

LA TEORIA DELLE MATRICI

Il concetto di *matrice* (dal latino *matrix* o *mater*) fu introdotto da James Joseph Sylvester (1814-97) in “An essay on canonical forms” (Londra, 1851) per indicare una disposizione rettangolare di numeri alla quale si potessero, nel caso quadrato, associare quantità numeriche dette *determinanti*. A parte alcuni prodromi risalenti a vari autori, quali Gabriel Cramer (1750, Genova), Pierre Simon Laplace e Alexandre Théophile Vandermonde (1770), Etienne Bezout (1779), la teoria dei determinanti è nata in una *Memoria* di Cauchy del 1812 ed in un contemporaneo lavoro, meno perfetto, di Jacques Binet (1786-1856). Augustin Louis Cauchy (1789-1857, ingegnere militare e Professore all’Ecole Polytechnique di Parigi) riprende il termine di determinante da Carl Friedrich Gauss (che non diede effettivamente contributi alla teoria), sviluppandone di fatto l’intera teoria. La notazione a due indici attuale è dovuta al matematico tedesco Leopold Kronecker (1823-1891) mentre la nozione di *rango* (o *caratteristica*) di una matrice è merito del tedesco Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917). A partire dal 1858, in una serie di lavori, Arthur Cayley (1821-1895), matematico ed avvocato inglese, professore di Algebra a Cambridge ed autore di più di mille *Memorie*, ha iniziato ad operare con le matrici definendo per esse le operazioni di addizione e moltiplicazione, costruendo, in tal modo, le basi del moderno calcolo matriciale. La teoria delle matrici, dunque, sviluppata in stretta connessione con la teoria dei vettori, ha trovato notevoli applicazioni in molte branche, sia della Matematica che della Fisica.

1. Generalità

Siano dati $m \times n$ numeri reali a_{ij} (non necessariamente tutti nulli).

Definizione 1.1.

Si definisce *matrice* ad m righe ed n colonne o brevemente *matrice di ordine $m \times n$* , e la si indica, per comodità, con una lettera maiuscola dell’alfabeto, una m -upla ordinata di n -uple ordinate.

Da un punto di vista più intuitivo si può definire una *matrice* come un insieme A di $m \times n$ elementi disposti come segue:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Generalmente si è soliti indicare, per comodità, una matrice anche in modo compatto, ovvero attraverso la seguente notazione:

$$A = (a_{ij}) \text{ per } i=1, 2, \dots, m \text{ e } j=1, 2, \dots, n$$

Ogni elemento a_{ij} della matrice A è dotato di due indici, i e j , il primo dei quali denota il numero d’ordine dell’orizzontale a cui l’elemento appartiene ed il secondo il numero d’ordine della verticale. Le orizzontali si chiamano *righe* della matrice e le verticali *colonne*; si definisce *linea* indifferentemente un’orizzontale od una verticale.

L’elemento a_{ij} , pertanto, appartiene alla riga i -esima e alla colonna j -esima.

A volte occorre indicare esplicitamente, in basso a destra della lettera che denota la matrice, il numero m delle righe ed n delle colonne da cui è composta; in tal caso si scrive $A_{m \times n}$ al posto di A .

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = A_{3 \times 2} \text{ è una matrice } 3 \times 2 \text{ (} m=3 \text{ ed } n=2 \text{)}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \text{ è una matrice } 3 \times 3 \text{ (} m=3 \text{ ed } n=3 \text{)}$$

Definizione 1.2.

Una matrice A di ordine $m \times n$ si dice *rettangolare* se in essa il numero delle righe è diverso da quello delle colonne.

Nel caso in cui sia $m=n$, allora la matrice A si dice *quadrata* di ordine n (o m) con $n^2 = m^2$ elementi. Una siffatta matrice si indica brevemente come segue:

$$A = (a_{ij}) \text{ con } i=j=1, 2, \dots, n$$

e gli elementi $a_{11}, \dots, a_{ii}, \dots, a_{nn}$ formano la *diagonale principale* di A , mentre gli elementi $a_{n,1}, \dots, a_{i,n-i+1}, \dots, a_{1n}$ costituiscono la sua *diagonale secondaria*.

In particolare se $m=n=1$ la matrice $A = (a_{11})$ è quadrata ed in questo caso la diagonale principale e quella secondaria coincidono con l'unico elemento a_{11} .

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \text{ è una matrice rettangolare } 2 \times 3 \text{ (} m=2 \text{ ed } n=3 \text{)}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una matrice quadrata } 2 \times 2 \text{ (} n=m=2 \text{)}$$

In tal caso gli elementi 2, 2 formano la diagonale principale mentre gli elementi 1, 3 quella secondaria.

$$3) \quad A = (2) \text{ è una matrice quadrata con } m=n=1.$$

In questo esempio la diagonale principale e quella secondaria coincidono con il solo elemento 2 della matrice A .

Definizione 1.3.

Una matrice quadrata D si dice *diagonale* se in essa sono nulli tutti gli elementi al di fuori di quelli che si trovano sulla diagonale principale.

Esempio

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ è una matrice diagonale } 3 \times 3$$

Definizione 1.4.

Una matrice quadrata A di ordine n si dice *triangolare superiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sotto della diagonale principale e *triangolare inferiore* se sono nulli tutti gli elementi al di sopra della diagonale principale.

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ è una matrice triangolare inferiore}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è una matrice triangolare superiore}$$

Osservazione

Una matrice diagonale è una matrice triangolare sia superiore che inferiore.

Definizione 1.5.

Data una qualunque matrice A di ordine $m \times n$ si definisce *trasposta* di A , e la si indica con A^t , la matrice di ordine $n \times m$ ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Definizione 1.6.

Una matrice A di ordine $m \times n$ si dice *simmetrica* se $A = A^t$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ è una matrice simmetrica}$$

Definizione 1.7.

Una matrice quadrata del tipo

$$I_n = (\delta_{ij}) \text{ con } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \text{ per } i, j=1, 2, \dots, n$$

si chiama matrice *identica* o *unitaria* di ordine n . In altre parole una matrice *identica* è una matrice diagonale in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad uno.

Esempio

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ è la matrice identità di ordine 3 (diagonale con gli elementi unitari)}$$

Definizione 1.8.

Siano $m > 1$ ed $n > 1$. Fissato un elemento qualsiasi a_{ij} della matrice A di ordine $m \times n$ si definisce *minore complementare* di a_{ij} , e lo si indica con m_{ij} , la matrice, di ordine $(m-1) \times (n-1)$, che si ottiene da A cancellando tutti gli elementi della i -esima riga e j -esima colonna.

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ è il minore complementare di } a_{21}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ è il minore complementare di } a_{21}$$

2. DETERMINANTI

Scopo del presente paragrafo è di introdurre un numero reale associato ad una matrice quadrata A , denominato *determinante* di A ed indicato con $\det A$ oppure con $|A|$. Poiché siffatto numero riveste notevole interesse in molti argomenti occorre impararne il suo calcolo.

Sia A una matrice quadrata di ordine n .

Definizione 2.1.

Se $n=1$, cioè $A = (a_{11})$, il *determinante* di A è dato da:

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Esempi

$$1) \quad A = (2) \Rightarrow \det A = |2| = 2$$

$$2) \quad A = (5) \Rightarrow \det A = |5| = 5$$

Definizione 2.2.

Se $n=2$, cioè $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, allora il *determinante* di A è dato da:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (3 \cdot 1) = -1 - 3 = -4$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (3 \cdot 1) = 4 - 3 = 1$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - (2 \cdot 1) = -2 - 2 = -4$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (3 \cdot 1) = -3$$

Definizione 2.3.

Se $n=3$, cioè $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, allora il *determinante* di A è dato da:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Un metodo pratico, però, che consente di calcolare il determinante solo di una matrice del terzo ordine, è fornito dalla seguente *regola di Sarrus*: data una matrice A di ordine tre, si consideri la tabella ottenuta da A aggiungendo ad essa, a destra, nell'ordine, le sue prime due colonne, cioè:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Si ottiene, quindi, il determinante di A eseguendo la somma dei prodotti degli elementi delle diagonali principali, $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$, e sottraendo ad essa la somma dei prodotti degli elementi delle diagonali secondarie, $a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$.

Esempi

1) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

Per poter calcolare il determinante di A in modo piuttosto agevole, occorre applicare la *regola di Sarrus*, scrivendo, in primo luogo, la seguente tabella mnemonica:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 3 & 6 & 8 \end{array}$$

da cui segue che:

$$\det A = (1 \cdot 7 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 6 + 5 \cdot 2 \cdot 8) - (6 \cdot 7 \cdot 5 + 8 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 3) = (21 + 72 + 80) - (210 + 32 + 18) = -87$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 15 - 16 - (0 + 60 + 0) = -91$$

Osservazione

Le definizioni precedenti forniscono anche metodi pratici per il calcolo del determinante di una matrice quadrata A di ordine $n=1,2,3$. Si analizzerà di seguito, invece, un criterio generale che consente di calcolare il determinante di una matrice quadrata A di ordine qualsiasi $n \geq 2$.

A tal fine, però, occorre premettere la seguente:

Definizione 2.4.

Data una matrice A di ordine $m \times n$, si definisce *minore di ordine $m-i$* , estratto da A , il determinante ottenuto dalla matrice cancellando i righe e j colonne in modo che sia $m-i=n-j$. Ne segue, in particolare, che ogni elemento di una qualunque matrice rappresenta un minore del primo ordine.

Esempi

1) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$, allora i minori di ordine tre estraibili da A sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

2) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, allora i minori di ordine tre estraibili da A sono:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -6 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mentre alcuni minori di ordine due estraibili da A sono, ad esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

e così via.

Definizione 2.5.

Sia a_{ij} un elemento qualsiasi di una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$. Si chiama *complemento algebrico* di a_{ij} , e si indica con c_{ij} , il determinante del minore complementare di a_{ij} preso con il segno positivo o negativo a seconda che la somma degli indici, ovvero $i+j$, sia rispettivamente pari o dispari.

Esempi

1) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, allora:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} |4| = 4 \text{ è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$c_{21} = (-1)^{2+1} |3| = -3 \text{ è il complemento algebrico di } a_{21} = 2$$

e così via.

2) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ allora:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \text{ è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \text{ è il complemento algebrico di } a_{12} = 3$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \text{ è il complemento algebrico di } a_{13} = 2$$

e via dicendo.

Osservazione

La definizione generale di *determinante di ordine n* viene data per ricorrenza, ovvero in funzione di quella di determinante di ordine $n-1$; i determinanti di ordine $n-1$ si ottengono in funzione di quelli di ordine $n-2$ e così via, fino a quelli di ordine almeno tre che si sanno calcolare direttamente.

Definizione 2.6. (definizione generale di determinante)

Data una matrice quadrata A di ordine $n \geq 2$, si chiama *determinante* di A quel numero, che si indica con $\det A$ oppure con $|A|$, formato dalla somma dei prodotti degli elementi di una linea (riga o colonna) qualsiasi, ovvero scelta a piacere, della matrice per i rispettivi complementi algebrici.

Dalla precedente definizione, però, può sorgere il dubbio che il calcolo di un determinante dipenda dalla particolare linea scelta. Si dimostra, quindi, a tal riguardo, il seguente:

Teorema (di Laplace): se A è una matrice quadrata di ordine n , allora il valore numerico del $\det A$ è sempre il medesimo a prescindere dalla linea scelta per il suo calcolo.

Esempi

1) Calcolare il determinante associato alla seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

secondo gli elementi della prima riga (è consigliabile, in fase preliminare, eseguire tale calcolo utilizzando anche la *regola di Sarrus*, in modo tale da poter verificare che il risultato ottenuto è il medesimo, ovvero 141).

Si ha:

$$\begin{aligned} \det A &= 3c_{11} + 2c_{12} - 1c_{13} = 3(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = \\ &= 3(20+14) - 2(-25-6) - (35-12) = 141 \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se si calcola il determinante secondo gli elementi di un'altra riga o colonna, ad esempio la seconda colonna, si ottiene, in accordo con il *teorema di Laplace*, sempre il medesimo risultato:

$$\begin{aligned} \det A &= 2c_{12} + 4c_{22} - 7c_{32} = 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 4(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 7(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= -2(-25-6) + 4(15+3) + 7(6-5) = 141 \end{aligned}$$

2) Calcolare $\det A$, essendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Per economia di calcolo conviene, in questo caso, fissare la riga o la colonna nella quale figurino il maggior numero possibile di elementi nulli. Se, ad esempio, si fissa la prima riga si ha:

$$\det A = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1+6+3+2) + 1(4+2) = 10+6 = 16$$

Lo studente provi, per esercizio, a calcolare il determinante della stessa matrice fissando, ad esempio, la terza riga oppure la prima colonna; potrà verificare, quindi, che, variando la linea di

partenza, il valore del determinante non muta. Naturalmente si può calcolare suddetto determinante fissando un'altra riga, ad esempio, la quarta; risulta evidente, però, che, in alcuni casi, il procedimento è di gran lunga più laborioso.

3. OPERAZIONI CON LE MATRICI

Siano A e B due matrici di tipo $m \times k$ ed $h \times n$ rispettivamente.

Definizione 3.1.

A e B si dicono *sommabili (sottraibili)* se $m=h$ e $k=n$. Se A e B sono sommabili (sottraibili), ovvero entrambe di tipo $m \times n$, allora risulta:

$$A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{ij}) = (a_{ij} \pm b_{ij})$$

Esempi

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono entrambe di ordine 3×3 , sono sommabili e sottraibili; risulta allora:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 3+1 & 2+2 & 1+0 \\ -1-4 & -1+3 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & 3-0 \\ 3-1 & 2-2 & 1-0 \\ -1+4 & -1-3 & 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono sommabili (sottraibili), in quanto entrambe di ordine 3×2 , si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & -1-1 \\ -3+1 & 3+2 \\ -4+1 & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Poiché A e B sono di ordine rispettivamente 3×3 e 2×3 , le due matrici non sono sommabili (sottraibili).

Osservazioni

- Comunque data $A = A_{m \times n}$ e considerata la matrice $O = O_{m \times n}$, risulta:

$$(1) A + O = O + A = A$$

Esempi

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

La *matrice nulla*, associata ad A , di ordine tre, è data da:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Essendo A ed O sommabili, è facile verificare, sfruttando la *definizione* 4.1., che la (1) è soddisfatta.

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso la *matrice nulla* associata ad A è di ordine 2×3 , ovvero della forma:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque la (1) è verificata.

- Se $-A$ è la matrice ottenuta da A cambiando segno a tutti i suoi elementi si ha:

$$(2) \quad A + (-A) = (-A) + A = O$$

Esempi

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Utilizzando ora la *definizione* 4.1., si verifica banalmente la (2).

$$2) A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

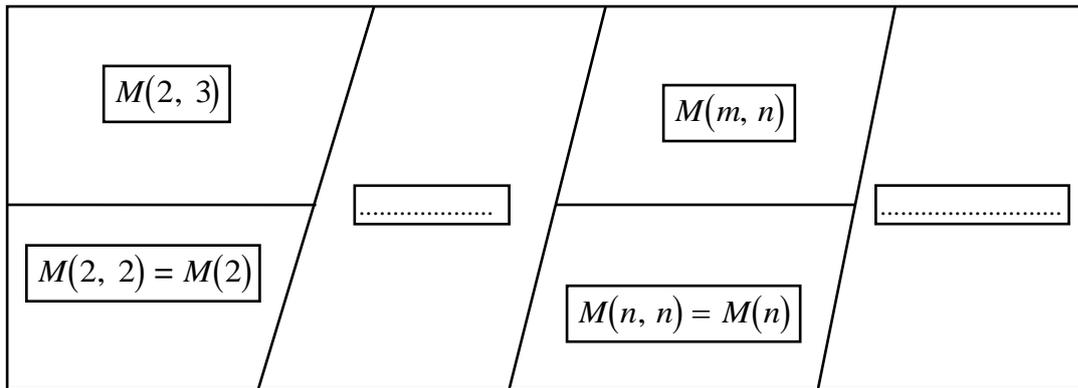
La verifica della (2) è lasciata, per esercizio, allo studente.

Osservazione

Nell'insieme M di tutte le matrici, l'operazione di addizione tra matrici (+) è un'operazione *parziale* in quanto non sempre eseguibile: matrici di egual tipo, infatti, sono sommabili, a differenza di matrici di diverso tipo che non sono (e non potrebbero essere) sommabili (posto a posto). Quanto fino ad ora affermato si può riassumere nel seguente:

Teorema: sia \mathcal{M} l'insieme di tutte le matrici; l'insieme \mathcal{M} si può ripartire nell'insieme $M(m, n)$ di tutte le matrici di egual tipo, ovvero a due a due sommabili; inoltre ciascuna di queste classi $M(m, n)$, corredate con l'addizione tra matrici, costituisce quello che in algebra si chiama *gruppo commutativo*.

Tale teorema, dunque, può essere schematizzato nel seguente diagramma:



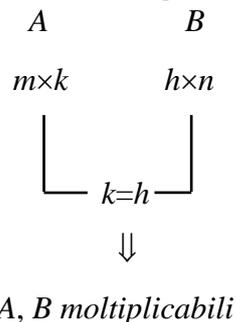
Si cercherà ora di introdurre una seconda *operazione parziale* su \mathcal{M} (parziale in quanto non sempre definita), precisamente il *prodotto (righe per colonne)* tra due matrici. Seppur la definizione risulta essere complessa e macchinosa e non si giustifica con l'intuito, sicuramente, insieme a tutta la teoria che la circonda, è di grande utilità per le applicazioni.

Siano A e B due matrici di tipo rispettivamente $m \times k$ ed $h \times n$.

Definizione 3.2.

A e B si dicono *conformabili* o *moltiplicabili* se il numero k delle colonne di A eguaglia il numero h delle righe di B .

Tale definizione può essere schematizzata come segue:



Esempio 1

Siano

$$A = (a_1 \dots a_i \dots a_n), X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

rispettivamente una *matrice riga* $1 \times n$ ed una *matrice colonna* $n \times 1$. Allora A è moltiplicabile per X .

Definizione 3.3. (definizione particolare)

Si definisce *prodotto di A per X* la matrice 1×1 data da:

$$AX = a_1 x_1 + \dots + a_i x_i + \dots + a_n x_n$$

(prodotto dell'unica riga di A per l'unica colonna di B).

Si può definire anche, ma in modo totalmente differente, il prodotto XA (cfr. *Esempio 3*).

Esempio 2

Siano

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}$$

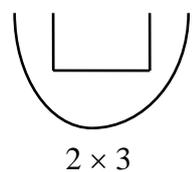
$2 \times 2 \qquad \qquad \qquad 2 \times 3$


A è moltiplicabile per B mentre B non è moltiplicabile per A.

Definizione 4.4. (definizione particolare)

Nel caso riportato nell'*Esempio 2*, il prodotto righe per colonne di A per B si definisce ponendo:

$$\begin{array}{c}
 A \quad \times \quad B \\
 \begin{array}{|c|} \hline 2 \times 2 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \times 3 \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 = \begin{pmatrix} a\alpha + b\alpha' & a\beta + b\beta' & a\gamma + b\gamma' \\ c\alpha + d\alpha' & c\beta + d\beta' & c\gamma + d\gamma' \end{pmatrix} = \begin{array}{c} AB \\ \hline 2 \times 3 \end{array}$$



Si noti che ogni elemento della matrice prodotto non è altro che il prodotto di una riga di A per la corrispondente colonna di B.

Osservazione

Se A e B sono due matrici di ordine rispettivamente $m \times k$ ed $h \times n$ con $k=h$, allora il prodotto AB è una matrice opportuna ma di ordine $m \times n$, ovvero risulta:

$$\begin{array}{c}
 A \quad \times \quad B \\
 \begin{array}{|c|} \hline m \times k \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline h \times n \\ \hline \end{array} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \quad \quad \quad k = h \quad \quad \quad \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \hline \\
 \hline
 \end{array}
 m \times n$$

Esempio 3

Con riferimento all'*Esempio 1* si ha:

$$XA = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_i & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1 & \dots & x_1 a_i & \dots & x_1 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_i a_1 & \dots & x_i a_i & \dots & x_i a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n a_1 & \dots & x_n a_i & \dots & x_n a_n \end{pmatrix}$$

Definizione 3.5. (definizione generale)

Se A e B sono matrici di ordine rispettivamente $m \times k$ ed $h \times n$ con $k=h$ allora il prodotto AB è una matrice S di ordine $m \times n$ della forma:

$$AB = S = (s_{ij}) \quad \text{con } i=1, 2, \dots, m \text{ e } j=1, 2, \dots, n$$

dove l'elemento s_{ij} è il prodotto della riga i -esima di A per la colonna j -esima di B .

In formule si ha:

$$s_{ij} = (a_{i1} \dots a_{ii} \dots a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{ij} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ii}b_{ij} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pj}$$

Osservazione

Talvolta risulta possibile interpretare la *Definizione 3.5* anche nel seguente modo: date A e B si evidenziano le righe di A e le colonne di B ponendo

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix}, B = (B_1 \dots B_j \dots B_n)$$

dove:

$$A_1 = (a_{11} \dots a_{1i} \dots a_{1k}), \dots, A_i = (a_{i1} \dots a_{ii} \dots a_{ik}), \dots, A_m = (a_{m1} \dots a_{mi} \dots a_{mk})$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ \dots \\ b_{j1} \\ \dots \\ b_{k1} \end{pmatrix}, \dots, B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \dots \\ b_{jj} \\ \dots \\ b_{kj} \end{pmatrix}, \dots, B_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ \dots \\ b_{jn} \\ \dots \\ b_{kn} \end{pmatrix}$$

Ne segue che:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_i \\ \dots \\ A_m \end{pmatrix} (B_1 \dots B_j \dots B_n) = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_j & \dots & A_1 B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_i B_1 & \dots & A_i B_j & \dots & A_i B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_m B_1 & \dots & A_m B_j & \dots & A_m B_n \end{pmatrix}$$

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché A ha ordine 3×2 e B ha ordine 2×4 , il prodotto AB è eseguibile (il numero delle colonne di A è uguale al numero delle righe di B , cioè A e B sono conformabili). La matrice prodotto avrà, pertanto, ordine 3×4 , precisamente:

$$S = AB = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \end{pmatrix}$$

dove:

$$s_{11} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 6; \quad s_{12} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 7;$$

$$s_{13} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 2; \quad s_{14} = (2 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7;$$

$$s_{21} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 = 3; \quad s_{22} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 6;$$

$$s_{23} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 3; \quad s_{24} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 = 9;$$

$$s_{31} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 9; \quad s_{32} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 8;$$

$$s_{33} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1; \quad s_{34} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$$

Dunque:

$$S = AB = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A e B sono conformabili e la matrice prodotto avrà, pertanto, ordine 3×4 (3 è il numero delle righe di A e 4 è il numero delle colonne di B). Dunque si ha:

$$S = (AB)_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Si può dimostrare che, indipendentemente dalle matrici $A, B, C \in \mathcal{M}$ e dal numero $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto tra matrici gode delle seguenti proprietà:

Teorema (di Binet): $\det(AB) = \det A \det B$ (proprietà che ha molteplici applicazioni)

- $\det(\lambda A) = \lambda^{\text{ord}A} \det A$ (se A è una matrice quadrata)
- *associativa:* $(AB)C = A(BC)$
- *distributiva:* $A(B+C) = AB+AC$ (a destra); $(A+B)C = AC+BC$ (a sinistra)

sotto le ipotesi che tutte le operazioni indicate nelle formule precedenti siano eseguibili.

In generale, però, il prodotto tra matrici non è commutativo: se si considerano, infatti, due matrici $A(m, k)$ e $B(k, n)$, allora AB è sempre possibile (A e B sono conformabili) mentre BA è possibile solo se $m = n$. Tuttavia anche se esistono entrambi i prodotti, ovvero AB e BA , non è detto che questi siano eguali.

Esempio

$$A = (4 \ 5 \ 6), B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AB = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1) = 17$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 5 & (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A_{1 \times 3}, B_{3 \times 1} \Rightarrow \begin{cases} (AB)_{1 \times 1} \\ (BA)_{3 \times 3} \end{cases} \Rightarrow AB \neq BA$$

Osservazione

Nell'esempio precedente, pur essendo stato possibile eseguire entrambi i prodotti AB e BA , perché il numero delle righe e delle colonne di A erano uguali, rispettivamente, al numero delle colonne e delle righe di B , si sono ottenuti prodotti ben diversi tra loro.

Dunque, in generale, si ha:

- $AB \neq BA$;
- $AB = O$ non implica necessariamente $A = O$ oppure $B = O$;
- $AB = AC$ oppure $BA = CA$ non implicano necessariamente $B = C$.

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \not\Rightarrow A = O \text{ oppure } B = O \text{ (le matrici } A \text{ e } B \text{ non sono infatti nulle).}$$

$$3) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

ma è evidente che risulta $B \neq C$.

Definizione 3.6.

Data una matrice quadrata A di ordine n si definisce *matrice inversa* di A , e la si indica con A^{-1} , una matrice quadrata di ordine n tale che $AA^{-1} = I$ ed $A^{-1}A = I$.

La matrice inversa può essere determinata attraverso due metodi: il primo, *teorico*, e che verrà illustrato in questa sede, che conduce ad una formula, ed il secondo, *pratico*, e che verrà tralasciato in quanto ritenuto di minore importanza per le applicazioni economico-statistiche, che porta, invece, alla determinazione della A^{-1} attraverso un calcolo ben preciso.

Il primo metodo, quindi, si basa sul seguente:

Teorema: data una matrice quadrata A di ordine n , esiste A^{-1} se e solo se risulta $\det A \neq 0$

Osservazioni

- Applicando il *teorema di Binet* alla relazione fondamentale della matrice inversa si ha:

$$\det I = \det(AA^{-1}) = \det A \det A^{-1} = 1$$

da cui segue:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

relazione che consente di calcolare il determinante della matrice inversa.

- Se A è una matrice con $\det A = 0$, allora esiste sempre una seconda matrice B tale che:

$$AB = 0$$

Due matrici siffatte, cioè due matrici A e B con $A \neq 0, B \neq 0$ ma $AB = 0$, si dicono *matrici divisori dello zero*.

- Se A e B sono due matrici divisori dello zero, allora dal *teorema di Binet* risulta:

$$\det(AB) = \det A \det B = 0$$

Infatti essendo $A \neq 0, B \neq 0$, la condizione $\det B \neq 0$ implicherebbe l'esistenza di B^{-1} per cui risulterebbe $(AB)B^{-1} = 0$ e quindi $A = 0$ mentre, per ipotesi, è $A \neq 0$.

Verrà ora illustrato in dettaglio il primo metodo, ovvero quello teorico, per il calcolo dell'inversa di una data matrice, metodo questo che, come già detto, conduce ad una formula che non verrà dimostrata in questa sede. Occorre, in primo luogo, determinare la matrice A^* dei complementi algebrici per poi applicare la seguente relazione:

$$(3) \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t$$

Esempi

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo in primo luogo che $\det A = -1 \neq 0$, cioè la matrice data ammette inversa. Calcoliamo allora A^{-1} utilizzando la (3).

La matrice A^* dei complementi algebrici associata ad A è data da:

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalla (3) segue che:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

È facile verificare che $\det A = -1 \neq 0$. Pertanto A ammette l'inversa.

Risulta:

$$(A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Si noti che, essendo $\det A = -12 \neq 0$, esiste A^{-1} .

Si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & 0 \\ -3 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

4. LO SPAZIO NUMERICO \mathbb{R}^n

Si denota con \mathbb{R}^n l'insieme delle n -uple ordinate di numeri reali. Posto $I = \{1, 2, \dots, n\}$, una n -upla si scriverà nel modo seguente:

$$\underline{a} = (a_i)_{i \in I} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Risulta, pertanto, possibile considerare una n -upla come un vettore-riga di ordine $1 \times n$. Quindi se

$$\underline{b} = (b_i)_{i \in I} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

è un'ulteriore n -upla e $\lambda \in \mathbb{R}$ è un numero reale, risulta possibile definire le seguenti due operazioni tra n -uple:

1. $\underline{a} + \underline{b} = (a_i + b_i)_{i \in I}$
2. $\lambda \underline{a} = (\lambda a_i)_{i \in I}$

operazioni queste che conferiscono ad \mathbb{R}^n una *struttura di spazio vettoriale*; una n -upla, poi, prende il nome anche di *n -vettore riga* o *vettore riga n -dimensionale*.

Definizione 4.1.

Siano dati n numeri reali $\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n$ e si considerino altrettanti vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$. In base alle operazioni sopra indicate (1. e 2.) si può costruire il vettore:

$$\underline{b} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n$$

detto *combinazione lineare* dei vettori \underline{a}_i mediante i numeri λ_i .

Si consideri ora un insieme di vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ e si denoti con $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle$ l'insieme di tutti i vettori \underline{u} tali che:

$$\underline{u} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n$$

cioè:

$$\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle = \{ \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \}$$

Definizione 4.2.

Lo spazio $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n \rangle$ si chiama *spazio vettoriale generato da un insieme di vettori*.

Si cercherà, sulla base delle precedenti definizioni, di risolvere la seguente *equazione vettoriale*:

$$(*) \quad \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

dove i λ_i sono variabili, gli \underline{a}_i vettori assegnati e le soluzioni sono le n -uple $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n)$.

Si osservi subito che, poiché risulta:

- $0\underline{b} = (0b_1, \dots, 0b_i, \dots, 0b_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0) = \underline{0}$
- $\lambda\underline{0} = (\lambda 0, \dots, \lambda 0, \dots, \lambda 0) = (0, \dots, 0, \dots, 0) = \underline{0}$

l'equazione (*) ammette sempre la soluzione $(\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0)$ ovvero $\underline{\lambda} = \underline{0}$, detta *soluzione nulla o banale*.

Definizione 4.3.

Dato l'insieme degli n vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ risulta possibile distinguere i seguenti due casi:

α) i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono tali che l'equazione (*) con essi costruita nelle variabili $\underline{\lambda}$ ammette *soltanto* la soluzione nulla $\underline{\lambda} = \underline{0}$. In tal caso gli n vettori si dicono *linearmente indipendenti*;

β) i vettori $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono tali che l'equazione (*), oltre alla soluzione nulla, che esiste sempre, ne ammette altre (necessariamente infinite) che non sono nulle. In tal caso gli n -vettori si dicono *linearmente dipendenti*.

Si dimostra, a tal proposito, il seguente:

Teorema: n vettori n -dimensionali $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_i, \dots, \underline{a}_n$ sono *linearmente indipendenti* se e solo se:

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \dots \\ \underline{a}_i \\ \dots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix} \neq 0$$

Esempi

1) Le terne $(1, 2, 3), (2, 1, 2), (3, 2, 1)$ sono linearmente indipendenti. Infatti, in base al teorema precedente, si ha:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

Ragionando direttamente, ovvero usando la definizione, risulta:

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(2, 1, 2) + \nu(3, 2, 1) = (\lambda + 2\mu + 3\nu, 2\lambda + \mu + 2\nu, 3\lambda + 2\mu + \nu) = (0, 0, 0)$$

da cui segue:

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 2\lambda + \mu + 2\nu = 0 \\ 3\lambda + 2\mu + \nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ -3\mu - 4\nu = 0 \\ -4\mu - 8\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 3\mu + 4\nu = 0 \\ \mu + 4\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu = 0 \\ 8\nu = 0 \\ \mu + 4\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ \nu = 0 \end{cases}$$

Dunque, poiché il sistema ammette *solo* la soluzione nulla, i tre vettori sono *linearmente indipendenti*.

2) Le quaterne $(1, 2, 3, -1)$, $(2, 1, 3, 4)$, $(4, 5, 9, 2)$ sono linearmente dipendenti, essendo:

$$2(1, 2, 3, -1) + (2, 1, 3, 4) - (4, 5, 9, 2) = (2 + 2 - 4, 4 + 1 - 5, 6 + 3 - 9, -2 + 4 - 2) = (0, 0, 0, 0)$$

Esiste, dunque, una terna di numeri $\lambda = 2, \mu = 1, \nu = -1$ non nulli soddisfacenti la (*).

Osservazione

Sia data una n -upla $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n) \neq \underline{0}$ tale che:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_i \underline{a}_i + \dots + \lambda_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

Se uno dei λ_i è diverso da zero (ad esempio è $\lambda_1 \neq 0$), allora si può esprimere \underline{a}_1 in funzione dei rimanenti \underline{a}_i , essendo:

$$\underline{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) \underline{a}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right) \underline{a}_i + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right) \underline{a}_n$$

Definizione 4.4.

Un insieme di n vettori si dice che forma una *base* per uno spazio vettoriale se:

- i vettori sono linearmente indipendenti;
- ogni vettore dello spazio è combinazione lineare dei rimanenti n vettori dati.

Se ora si pone:

$$\underline{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \dots, \underline{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), \dots, \underline{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

allora sussiste la seguente identità:

$$(**) \quad \underline{a} = a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n$$

poiché risulta:

$$\begin{aligned} \underline{a} &= (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, a_i, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, a_n) = \\ &= a_1 (1, 0, \dots, 0) + \dots + a_i (0, \dots, 1, \dots, 0) + \dots + a_n (0, 0, \dots, 1) = \\ &= a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n \end{aligned}$$

La (**) prova, dunque, che:

- $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i, \dots, \underline{e}_n$ sono linearmente indipendenti; infatti risulta:
 $a_1 \underline{e}_1 + \dots + a_i \underline{e}_i + \dots + a_n \underline{e}_n = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = (0, \dots, 0, \dots, 0) \Leftrightarrow a_i = 0, \forall i \in I$
- un qualsiasi vettore $\underline{a} = (a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ è combinazione lineare degli \underline{a}_i , per $i \in I$.

Segue che l'insieme $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_i, \dots, \underline{e}_n\}$ forma una base detta *base naturale* o *canonica* di \mathbb{R}^n .

È facile provare, infine, che due differenti basi (finite) hanno lo stesso numero di elementi, numero questo che rappresenta la *dimensione* dello spazio. \mathbb{R}^n , dunque, ha esattamente dimensione pari ad n .

Osservazione

Quanto fino ad ora affermato per i vettori-riga si può ripetere in maniera analoga per i vettori-colonna potendoli scrivere sotto la seguente forma:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_i \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + a_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ESERCIZI PROPOSTI

Ⓐ) Calcolare, se possibile, $A+B$, $A-B$, AB , BA e cA , dove A, B e c sono dati, degli esercizi 1)-8), dopo aver analizzato gli esempi a)-g):

$$a) \quad A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, c = 2$$

Sommando e sottraendo termine a termine risulta rispettivamente:

$$(A+B)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, (A-B)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Svolgendo il prodotto righe per colonne si ha:

$$(AB)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 0 - 2 \cdot (-1) & -1 \cdot (-5) - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -25 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(BA)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) & 0 \cdot 5 - 5 \cdot (-2) \\ -1 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) & -1 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando ciascun elemento della matrice A per il numero c assegnato si ottiene:

$$cA = (2A)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, c = 3$$

Si ha:

$$(A+B)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, (A-B)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & 4 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) \\ 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 & 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 6 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \\ 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) & 5 \cdot 0 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 9 & -3 & -9 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(BA)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 21 & -2 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$cA = (3A)_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \quad A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}, c = -1$$

Risulta:

$$(A+B)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, (A-B)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

AB non è possibile perché il numero delle colonne di A è diverso dal numero delle righe di B .

BA non è possibile per il ragionamento precedente.

$$cA = ((-1)A)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, c = -2$$

Si ha:

$$(A+B)_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}, (A-B)_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 0 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & \frac{17}{2} \\ -3 & 10 & \frac{35}{2} \end{pmatrix}$$

$$(BA)_3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 3 & -1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 \\ -1 & \frac{7}{2} & 6 \\ 0 & 13 & 18 \end{pmatrix}$$

$$cA = ((-2)A)_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}$$

Osservazione

La somma e la differenza si possono effettuare solo nel caso di matrici aventi lo stesso ordine (il medesimo numero di righe e di colonne): non è possibile, infatti, sommare o sottrarre, ad esempio, una matrice di ordine 2×3 ed una di ordine 3×3 ; analogamente, come già osservato, è possibile calcolare il prodotto tra due matrici solo se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice, precisamente $A(m,k)$ e $B(k,n)$ sono moltiplicabili e la matrice prodotto è $S(m,n)$; il prodotto tra matrici, in generale, non è commutativo, ossia è $AB \neq BA$, com'è facile verificare dagli esempi precedenti.

$$e) \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, c = \frac{1}{3}$$

$A+B$ ed $A-B$ non sono possibili per quanto asserito nella precedente osservazione.

$$(AB)_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \\ (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 & (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è la matrice nulla } 3 \times 2$$

BA non è possibile

$$cA = \left(\frac{1}{3}A\right)_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$f) \quad A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, c = 6$$

$A+B$ ed $A-B$ non sono possibili

$$(AB)_2 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(BA)_3 = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$cA = (6A)_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g) \quad A_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, B_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, c = -1$$

$A+B$ e $A-B$ non sono possibili

$$(AB)_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-2) & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & -4 \\ 6 & -13 \end{pmatrix}$$

BA non è possibile

$$cA = (-A)_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ è la matrice nulla } 3 \times 4$$

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, c = 2$$

$$\underline{R}: \quad A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, c = -1$$

$$\underline{R}: A+B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \\ 9 & -3 & 7 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 13 & 1 & 19 \\ -4 & -3 & 3 \\ 5 & 14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 16 & -3 & 1 \\ 25 & -14 & 2 \\ 39 & -20 & 13 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, c = 3$$

$$\underline{R}: A+B, A-B, BA \text{ non sono possibili}; AB = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 32 & -33 \\ 31 & -15 \\ 24 & -12 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 6 & -15 & 21 \\ 0 & 3 & 12 \\ -9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, c = \frac{1}{2}$$

$$\underline{R}: A+B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 3 \\ 6 & 9 & 3 & -6 \end{pmatrix}, A-B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -9 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} 18 & 19 & 15 & 0 \\ 19 & 27 & 11 & -12 \\ 15 & 11 & 54 & 19 \\ 0 & -12 & 19 & 35 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 59 & 21 & 1 & 8 \\ 21 & 22 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & -14 \\ 8 & 1 & -14 & 47 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 & 7 \end{pmatrix}, c = 1$$

$$\underline{R}: A+B, A-B \text{ non sono possibili; } AB = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 3 & -2 \\ 37 & -26 & 11 & 44 \\ 20 & -6 & -1 & 31 \\ 12 & -3 & -9 & 6 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -16 & 8 & 19 \\ -5 & -11 & 19 \\ -20 & 10 & 2 \end{pmatrix}, cA = A$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \\ 2 & 9 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, c = \frac{1}{3}$$

$$\underline{R}: A+B, A-B, BA \text{ non sono possibili; } AB = \begin{pmatrix} 32 & 43 \\ 20 & 48 \\ 64 & 86 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ 2 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & 2 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & \frac{1}{3} \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}, c = \frac{1}{3}$$

$$\underline{R}: A+B, A-B, AB \text{ non sono possibili; } BA = \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 5 \\ 63 & 21 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, c = -2$$

$$\underline{R}: A+B, A-B, BA \text{ non sono possibili; } AB = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, cA = \begin{pmatrix} -2 & -6 & -8 \\ 2 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

B) Scrivere la trasposta delle seguenti matrici 1)-6) dopo aver analizzato gli esempi a)-d):

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Come già accennato in precedenza la trasposta di una matrice si ottiene scambiando tra di loro le righe e le colonne; si ha, quindi:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Nell'esempio b) risulta $A = A'$ ovvero la matrice A è *simmetrica*.

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ottiene:

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad A = D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

La trasposta della matrice *diagonale* D è la matrice, anch'essa diagonale, data da:

$$D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Ogni matrice diagonale è *simmetrica*; nel caso in cui la matrice A sia quadrata di ordine n , allora la sua trasposta risulterà ancora una matrice quadrata di ordine n ; se, invece, A è una matrice rettangolare di ordine $m \times n$ allora la sua trasposta sarà ancora una matrice rettangolare di ordine, però, $n \times m$.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$5) \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[D' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

C) Calcolare i determinanti delle matrici 1)-30) dopo aver osservato quanto riportato nei seguenti esempi a)-d)

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Applicando la definizione data sui determinanti del secondo ordine si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = -6 + 2 = -4$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando la *regola di Sarrus* si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) - [2 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 1 \cdot 2] =$$

$$= 0 - 6 - 2 - (0 - 1 - 6) = -6 - 2 + 1 + 6 = -1$$

$$c) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Il determinante richiesto si può calcolare con la *regola di Sarrus*, come fatto nel precedente esempio, oppure con la *regola di Laplace*, cioè sviluppando il determinante rispetto agli elementi di una riga o di una colonna. Se si considerano, ad esempio, gli elementi della seconda riga, si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot c_{21} + 0 \cdot c_{22} + 1 \cdot c_{23} = c_{21} + c_{23} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-6+2) - (-1+6) = 4-5 = -1$$

Dunque, per il calcolo dei determinanti del terzo ordine, risulta possibile utilizzare entrambi i metodi di cui agli esempi b) e c).

$$d) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando la *regola di Laplace*, cioè sviluppando il determinante, ad esempio, secondo gli elementi della prima colonna, si ha:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & -5 \\ 5 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot c_{11} + 5 \cdot c_{21} + 4 \cdot c_{31} + 3 \cdot c_{41} = -c_{11} + 5c_{21} + 4c_{31} + 3c_{41} =$$

$$= -(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 3(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 3 & -5 \\ -2 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

I precedenti determinanti di ordine tre, a loro volta, possono essere calcolati applicando nuovamente la *regola di Laplace*, sviluppando ciascuno di essi secondo, ad esempio, gli elementi della prima riga. Risulta quindi:

$$\det A = - \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] +$$

$$-5 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] +$$

$$+4 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right] +$$

$$-3 \left[-2(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= - \left[-2(-1) - 4(-13) - 5 \right] - 5 \left[-2(-1) - 3(-13) - 5(-5) \right] + 4 \left[-2(7) - 3(-7) - 5(-14) \right] +$$

$$-3 \left[-2(11) - 3(-4) - 5(6) \right] = -49 - 330 + 308 + 120 = 49$$

Osservazione

Si sarebbe pervenuti allo stesso risultato se si fossero calcolati i determinanti del terzo ordine con la *regola di Sarrus*.

Osservazione

Tutti i determinanti di ordine $n \geq 5$ si risolvono sempre con la *regola di Laplace*.

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix} \quad [\det A = -19]$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = -5]$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad [\det A = 8]$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \quad [\det A = -1]$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad [\det A = -29]$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \quad [\det A = -37]$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix} \quad [\det A = 34]$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \quad [\det A = 7]$$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 19]$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -13]$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad [\det A = -1]$$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad [\det A = -2]$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 26]$$

$$14) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -4]$$

$$15) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -5 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = 71]$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = -87]$$

$$17) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 141]$$

$$18) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$19) A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad [\det A = 70]$$

$$20) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad [\det A = 65]$$

$$21) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 11]$$

$$22) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$23) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -15 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 24]$$

$$24) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = -241]$$

$$25) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\det A = 15]$$

$$26) A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 38]$$

$$27) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & -7 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad [\det A = 256]$$

$$28) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \quad [\det A = 0]$$

$$29) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 & -3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 6 & 10 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad [\det A = -885]$$

$$30) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 & -5 \\ -3 & 4 & -10 & 9 & 16 \\ 2 & 1 & 11 & -4 & -9 \\ 1 & 6 & 12 & 5 & -3 \\ -5 & 2 & -24 & -5 & 22 \end{pmatrix} \quad [\det A = 52]$$

D) Calcolare la matrice dei complementi algebrici riportata negli esercizi 1)-12) dopo aver analizzato gli esempi a)-f):

$$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

dove i c_{ij} , complementi algebrici relativi agli elementi a_{ij} , sono il risultato del prodotto tra il determinante, ottenuto da A cancellando la riga i -esima e la colonna j -esima, e $(-1)^{i+j}$.

Pertanto risulta:

$$c_{11} = 3 \quad [\text{cancellando la prima riga e la prima colonna si ottiene il } |3| = 3, \text{ moltiplicato per } (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1]$$

$$c_{12} = -1 \quad [\text{cancellando la prima riga e la seconda colonna si ottiene il } |1| = 1, \text{ moltiplicato per } (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1]$$

$$c_{21} = -5 \quad [\text{cancellando la seconda riga e la prima colonna si ottiene il } |5| = 5, \text{ moltiplicato per } (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1]$$

$$c_{22} = 2 \quad [\text{cancellando la seconda riga e la seconda colonna si ottiene il } |2| = 2, \text{ moltiplicato per } (-1)^{2+2} = (-1)^4 = +1]$$

Quindi alla fine risulta:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Procedendo come nel precedente esempio si ha:

$$c_{11} = 5 \quad [\text{cancellando la prima riga e la prima colonna si ha il } |5| = 5 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{1+1} = (-1)^2 = +1]$$

$$c_{12} = -3 \quad [\text{cancellando la prima riga e la seconda colonna si ha il } |3|03 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{1+2} = (-1)^3 = -1]$$

$$c_{21} = -0 = 0 \quad [\text{cancellando la seconda riga e la prima colonna si ha il } |0| = 0 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1]$$

$$c_{22} = -1 \quad [\text{cancellando la seconda riga e la seconda colonna si ha il } |-1| = -1 \text{ che va poi moltiplicato per } (-1)^{2+2} = (-1)^4 = +1]$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche per le matrici di ordine $n \geq 3$ si può applicare la regola analizzata nel caso $n = 2$, chiaramente con le opportune variazioni.

Pertanto si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Restano da calcolare i c_{ij} , complementi algebrici degli elementi a_{ij} .

Quindi si ha:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [(-5) \cdot 0 - (-1) \cdot 4] = +1 \cdot (+4) = 4$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna di A)

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [3 \cdot 0 - (4 \cdot 1)] = -1 \cdot (-4) = 4$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la seconda colonna di A)

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [3 \cdot (-1) - (-5) \cdot 1] = +1 \cdot (-3 + 5) = 2$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la prima riga e la terza colonna di A)

$$c_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [0 \cdot 0 - (-1) \cdot 1] = -1 \cdot (1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la prima colonna di A)

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [(-1) \cdot 0 - (1 \cdot 1)] = +1 \cdot (-1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la seconda colonna di A)

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [(-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 1] = -1 \cdot (1) = -1$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la seconda riga e la terza colonna di A)

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [0 \cdot 4 - (-5) \cdot 1] = +1 \cdot (5) = 5$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la prima colonna di A)

$$c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [(-1) \cdot 4 - (3 \cdot 1)] = -1 \cdot (-4 - 3) = -1 \cdot (-7) = 7$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la seconda colonna di A)

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [(-1) \cdot (-5) - 0 \cdot 3] = +1 \cdot (5) = 5$$

(il determinante 2×2 è stato ottenuto cancellando la terza riga e la terza colonna di A)

Dunque la matrice cercata è:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$d) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo, in primo luogo, come fatto nei precedenti esempi, i complementi algebrici relativi agli elementi della matrice data. Risulta allora:

$$c_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = +1 \cdot (1) = 1;$$

$$c_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (0 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = -1 \cdot (0) = 0;$$

$$c_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (0 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = +1 \cdot (-2) = -2;$$

$$c_{12} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [(-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0] = -1 \cdot (-1) = 1;$$

$$c_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) = +1 \cdot (1) = 1;$$

$$c_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [1 \cdot 0 - (-1) \cdot 2] = -1 \cdot (2) = -2;$$

$$c_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad c_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$$c_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0] = +1 \cdot (1) = 1$$

Dunque si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Procedendo in maniera più rapida di quanto non sia stato fatto in precedenza si ha:

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad c_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(6-5) = -1; \quad c_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6;$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2-4) = 2; \quad c_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-10 = -6; \quad c_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -(4-5) = 1;$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad c_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) = 4; \quad c_{33} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 6 \\ 2 & -6 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$c_{11} = + \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 36 - 75 = -39; \quad c_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(18 - 0) = -18;$$

$$c_{13} = + \begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 20 = -26; \quad c_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(-30) = 30;$$

$$c_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-5 + 12 - 8) = 1; \quad c_{22} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 15 - 4 = -13;$$

$$c_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(8 - 2 + 5) = -11; \quad c_{24} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10;$$

$$c_{31} = + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3 + 15 - 10 = 2; \quad c_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -(-9) = 9;$$

$$c_{33} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13; \quad c_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -(15) = -15;$$

$$c_{41} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -(12 - 25) = 13; \quad c_{42} = + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6;$$

$$c_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -(25 - 10 - 12) = -3; \quad c_{44} = + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

Dunque:

$$A^* = \begin{pmatrix} -39 & -18 & -26 & 30 \\ 1 & -13 & -11 & 10 \\ 2 & 9 & 13 & -15 \\ 13 & 6 & -3 & -10 \end{pmatrix}$$

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -5 \\ -1 & -8 & -5 \\ 1 & 8 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 10 \\ 1 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 13 \\ 2 & 10 & -26 \\ -1 & -5 & -13 \end{pmatrix} \right]$$

$$10) D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left[D^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right]$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} -48 & -30 & 8 & 24 \\ 12 & -10 & -2 & -6 \\ -11 & 15 & -4 & -12 \\ 16 & 10 & -26 & -8 \end{pmatrix} \right]$$

$$12) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left[A^* = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 11 \\ 7 & -15 & 25 & 21 \\ -59 & -12 & -6 & -22 \\ 4 & 8 & 4 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

E) Calcolare, con il metodo teorico, l'inversa delle matrici riportate negli esercizi 1)-12) dopo aver analizzato i seguenti esempi a)-h):

$$a) A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Risulta necessario calcolare, in primo luogo, il determinante di A per poter affermare che la matrice data ammette o meno l'inversa. Si ha:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Quindi, essendo rispettata la condizione necessaria e sufficiente, esiste l'inversa di A.

Occorre ora calcolare la matrice dei complementi algebrici; si ha:

$$c_{11} = 4; \quad c_{12} = 2; \quad c_{21} = -1; \quad c_{22} = -3$$

Ne segue che:

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$b) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Quindi A ammette inversa.

Si calcolano i complementi algebrici relativi agli elementi di A:

$$c_{11} = 2; \quad c_{12} = 0; \quad c_{21} = 1; \quad c_{22} = 1$$

da cui:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Come già visto nell'esempio $d)$ in \mathbb{D}) i complementi algebrici relativi agli elementi di A sono i seguenti:

$$c_{11} = 1; \quad c_{12} = 0; \quad c_{13} = -2; \quad c_{21} = 1; \quad c_{22} = 1; \quad c_{23} = -2; \quad c_{31} = 0; \quad c_{32} = 0; \quad c_{33} = 1$$

Quindi:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si osservi che in questo esempio $A^{-1} \equiv (A^*)^t$.

$$d) A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Dunque la nostra matrice A non ha inversa.

$$e) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

I complementi algebrici sono:

$$c_{11}=1; \quad c_{12}=0; \quad c_{13}=-1; \quad c_{21}=4; \quad c_{22}=-2; \quad c_{23}=-5; \quad c_{31}=-3; \quad c_{32}=1; \quad c_{33}=3$$

da cui segue:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Innanzitutto bisogna calcolare il determinante di A utilizzando la regola di Laplace. Si ha, sviluppando, ad esempio, rispetto alla seconda riga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \\ = -(3-2-1-1) - (-1-6+2-1-2-6) = +1+14 = 15$$

Poiché $\det A = 15 \neq 0$, la matrice data ha l'inversa.

Si calcolino ora i complementi algebrici relativi agli elementi di A . Si ha:

$$c_{11}=3; \quad c_{12}=3; \quad c_{13}=-3; \quad c_{14}=0; \quad c_{21}=1; \quad c_{22}=6; \quad c_{23}=14; \quad c_{24}=-5; \quad c_{31}=2; \quad c_{32}=-3; \\ c_{33}=-2; \quad c_{34}=5; \quad c_{41}=-7; \quad c_{42}=3; \quad c_{43}=7; \quad c_{44}=5$$

Dunque si ottiene:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 14 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \\ -7 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ -3 & 14 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & -\frac{7}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{14}{15} & -\frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$g) D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Risulta evidente che il determinante di una qualunque matrice diagonale è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Ne segue, pertanto:

$$\det D = -6 \neq 0$$

Si verifica immediatamente, poi, che i complementi algebrici degli elementi nulli sono uguali a zero da cui si ottiene:

$$c_{11} = 2; \quad c_{22} = -6; \quad c_{33} = -3$$

Quindi:

$$D^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = (D^*)^t$$

Dunque:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$h) A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Come di consueto si calcola, in primo luogo, il determinante della matrice data:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Pertanto A ammette l'inversa.

I complementi algebrici relativi agli elementi di A sono:

$$c_{11} = 5; \quad c_{12} = -2; \quad c_{13} = -6; \quad c_{21} = -2; \quad c_{22} = -2; \quad c_{23} = 1; \quad c_{31} = -1; \quad c_{32} = -1; \quad c_{33} = -3$$

Quindi si ha:

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^*)^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Verifica:

$\alpha) AA^{-1} = I_3$ (in generale $AA^{-1} = I_n$)

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} - \frac{6}{7} & \frac{6}{7} + \frac{1}{7} & \frac{3}{7} - \frac{3}{7} \\ -\frac{10}{7} - \frac{2}{7} + \frac{12}{7} & \frac{4}{7} - \frac{2}{7} - \frac{2}{7} & \frac{2}{7} - \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix} = I_3$$

$\beta) A^{-1}A = I_3$ (in generale $A^{-1}A = I_n$)

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} + \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} & \frac{2}{7} + \frac{6}{7} - \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} + \frac{6}{7} & \frac{6}{7} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} & \frac{1}{7} + \frac{6}{7} \end{pmatrix} = I_3$$

Le verifiche degli esempi precedentemente riportati sono lasciate per esercizio allo studente.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \right]$$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right]$$

5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

6) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right]$$

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\left[A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{60} & \frac{7}{60} & \frac{17}{60} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{6}{7} & \frac{6}{11} & \frac{1}{1} \\ -\frac{6}{60} & \frac{11}{60} & \frac{1}{60} \end{pmatrix} \right]$$

$$8) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{8} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{15}{13} & \frac{9}{13} & -\frac{5}{13} \\ \frac{6}{13} & -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{10}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{3}{10} \\ -\frac{9}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{40} & \frac{3}{20} \\ -\frac{20}{3} & -\frac{10}{3} & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} \\ \frac{20}{3} & \frac{10}{3} & \frac{9}{20} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

F) Verificare se i vettori riportati negli esercizi 1)-5) sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti e, nell'ipotesi in cui si verifichi quest'ultimo caso, esprimere uno di essi come combinazione lineare degli altri due, dopo aver osservato gli esempi a)-b):

a) $\vec{v}_1(1,0,-2), \vec{v}_2(0,-3,2), \vec{v}_3(3,-6,-2)$

Si consideri la matrice associata ai tre vettori assegnati:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Com'è facile verificare risulta $\det A = 0$; quindi, in virtù di un teorema precedentemente riportato, i tre vettori sono linearmente dipendenti. Risulta ora possibile esprimere uno di essi, ad esempio \vec{v}_3 , come combinazione lineare degli altri due nel modo seguente:

$$\vec{v}_3(3, -6, -2) = \alpha \vec{v}_1(1, 0, -2) + \beta \vec{v}_2(0, -3, 2) \Rightarrow (3, -6, -2) = \alpha(1, 0, -2) + \beta(0, -3, 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 = \alpha \\ -6 = -3\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Dunque una combinazione lineare è data da:

$$\vec{v}_3 = \alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_3 = 3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$$

Osservazione

Chiaramente era possibile esprimere, ad esempio, il vettore \vec{v}_2 in funzione dei rimanenti ottenendo, così, una combinazione lineare diversa dalla precedente (la verifica è lasciata, per esercizio, allo studente).

b) $\vec{v}_1(3, -2, 5), \vec{v}_2(1, -1, 0), \vec{v}_3(0, 4, -2)$

Procedendo come nell'esempio precedente si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Poiché risulta $\det A = 22 \neq 0$, i tre vettori sono linearmente indipendenti.

- | | |
|---|---|
| 1) $\vec{v}_1(-1, 2), \vec{v}_2(3, 1)$ | [L.I.] |
| 2) $\vec{v}_1(-1, 1), \vec{v}_2(0, 3), \vec{v}_3(2, 1)$ | [L.D.; $\vec{v}_2 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_3$] |
| 3) $\vec{v}_1(1, -1), \vec{v}_2(0, 1), \vec{v}_3(-1, 1)$ | [L.D.; $\vec{v}_1 = -\vec{v}_3$] |
| 4) $\vec{v}_1(1, 5, -4), \vec{v}_2(2, 0, 1), \vec{v}_3(4, 10, -7)$ | [L.D.; $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$] |
| 5) $\vec{v}_1(3, -7, 1), \vec{v}_2(1, -1, 2), \vec{v}_3(-2, 2, -4)$ | [L.D.; $\vec{v}_3 = -2\vec{v}_2$] |