapezi, si suddivide la regione considerata in n trapezi di uguale altezza, il cui lato obliquo meglio approssima l'andamento della curva rispetto, ad esempio, al metodo dei rettangoli. Si calcolano le loro n aree e si sommano, ottenendo un'approssimazione dell'integrale migliore di quelle ottenute con i rettangoli inscritti e circoscritti.

Si riporta la tabella ottenuta con Excel, in cui sono presenti tre celle per l'inserimento dei parametri relativi agli estremi di integrazione e al numero n di suddivisioni dell'intervallo $[0;1]$, ovvero al numero di trapezi. Il generico trapezio ha estremi di coordinate $A(x_{k-1};0)$, $B(x_k;0)$, $C(x_k;f(x_k))$, $D(x_{k-1};f(x_{k-1}))$ e area

$$\mathcal{S}_K = \frac{f(x_k)+f(x_{k-1})}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

L'integrale definito da valutare risulta quindi approssimato dalla somma delle aree dei trapezi considerati, ovvero $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \mathcal{S} = \sum_k \mathcal{S}_k$. Nel caso in esame, valutando $n = 20$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx \mathcal{S} = 0{,}78529\ ,$$

per cui, avendo verificato l'uguaglianza $\pi = 4\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, si ricava il valore approssimato $\pi \approx 4\cdot 0{,}78529 \Rightarrow \pi \approx 3{,}14116$. Aumentando il numero n di suddivisioni il grado di approssimazione migliora.

La tabella ottenuta con Excel e il grafico relativo risultano i seguenti.

k	x_k	$f(x_k)$	$\mathcal{S}_k$
0	0,00000	1,00000	
1	0,50000	0,99751	0,04994
2	0,10000	0,99010	0,04969
3	0,15000	0,97800	0,04920
4	0,20000	0,96154	0,04849
5	0,25000	0,94118	0,04757
6	0,30000	0,91743	0,04647
7	0,35000	0,89087	0,04521
8	0,40000	0,86207	0,04382
9	0,45000	0,83160	0,04234
10	0,50000	0,80000	0,04079
11	0,55000	0,76775	0,03919
12	0,60000	0,73529	0,03758
13	0,65000	0,70299	0,03596
14	0,70000	0,67114	0,03435
15	0,75000	0,64000	0,03278
16	0,80000	0,60976	0,03124
17	0,85000	0,58055	0,02976
18	0,90000	0,55249	0,02833
19	0,95000	0,52562	0,02695
20	1,00000	0,50000	0,02564
		$\mathcal{S}$	0,78529

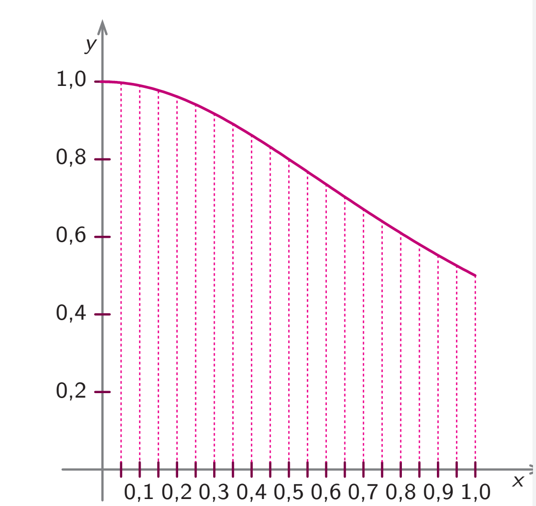


FIG. 2

QUESITO 8
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Quesito 9

Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 \, dx$.

Risoluzione guidata

Occorre ricordare la formula

$$\mathcal{V}_x = \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2 \, dx$$

che consente di calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse x, della regione finita di piano delimitata dalla curva grafico della funzione $f(x)$ e dalle rette, parallele all'asse y, di equazioni $x = x_1$ e $x = x_2$. Ne segue che l'integrale assegnato può essere riscritto nella forma

$$\int_0^1 \pi x^3 \, dx = \pi \int_0^1 (\sqrt{x^3})^2 \, dx,$$

da cui si ricava l'espressione della funzione $f(x) = \sqrt{x^3}$.

Quindi il volume indicato dal testo del quesito può essere interpretato come il volume del solido generato dalla rotazione completa, attorno all'asse x, della regione finita di piano, illustrata nella **figura 1**, delimitata dalla curva grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x^3}$ e dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = 1$.

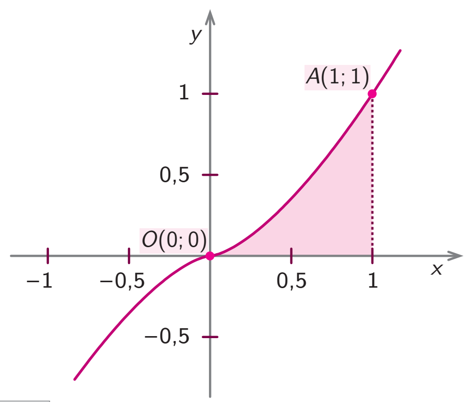


FIG. 1

QUESITO 9
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico
P.N.I.

Quesito 10

Di una funzione $f(x)$ si sa che la derivata seconda è uguale a $\operatorname{sen} x$ e che $f'(0) = 1$.
Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?

Risoluzione

Dall'informazione $f''(x) = \operatorname{sen} x$, applicando l'integrazione indefinita, si ricava la famiglia di funzioni primitive

$$f'(x) = \int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + k_1, \; k_1 \in \mathbb{R}.$$

La costante di integrazione k_1 si determina imponendo la seconda condizione assegnata $f'(0) = 1$, deducendo che

$$f'(0) = 1 \Rightarrow -\cos 0 + k_1 = 1 \Rightarrow -1 + k_1 = 1 \Rightarrow k_1 = 2.$$

Risulta quindi $f'(x) = -\cos x + 2$. Integrando nuovamente si ottiene la famiglia di funzioni primitive

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int (-\cos x + 2)\,\mathrm{d}x = -\operatorname{sen} x + 2x + k_2 .$$

Si osservi che le due informazioni assegnate dal quesito sono insufficienti per calcolare la costante k_2 e quindi per determinare un'unica funzione $f(x)$, ma è possibile calcolare la variazione di $f(x)$ tra i due valori dati $\frac{\pi}{2}$ e 0, mediante la loro rispettiva sostituzione, nell'espressione dell'integrale indefinito $f(x) = -\operatorname{sen} x + 2x + k_2$, ricavando

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{2} + k_2 - (-\operatorname{sen} 0 + 2\cdot 0 + k_2) = -1 + \pi = \pi - 1 .$$

Al medesimo risultato si perviene ricordando che, per il teorema di Torricelli-Barrow **37**, risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0), \text{ da cui } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x + 2)\,\mathrm{d}x = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \Rightarrow$$

$$[-\operatorname{sen} x + 2x]_0^{\frac{\pi}{2}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \Rightarrow$$

$$-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + 2\cdot\frac{\pi}{2} - (-\operatorname{sen} 0 + 2\cdot 0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) \Rightarrow -1 + \pi = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0).$$

Quesito 11

QUESITO 8
A.S. 2002/2003
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Di una funzione $f(x)$ si sa che la derivata seconda è uguale a 2^x e si sa ancora che $f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$. Qual è $f(x)$?

Risoluzione guidata

Il quesito è analogo al precedente, ma contiene un'informazione aggiuntiva, per cui è possibile determinare un'unica funzione $f(x)$ soddisfacente le condizioni assegnate.

Dall'informazione $f''(x) = 2^x$, applicando l'integrazione indefinita, si ricava la famiglia di funzioni primitive

$$f'(x) = \int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{R}.$$

La costante di integrazione k_1 si determina imponendo la condizione $f'(0) = 0$, osservando che $f'(0) = 0 \Rightarrow \frac{2^0}{\ln 2} + k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{\ln 2}$.

Risulta quindi $f'(x) = \dfrac{2^x}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 2}$.

Integrando nuovamente si ottiene la famiglia di funzioni primitive

$$f(x) = \int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\right)\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln 2}x + k_2 .$$

La costante di integrazione k_2 si determina imponendo la condizione $f(0) = \left(\frac{1}{\log 2}\right)^2$, ove $\log 2$ equivale a $\ln 2$, come specificato in calce nel tema d'esame. Si ha

$$f(0) = \frac{1}{\ln^2 2} \Rightarrow \frac{2^0}{\ln^2 2} - \frac{1}{\ln 2}\cdot 0 + k_2 = \frac{1}{\ln^2 2} \Rightarrow \frac{1}{\ln^2 2} + k_2 = \frac{1}{\ln^2 2} \Rightarrow k_2 = 0$$

Quindi $f(x) = \dfrac{2^x}{\ln^2 2} - \dfrac{1}{\ln 2}x$.

QUESITO 9
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Quesito 12

Calcolate: $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x \, dx$.

Risoluzione guidata

Conviene prima calcolare il corrispondente integrale indefinito con il metodo di integrazione per parti e, successivamente, applicare la formula di Newton-Leibniz **38**, in base alla quale $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, con $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$.
La funzione integranda può essere interpretata come il prodotto di due fattori, ovvero

$$\operatorname{arc\,sen} x = 1 \cdot \operatorname{arc\,sen} x \quad \text{per cui} \quad \int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,sen} x \, dx.$$

Si assume come fattore differenziale $1 \cdot dx$ e come fattore finito $\operatorname{arc\,sen} x$ Ricordata la regola **24**, $\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$, si determina la primitiva della funzione $f'(x)$ corrispondente al valore zero della costante additiva, e la derivata della funzione $g(x)$, cioè:

$$f'(x) = 1, \quad f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{arc\,sen} x, \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

per cui si ha:

$$\int \operatorname{arc\,sen} x\,dx = \int 1 \cdot \operatorname{arc\,sen} x \, dx = x \operatorname{arc\,sen} x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2} + k.$$

Applicando la formula di Newton-Leibniz per il calcolo dell'integrale definito con estremi 0 e 1, si ottiene:

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,sen} x\,dx = [x \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}\,]_0^1 = \operatorname{arc\,sen} 1 + \sqrt{1-1} - (0 + \sqrt{1-0}) =$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

QUESITO 8
A.S. 2003/2004
Esame di Stato, s.s.
Liceo Scientifico

Quesito 13

Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$. È allora possibile calcolare:

a. $\displaystyle\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; **b.** $\displaystyle\int_0^3 f(3x)\,dx$; **c.** $\displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; **d.** $\displaystyle\int_0^1 f(3x)\,dx$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

Risoluzione

Si tratta di valutare la possibilità di esprimere gli integrali presenti nelle quattro alternative e in funzione di $\int_0^3 f(x)\,dx$, di cui, per ipotesi, si conosce il valore. Considerando l'integrale $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$ dell'alternativa **a**, occorre effettuare un cambio della variabile di integrazione, ponendo $\frac{x}{3} = t$, ovvero $x = 3t$, da cui, differenziando entrambi i membri, si ricava $dx = 3\,dt$. Per quanto riguarda gli estremi di integrazione si ha che $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $x = 3 \Rightarrow t = 1$.

Tramite la sostituzione, l'integrale in esame è riscritto nella forma:
$$\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)3\,\mathrm{d}t = 3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
La variabile di integrazione è muta, per cui non influisce sul calcolo dell'integrale, che non risulta determinabile, in quanto l'informazione assegnata dal testo non consente di stabilirne il valore. Considerando l'integrale $\int_0^3 (3x)\,\mathrm{d}x$ dell'alternativa **b**, occorre effettuare un cambio della variabile di integrazione, ponendo $3x = t$, ovvero $x = \frac{t}{3}$, da cui, differenziando entrambi i membri, si ricava $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3}$. Per quanto riguarda gli estremi di integrazione si ha che $x = 0 \Rightarrow t = 0$ e $x = 3 \Rightarrow t = 9$.

Tramite la sostituzione, l'integrale in esame è riscritto nella forma:
$$\int_0^3 f(3x)\,\mathrm{d}x = \int_0^9 f(t)\frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{3}\int_0^9 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Anche in tal caso l'integrale non risulta determinabile, in quanto l'informazione assegnata dal testo non consente di stabilirne il valore. Si lascia al candidato, per esercizio, la verifica che la risposta corretta è la **d**.

Problema 2

PROBLEMA 1
A.S. 2004/2005
Esame di Stato, s.o.
Liceo Scientifico

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale monometrico, si consideri la regione $\mathcal{R}$, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$. Si studi e si disegni λ.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di $\mathcal{R}$.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $\mathcal{A}_t$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $\mathcal{A}_1$.
5. Si determini il valore di t per il quale $\mathcal{A}_t$ è minima.

Risoluzione

La parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$, rappresentata nella **figura 1**, ha l'asse verticale coincidente con l'asse delle ordinate, ha la concavità rivolta verso il basso (essendo il coefficiente del termine di secondo grado negativo), vertice nel punto $V(0;6)$ e interseca l'asse x nei punti soluzioni del sistema
$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_{1;2} = \pm\sqrt{6} \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{cioè } P(-\sqrt{6};0) \text{ e } Q(\sqrt{6};0).$$

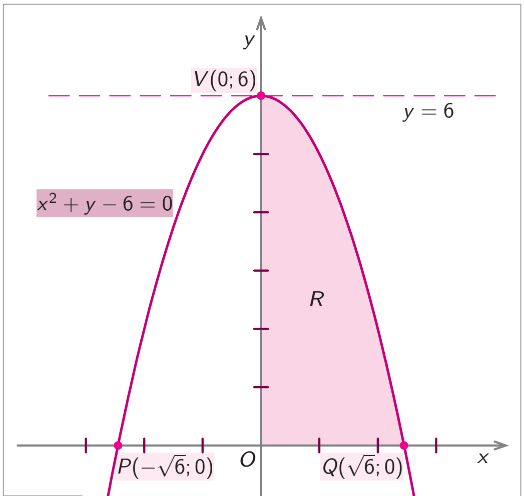


FIG. 1

1. La regione finita di piano $\mathcal{R}$, delimitata dalla parabola, dall'asse delle ordinate e dall'asse delle ascisse nel I quadrante è sottoposta ai vincoli geometrici $0 \leq x \leq \sqrt{6} \wedge 0 \leq y \leq 6$.

Per calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno all'asse y, occorre determinare la funzione inversa di $y = 6 - x^2$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \sqrt{6}$, ovvero, ricavando la variabile x da $y = 6 - x^2$ si ha $x^2 = 6 - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{6-y}$ e, per i vincoli, si deve valutare $x = \sqrt{6-y}$ con $0 \leq y \leq 6$. Quindi, ricordata la **46**, il volume $\mathcal{V}_1$ richiesto è dato da

$$\mathcal{V}_1 = \pi \int_{y_1}^{y_2} [f(y)]^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^6 [\sqrt{6-y}]^2\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^6 (6-y)\,\mathrm{d}y = \pi \left[6y - \frac{y^2}{2}\right]_0^6 =$$

$$= \pi(36 - 18) = 18\pi.$$

2. Per calcolare il volume del solido generato dalla rotazione completa di $\mathcal{R}$ attorno alla retta $y = 6$ occorre considerare la traslazione τ individuata dal vettore $\vec{v}(0; -6)$ di equazioni

$$\tau\colon \begin{cases} x' = x \\ y' = y - 6 \end{cases}$$

e applicare alla funzione $y = 6 - x^2$ la traslazione inversa di equazioni

$$\tau^{-1}\colon \begin{cases} x = x' \\ y = y' + 6 \end{cases},$$

ottenendo $y' + 6 = 6 - (x')^2$, da cui, togliendo gli apici, si ha $y = -x^2$.

Il volume $\mathcal{V}_2$ del solido di rotazione richiesto si ottiene come differenza tra il volume $\mathcal{V}_\mathcal{C}$ del cilindro con raggio di base di lunghezza 6 e altezza pari a $\sqrt{6}$, cioè $\mathcal{V}_\mathcal{C} = 36\sqrt{6}\pi$, e il volume del solido generato dalla rotazione attorno alla retta r di equazione $y = 6$, della regione piana di contorno mistilineo VQQ', con Q' proiezione di Q sulla retta r, come illustrato dalla **figura 2**, ovvero:

$$\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_\mathcal{C} - \pi \int_{x_1}^{x_2} [f(x)]^2\,\mathrm{d}x = 36\sqrt{6}\pi - \pi \int_{0_1}^{\sqrt{6}} [-x^2]^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= 36\sqrt{6}\pi - \pi \int_{0_1}^{\sqrt{6}} x^4\,\mathrm{d}x = 36\sqrt{6}\pi - \pi \left[\tfrac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt{6}} =$$

$$= 36\sqrt{6}\pi - \tfrac{36\sqrt{6}\pi}{5} = \tfrac{144\sqrt{6}\pi}{5}.$$

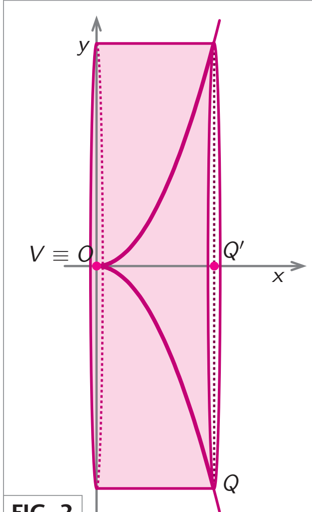


FIG. 2

3. La generica retta parallela all'asse x, avente equazione $y = k$, interseca la parabola in due punti, denominati in **figura 3** S e T, purché risulti $0 < k < 6$. Le coordinate parametriche di tali punti sono le soluzioni del sistema formato dall'equazione della parabola e dall'equazione della generica retta, ovvero

$$\begin{cases} y = 6 - x^2 \\ y = k \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x^2 - 6 + k = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1;2} = \pm\sqrt{6-k} \\ y = k \end{cases}$$

con $0 < k < 6$, da cui $S(-\sqrt{6-k}; k)$ e $T(\sqrt{6-k}; k)$.

Per determinare il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area della regione $\mathcal{R}$ si possono applicare due diversi procedimenti.

Si può utilizzare la regola di Archimede, secondo la quale l'area del settore parabolico PQV è uguale ai due terzi dell'area del rettangolo circoscritto al medesimo settore parabolico, di base $\overline{PQ} = 2\sqrt{6}$ e altezza corrispondente all'ordinata del vertice V; quindi

$\text{area}(PQV) = \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 6 = 8\sqrt{6}.$

Il settore parabolico STV ha base $\overline{ST} = 2\sqrt{6-k}$ e altezza $h = 6 - k$ e risulta inscritto nel rettangolo di area $2\sqrt{6-k}(6-k)$.

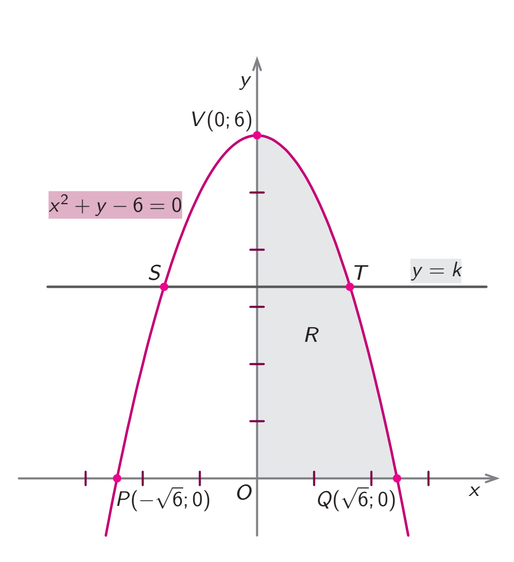


FIG. 3

Applicando nuovamente la regola di Archimede si ha

$\text{area}(STV) = \dfrac{2}{3} \cdot 2\sqrt{6-k}(6-k) = \dfrac{4}{3}\sqrt{6-k}(6-k).$

L'area della regione $\mathcal{R}$, per la simmetria della parabola rispetto all'asse y, corrisponde a metà dell'area del settore parabolico PQV, per cui, per risolvere il problema proposto, occorre imporre

$$\frac{1}{2}\,\text{area}(STV) = \frac{1}{4}\,\text{area}(PQV) \;\Rightarrow\; \text{area}(STV) = \frac{1}{2}\,\text{area}(PQV) \Rightarrow$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{6-k}(6-k) = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{6} \wedge 0 < k < 6 \Rightarrow \sqrt{6-k}(6-k) = 3\sqrt{6} \wedge 0 < k < 6 \Rightarrow$$

$$(6-k)^3 = 54 \wedge 0 < k < 6 \Rightarrow 6 - k = \sqrt[3]{54} \Rightarrow k = 6 - 3\sqrt[3]{2}.$$

Applicando invece il calcolo integrale occorre imporre

$$\int_0^{\sqrt{6}} (6 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\sqrt{6-k}} (6 - x^2 - k)\,\mathrm{d}x, \text{ cioè } \left[6x - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{6}} = 2\left[6x - \tfrac{x^3}{3} - kx\right]_0^{\sqrt{6-k}},$$

ossia

$$6\sqrt{6} - 2\sqrt{6} = 2\left(6\sqrt{6-k} - \frac{\sqrt{6-k}(6-k)}{3} - k\sqrt{6-k}\right),$$

da cui si ricava

$$4\sqrt{6} = 2\left(\sqrt{6-k}(6-k) - \frac{\sqrt{6-k}(6-k)}{3}\right) \Rightarrow 4\sqrt{6} = 4\left(\frac{\sqrt{6-k}(6-k)}{3}\right) \Rightarrow$$

$$3\sqrt{6} = \sqrt{6-k}(6-k) \Rightarrow \sqrt[3]{54} = 6 - k \Rightarrow k = 6 - 3\sqrt[3]{2}.$$

4. Un generico punto W, di ascissa t, appartenente alla parabola λ di equazione $y = 6 - x^2$, ha coordinate $W(t; 6 - t^2)$. L'equazione della retta s, tangente alla parabola nel punto W, si ricava da $y - y_W = y'(x_W) \cdot (x - x_W)$, con $y'(x) = -2x$ e $y'(x_W) = -2t$, ottenendo $y - 6 + t^2 = -2t \cdot (x - t) \Rightarrow y = -2tx + 6 + t^2$.

Poiché deve essere soddisfatta la condizione assegnata dal testo $0 < t < \sqrt{6}$, il punto $W(t; 6 - t^2)$ appartiene al primo quadrante e la retta s interseca gli assi cartesiani nei punti

$A\left(\dfrac{t^2+6}{2t}; 0\right)$ e $B(0; t^2+6)$.

Il triangolo OAB, evidenziato nella **figura 4**, delimitato dagli assi e dalla tangente s ha area

$$\mathcal{A}_t = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+6}{2t}\right)(t^2+6) =$$
$$= \frac{(t^2+6)^2}{4t}.$$

In particolare, se $t = 1$ risulta $\mathcal{A}_1 = \dfrac{49}{4}$.

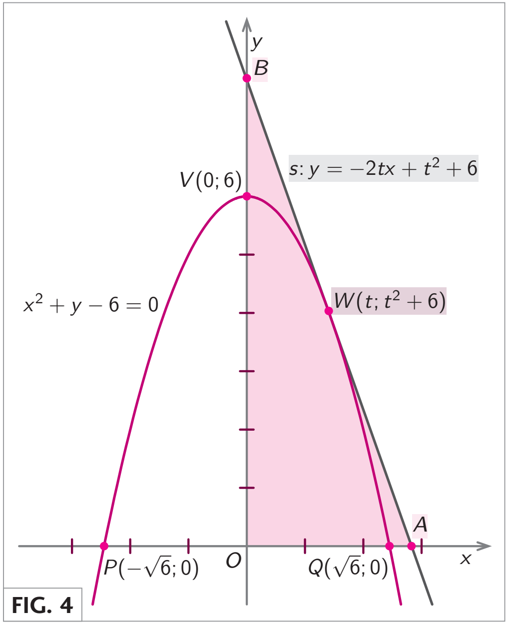


FIG. 4

5. Per determinare il valore di t, con $0 < t < \sqrt{6}$, che rende minima l'area

$$\mathcal{A}_t = \frac{(t^2+6)^2}{4t},$$

si valuta la funzione derivata prima

$$\mathcal{A}_t' = \frac{16t^2(t^2+6) - 4(t^2+6)^2}{16t^2} = \frac{4(t^2+6)(4t^2 - (t^2+6))}{16t^2} =$$
$$= \frac{3(t^2+6)(t^2-2)}{4t^2}.$$

Risulta

$$\mathcal{A}_t' = \frac{3(t^2+6)(t^2-2)}{4t^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t_{1;2} = \pm\sqrt{2}, \text{ essendo } t^2+6 \neq 0,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'unico valore accettabile è $t_2 = \sqrt{2}$.

Dallo studio del segno della funzione derivata prima si ricava:

$$\mathcal{A}_t' = \frac{3(t^2+6)(t^2-2)}{4t^2} > 0 \Rightarrow t^2 - 2 > 0 \Rightarrow t < -\sqrt{2} \vee t > \sqrt{2},$$

ovvero $\sqrt{2} < t < \sqrt{6}$, per i vincoli assegnati, per cui il punto stazionario di ascissa $t = \sqrt{2}$ è un minimo relativo. Sostituendo $t = \sqrt{2}$ nell'espressione della funzione $\mathcal{A}_t = \frac{(t^2+6)^2}{4t}$ si ha

$$\mathcal{A}_{\sqrt{2}} = \frac{(2+6)^2}{4\sqrt{2}} = \frac{64}{4\sqrt{2}} = 8\sqrt{2},$$

che rappresenta il valore minimo assunto dall'area del triangolo.