VETTORI, CINEMATICA IN 2 DIMENSIONI
Corso di biofisica, cds biotecnologie

Annalaura Sabatucci

Vettori

SCALARI E VETTORI

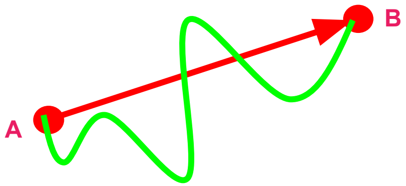
Il moto dei corpi non avviene generalmente in 1 direzione, ma nel piano o nello spazio (2D, 3D).

In generale, per definire le grandezze fisiche che caratterizzano il moto:
posizione, spostamento, velocità, accelerazione

non è sufficiente indicare la quantità numerica, ma dobbiamo specificare una DIREZIONE rispetto al nostro SR

Tali grandezze sono dette GRANDEZZE VETTORIALI e vengono rappresentate mediante VETTORI

(NB la distanza percorsa da un punto materiale invece non ha bisogno di indicare una direzione: è una quantità SCALARE anche in 2- 3 dimensioni!)



Misurabili scalari e vettoriali

Tempo, lunghezza, distanza, area, massa, pressione....

grandezze **SCALARI**

Definite dal MODULO e dal segno

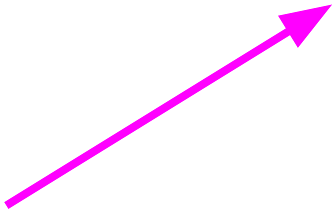
posizione, spostamento, velocità, accelerazione, forza....

grandezze **VETTORIALI**

(dobbiamo conoscere la **direzione**)

VETTORI

DEF: VETTORE: retta orientata

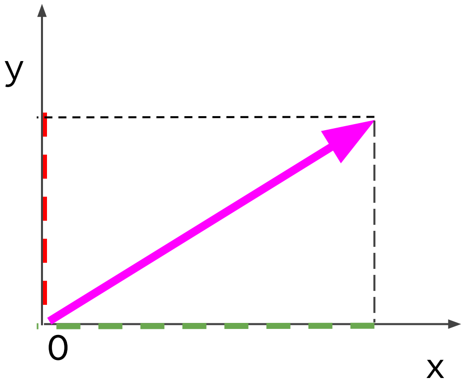


- **origine: l'estremo del vettore NON munito di freccia**
- **estremo superiore: quello che reca la freccia.**

NB per indicare una grandezza vettoriale utilizzeremo il grassetto oppure una freccia sopra al simbolo della grandezza

DEF: COMPONENTI DI UN VETTORE RISPETTO AD UN SR cartesiano:
proiezioni del vettore lungo gli assi

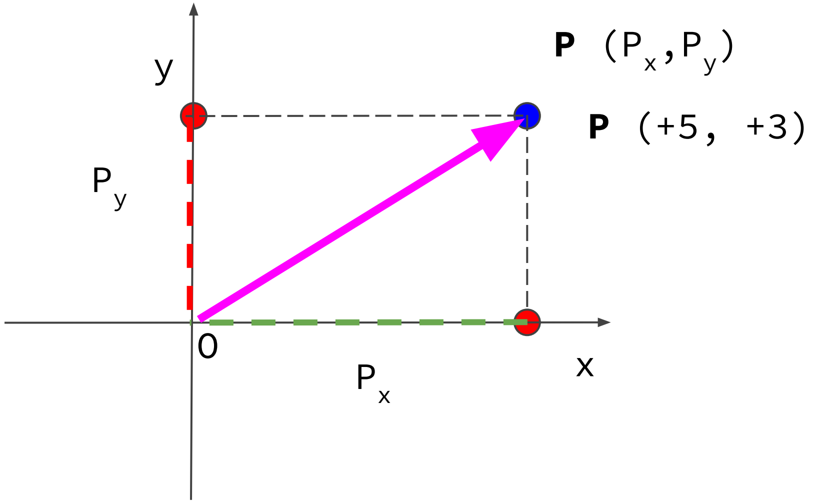
(la direzione è implicita, quindi possiamo trattare le componenti come scalari, considerando solo il verso.
Notiamo che le proiezioni di segmenti lungo assi ortogonali tra di loro sono nulle)



VETTORE POSIZIONE in 2 dimensioni

$P_x = +5$
$P_y = +3$

P_x, P_y, = componenti del vettore = proiezioni lungo gli assi cartesiani



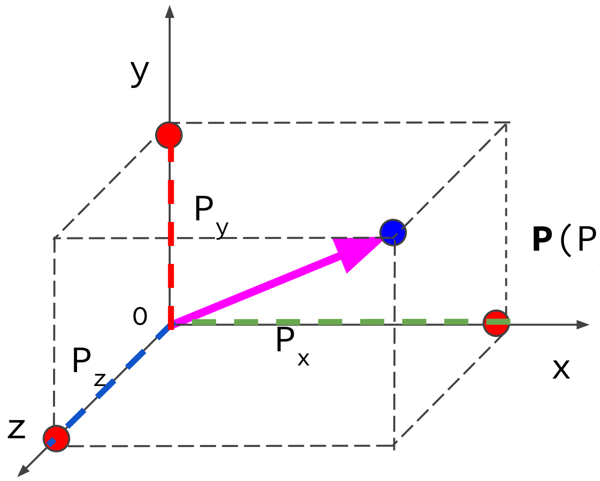
Vettore posizione **P** del punto materiale

VETTORE POSIZIONE in 3 dimensioni

3 dimensioni

$P_x = +5$
$P_y = +3$
$P_z = +3$

P_x, P_y, P_z = componenti del vettore posizione
= proiezioni lungo gli assi cartesiani



P(P_x, P_y, P_z) **P**$(+5,+3,+3)$

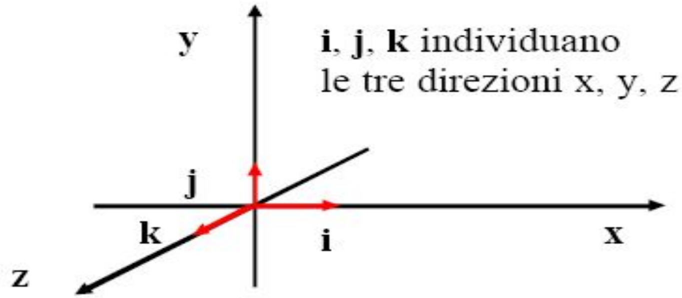
(animazione)

Versori

Vettori unitari

Un **vettore unitario** è detto **versore** ed è un vettore di **modulo = 1**, utilizzato per individuare una particolare direzione.

Sistema destrorso di coordinate cartesiane ortogonali



i, **j**, **k** individuano le tre direzioni x, y, z

P_x, P_y, P_z sono le componenti SCALARI del vettore

$\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}_z$ sono le componenti VETTORIALI

Notazioni EQUIVALENTI:

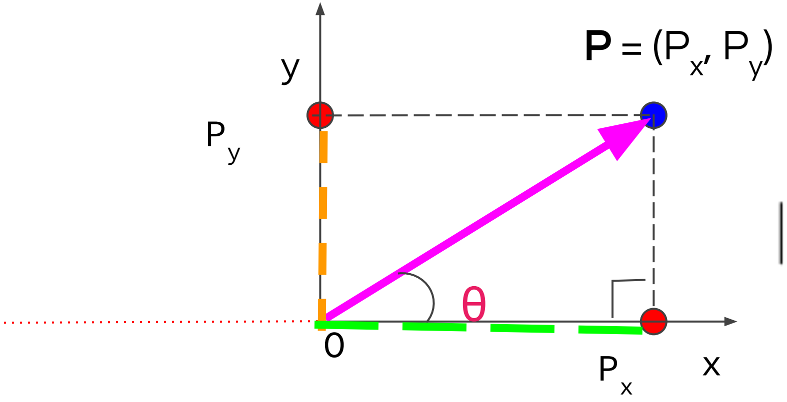
$$\mathbf{P} = (P_x;\ P_y;\ P_z)$$

$$\mathbf{P} = (P_x\,\hat{\imath} + P_y\,\hat{\jmath} + P_z\,\hat{k}) = (\mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y + \mathbf{P}_z)$$

VETTORI IN 2D

1) Il MODULO (ovvero: il teorema di Pitagora)

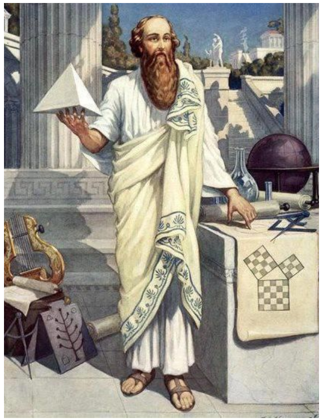
Dato un vettore **P** , il modulo |**P**| =P, si ottiene considerando il triangolo rettangolo formato dalle sue **componenti :**



MODULO:

$$P^2 = P_x^2 + P_y^2$$

$$|\mathbf{P}| = P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$



Pitagora
Samo, VI sec a.C-
Crotone 496 a.C.

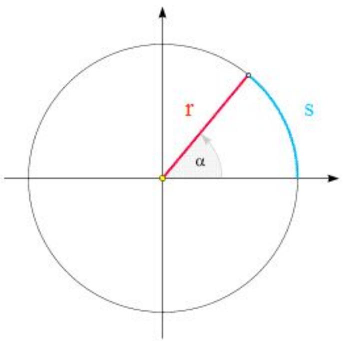
Es. **P**=(+5,+3)

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{5^2+3^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34} = 5.8$$

RICHIAMI DI TRIGONOMETRIA: Misura degli angoli

L'unità di misura per un **angolo piano** che conosciamo è il GRADO sessagesimale (°).
angolo retto: 90 °; angolo piatto: 180°; angolo giro: 360°

Unità di misura SI: **radianti (rad)**:



L'angolo in radianti è definito come il rapporto tra la lunghezza s dell'arco sotteso dall'angolo e la lunghezza r del raggio della circonferenza alla quale l'arco appartiene:

$$\alpha(radianti) = \frac{s}{r}$$

CONVERSIONE GRADI-RADIANTI:
Convertiamo in radianti un angolo giro (360°)
arco (s)= circonferenza (c)
Ricordiamo che la misura della circonferenza è
c=2 π r
=> s/r= c/r = 2 π r /r =2 π =>

360° = 2π rad

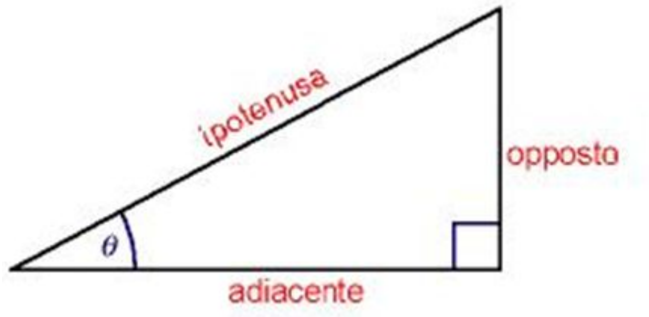
180°=π rad
90°=π/2 rad

OCCHIO ALLA CALCOLATRICE!
(impostare in GRADI (DEG) o in RADIANTI (RAD))

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Dato un triangolo rettangolo <u>di raggio 1</u>, definiamo le

funzioni trigonometriche dell'angolo ϑ
seno (sinϑ); coseno (cos ϑ) e tangente (tg ϑ) :



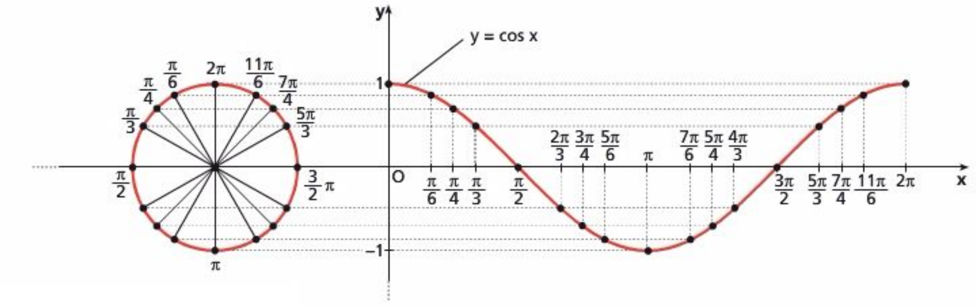
DEF: sin θ= proiezione dell'ipotenusa sul cateto opposto all'angolo
=> sin θ= cateto opposto all'angolo /ipotenusa

DEF cosθ=proiezione dell'ipotenusa sul cateto adiacente all'angolo
=> cosθ = cateto adiacente all'angolo / ipotenusa

DEF tgθ=sin θ/cosθ

Le funzioni seno e coseno hanno valori compresi tra -1 ed 1 (in modulo compresi tra 0 e 1)
$\forall\ x \in R, f(x) \in [-1; 1]$

coseno



$\cos 0=1$
$\cos \pi/2=0$
$\cos \pi=-1$
$\cos (3/2)\pi=-1$

seno

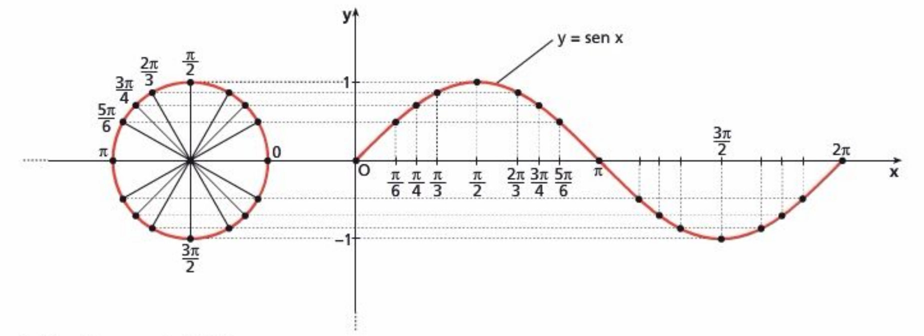
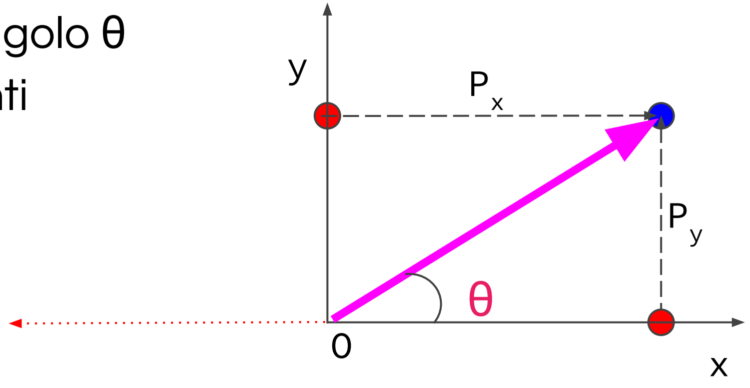


Grafico di $y = \text{sen}\, x$ in $[0; 2\pi]$.

$\sin 0=0$
$\sin \pi/2=1$
$\sin \pi=0$
$\sin (3/2)\pi=-1$

VETTORI IN 2D
2) componenti ed angolo

Dato un vettore **P** = (P_x, P_y) formante un angolo θ con l'asse delle ascisse, valgono le seguenti relazioni tra le componenti e l'angolo:



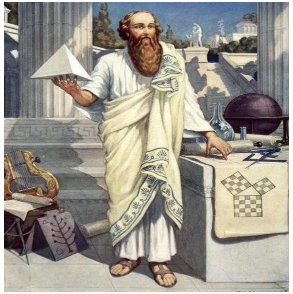
$$\begin{cases} P_x = \mathbf{P} \cos\theta \\ P_y = \mathbf{P} \sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{P_y/P_x = \sin\theta/\cos\theta = \mathrm{tg}\,\theta}$$

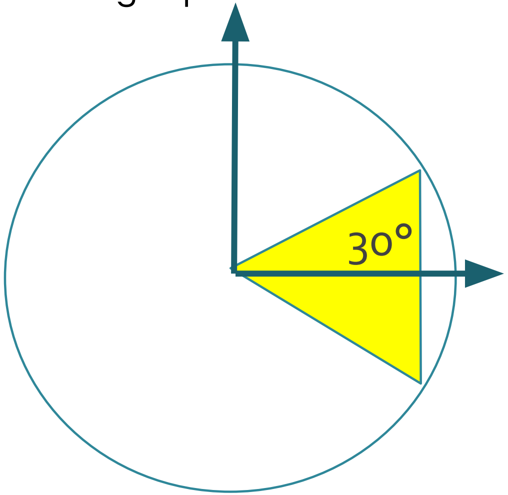
ES.
Es. **P**=(+5,+3)
tg θ = $\mathbf{P}_y/\mathbf{P}_x$ =3/5 =0.6

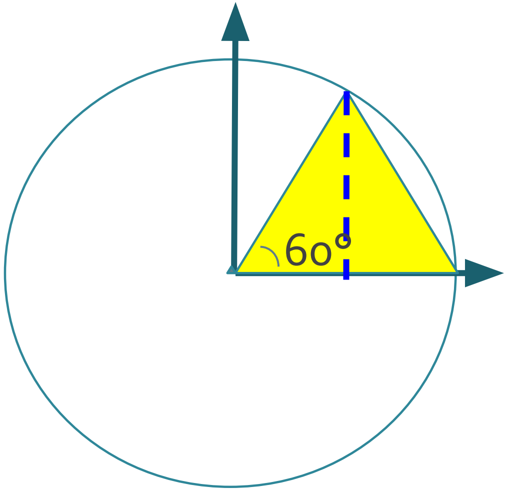
θ =arctg (0.6) = 31 ° (= 0.54 rad)
VERIFICA:
P cos θ= 5.8*cos(31)=5.8*0.86=5
P sin θ = 5.8*sin(31)=5.8*0.52=3

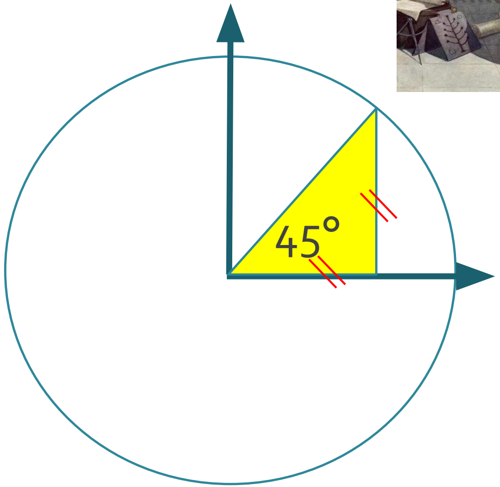
Componenti dei vettori: ANGOLI NOTEVOLI



Consideriamo un cerchio di raggio unitario. Il raggio è l'ipotenusa di triangoli rettangoli particolari







$$\sin\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$tg\alpha = \sqrt{3}$$

$$\sin\alpha = \cos\alpha$$

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$$

$$2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\alpha = 1$$

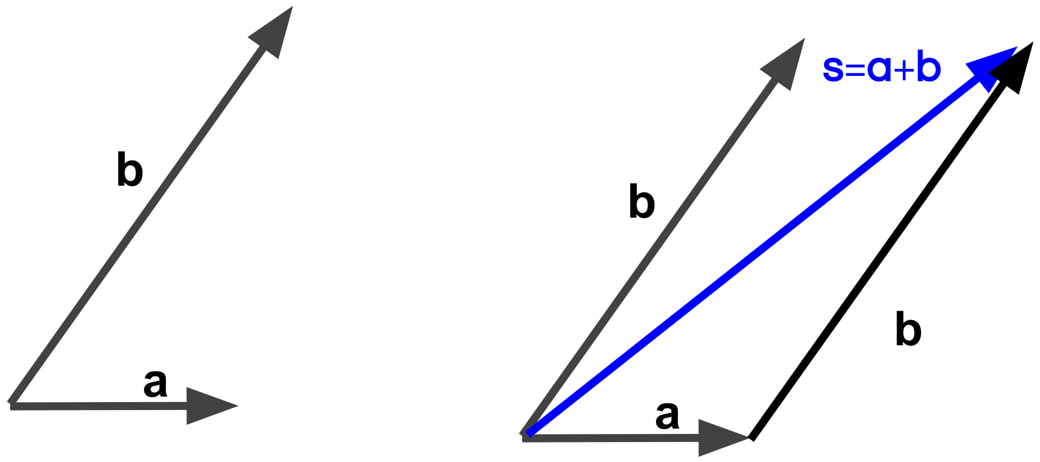
operazioni con i vettori

- SOMMA
- DIFFERENZA
- PRODOTTO DI UNO SCALARE PER UN VETTORE

1) Somma di vettori

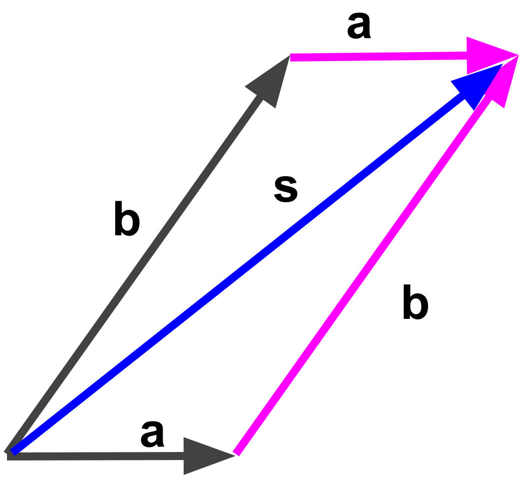
- **METODO GRAFICO 1 : (PUNTA-CODA)**

Dati 2 vettori **a**, **b**, per disegnare graficamente il vettore somma **s** = **a**+**b** , si trasla b in modo dar fa coincidere la sua origine con l'estremo superiore di **a**.
La somma è data dal vettore **s** che ha origine coincidente con l'origine rimasta libera ed estremo superiore coincidente con quello rimasto libero.



1) Somma di vettori

- METODO GRAFICO 2: LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



s=**a**+**b**

il vettore somma è la diagonale del parallelogramma formato dai vettori **a** e **b**

1) Somma di vettori

Dati 2 vettori **a** (a_x, a_y), **b** (b_x, b_y), il vettore somma (**s = a+b**) è un vettore le componenti (s_x, s_y) sono date dalla somma delle singole componenti:

SOMMA DI 2 VETTORI s = a+b

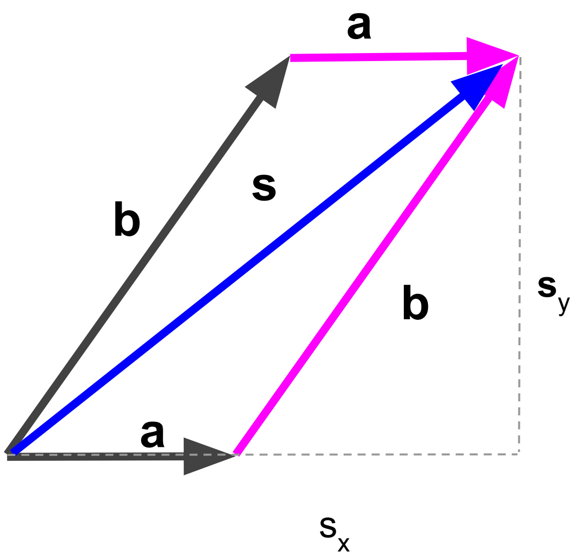
COMPONENTI:

$\mathbf{s}_x = \mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x$; $\mathbf{s}_y = \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y$

$\mathbf{s}\ (\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y) = (\mathbf{a}_x + \mathbf{b}_x, \mathbf{a}_y + \mathbf{b}_y)$

MODULO:

$$s=\sqrt{(\mathbf{a}_x+\mathbf{b}_x)^2+(\mathbf{a}_y+\mathbf{b}_y)^2}$$



NB. La somma gode della proprietà commutativa: a+b=b+a

esempio di somma di 2 vettori

Dati i vettori

a (4, 0) e **b** (5, 7), calcoliamo componenti e modulo del vettore somma **s**.

COMPONENTI:

$s_x = a_x + b_x = 4+5=9$

$s_y = a_y + b_y = 0+7=7$

=> **s** (9,7)

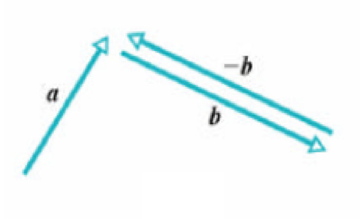
MODULO:

$s=\sqrt{9^2+7^2}=\sqrt{81+49}=11.4$

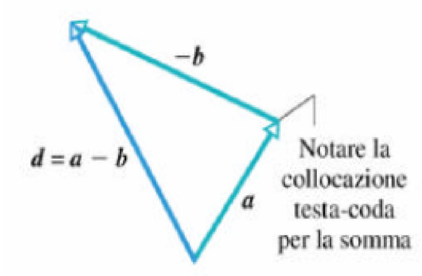
NB. La somma gode della proprietà commutativa:

a+b=b+a

2) Differenza di 2 vettori



Dati 2 vettori **a** (a_x,a_y), **b** (b_x, b_y), il vettore differenza (**d = a-b**) è dato dal vettore somma del primo (**a**) con l'opposto del secondo (-**b**):



DEF **Vettore OPPOSTO**

dato un vettore **b**, il vettore opposto (- **b)** è un vettore con modulo e direzione uguali al vettore **b** , ma orientato in verso opposto:

$$b + (- b) = 0$$

DIFFERENZA DI 2 VETTORI

d=a-b=a+(-b)

COMPONENTI:

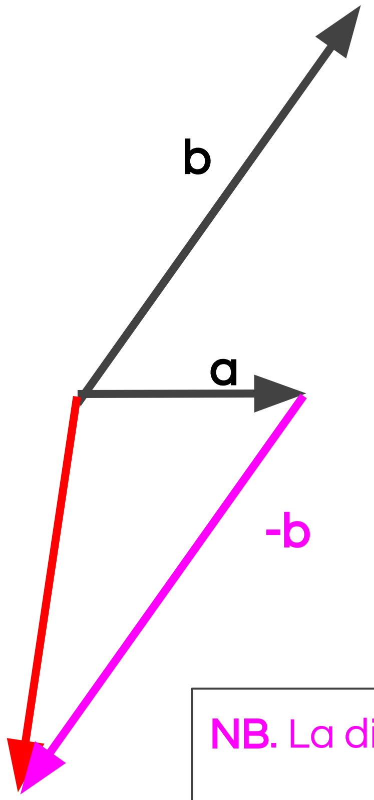
$d_x = a_x - b_x$; $d_y = a_y - b_y$

$d\ (d_x, d_y) = (a_x - b_x, a_y - b_y)$

MODULO:

$$s=\sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$$

GRAFICAMENTE
come per la somma!!!!



d= a-b=a+ (-b)

$\mathbf{a}=(\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y)= (4, 0)$

$\mathbf{b}= (\mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y) = (5, 7)$

$-\mathbf{b}= (-\mathbf{b}_x, -\mathbf{b}_y) = (-5,- 7)$

il vettore differenza **a-b** è dato da:

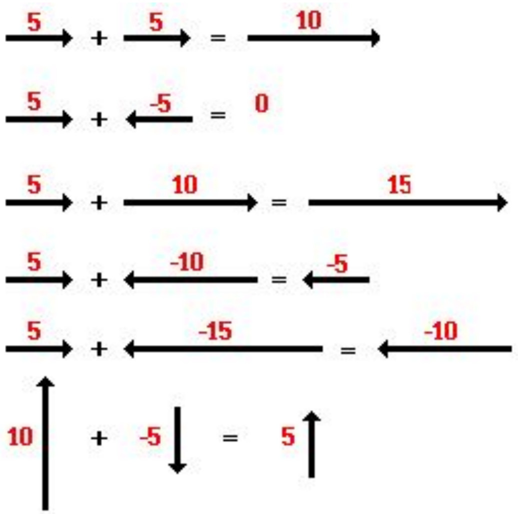
$\mathbf{d} = (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_y) = (\mathbf{a}_x+(-\mathbf{b}_x), \mathbf{a}_y+(-\mathbf{b}_y) =$

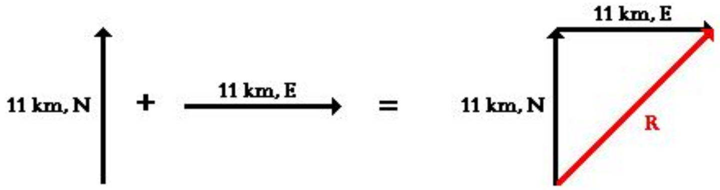
$(4-5, 0-7)= (-1, -7)$

$d=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=7.1$

NB. La differenza NON gode della proprietà commutativa

Esempi somma e sottrazione

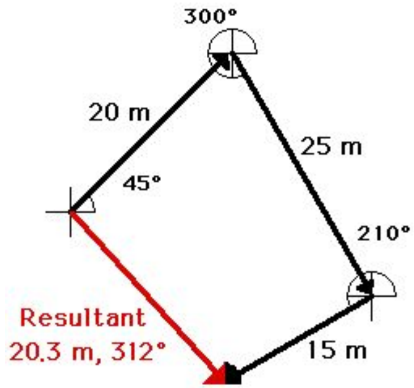


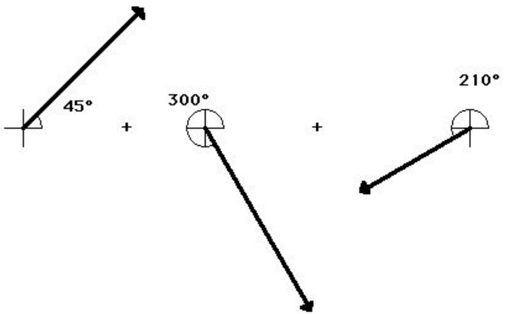


$$11^2 + 11^2 = R^2$$

$$242 = R^2$$

$$15.6 = R$$





3) Prodotto di uno scalare per un vettore

Il prodotto di un numero reale *m* per un vettore **v**

$$m\mathbf{v}$$

individua un nuovo vettore che ha per modulo il prodotto del modulo di **v** per il valore assoluto di m e per direzione la stessa di **v**. Il verso è conforme a quello di **v** se m è positivo, è opposto a quello di **v** se m è negativo.

4) Quoziente di un vettore per uno scalare

Il quoziente di un vettore v per uno scalare *m* è il prodotto, definito come sopra, tra il vettore **v** ed il reciproco (1/m) dello scalare m.

$$\mathbf{v}/m=\mathbf{v}\,(1/m)$$

Vedremo in seguito altre 2 operazioni con i vettori:
il prodotto scalare ed il prodotto vettoriale

CINEMATICA IN 2 DIMENSIONI

NOTAZIONE VETTORIALE delle grandezze fisiche

In generale, per definire le grandezze fisiche che caratterizzano il moto di un corpo:
posizione, spostamento, velocità, accelerazione
dovremo utilizzare la notazione **vettoriale**.

MOTO IN 2 DIMENSIONI:

Posizione : **P=**(x, y)

Spostamento: **ΔP** = **P**$_2$-**P**$_1$ = (x_2-x_1, y_2-y_1) è la differenza di vettori posizione

Velocità **v**= (v_x, v_y)

Accelerazione **a=** (a_x,a_y)

NB la **distanza** percorsa è una quantità scalare, anche in 2- 3 dimensioni!

La scomposizione di un vettore nelle sue componenti lungo gli assi cartesiani ci permetterà di lavorare con scalari .
INOLTRE, **in un SR cartesiano, i moti lungo i 2 assi sono indipendenti** (gli assi sono perpendicolari tra di loro=> le proiezioni dell'uno sull'altro sono nulle)

Il moto di un proiettile

DEF Proiettile:
punto materiale in moto bidimensionale, soggetto alla gravità .

=> in un SR cartesiano, lungo un asse agisce la gravità, mentre l'altra direzione è indipendente.

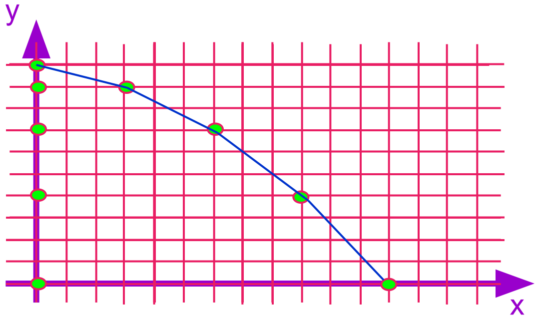
In generale vedremo che tale moto è di tipo **parabolico**

https://twitter.com/i/status/1135402353211797505

Il moto di un proiettile

1) Lancio diretto orizzontalmente

v=(v_{x0}, 0)



Mentre il corpo si muove orizzontalmente, è soggetto per effetto della gravità ad un moto verticale

Sperimentalmente si può evidenziare che:

- Il moto orizzontale e verticale sono **indipendenti** e non si influenzano a vicenda
- Il moto **orizzontale** è rettilineo uniforme (**MRU**)
- Il moto **verticale** è rettilineo uniformemente accelerato (**MUA**) (Caduta di un grave => accelerazione =g)

Il moto di un proiettile

1) equazioni del moto lancio orizzontale

Lancio il proiettile **dall'origine** degli assi lungo l'orizzontale (asse x) con velocità **v**=(v_{x0}, 0).

Scriviamo le equazioni del moto per un generico istante t

asse x: MRU
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{x0}t \\ v_x(t) = v_{x0} \end{cases}$$

asse y: MUA
$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}g\,t^2 \\ v_y(t) = v_{y0} - g\,t \\ a_y = -g \end{cases}$$

Condizioni iniziali (t=0)

$$\mathbf{P}(0) = (x_0, y_0) = (0, 0)$$
$$\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}) = (v_0, 0)$$
$$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$$

Sostituisco:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t & 1) \\ v_x(t) = v_0 & 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 & 3) \\ v_y(t) = -g\,t & 4) \\ a_y = -g & 5) \end{cases}$$

Ricaviamo l'equazione della **traiettoria** mettendo in relazione la proiezione del vettore posizione lungo le ordinate e lungo le ascisse

Dalla (1) ricaviamo il valore di t e sostituiamo nella (3):

Il moto di un proiettile

1) traiettoria lancio orizzontale

condizioniiniziali :

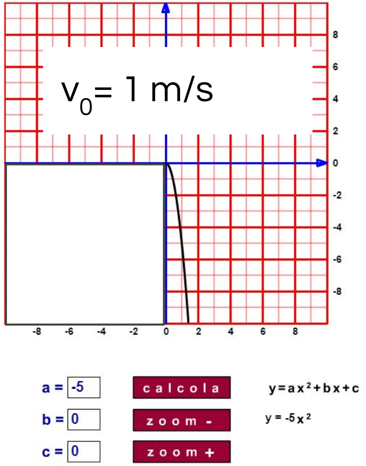
$\mathbf{P}(0) = (x_0, y_0) = (0,0)$
$\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}) = (v_0, 0)$
$\mathbf{a} = (a_x, a_y) = (0, -g)$

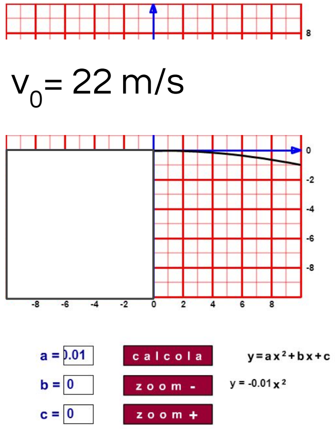
$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = -\frac{g}{2\,v_0^2}\,x^2 \Rightarrow \boxed{y = k\,x^2}$$

$$\text{dove } k = -\frac{g}{2\,v_0^2}$$

L' equazione che descrive la traiettoria del moto è una **parabola** simmetrica rispetto alla verticale passante per il punto di lancio

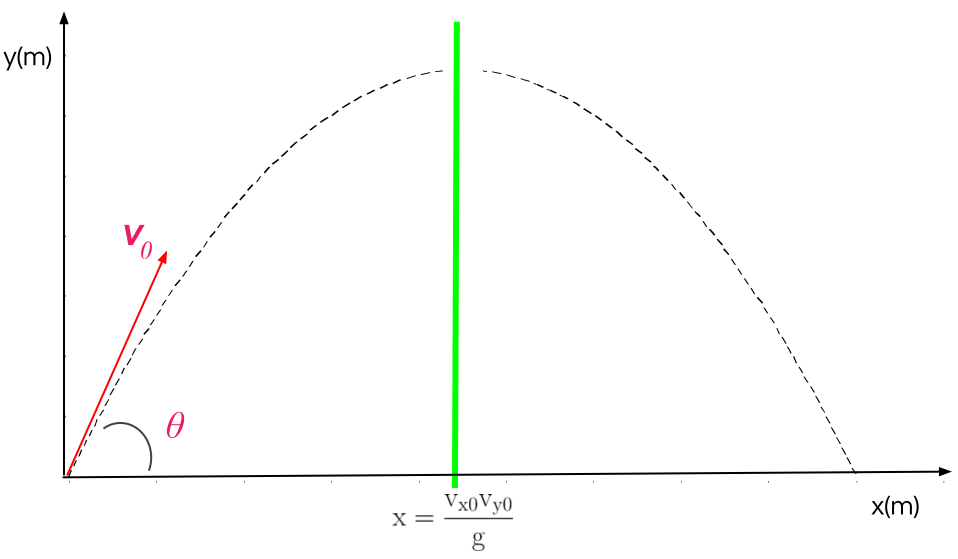




traiettoria (y vs x) per 2 diverse velocità iniziali: maggiore è v_0, più la traiettoria si approssima con una retta parallela all'asse delle ascisse

Il moto di un proiettile

2) Lancio diretto secondo un angolo θ qualsiasi



Poniamo l'origine degli assi nel punto di lancio.
La velocità di lancio è

$$\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0})$$

dove
$$\begin{cases} v_{x0} = (v \cos\theta) \\ v_{y0} = (v \sin\theta) \end{cases}$$

Equazioni del moto:

$$\begin{cases} x(t) = v_{x0} t \\ v_x = v_{x0} \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} y(t) = v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_y = v_{y0} - g t \end{cases} \quad (2)$$

Ricavo t dalla (1) e sostituisco nella (2) =>

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{v_{xo}} \\ \boxed{y = \dfrac{v_{yo}}{v_{x0}} \cdot x - \dfrac{g}{2 \cdot v_{x0}^2} \cdot x^2} \end{cases}$$

L'equazione della **traiettoria** e' una **parabola** con l'asse di simmetria parallelo all'asse verticale passante per il punto di lancio

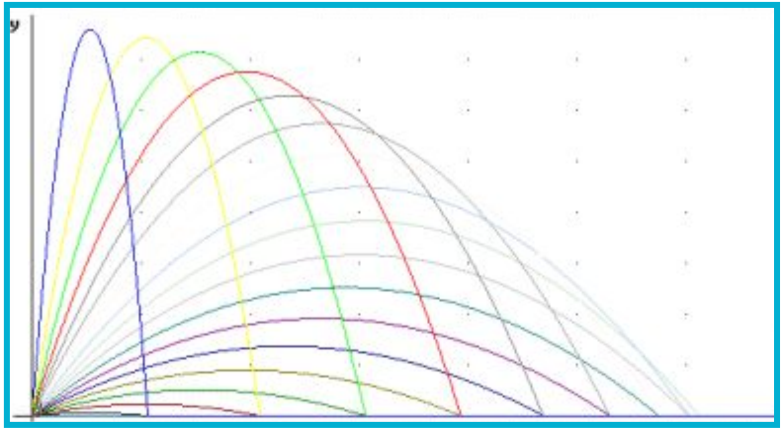
Il moto di un proiettile: gittata

DEF. Gittata (R): distanza percorsa dal proiettile lungo l'asse x prima di atterrare:

equazione generica: $x=x_0+v_{0x}t$. Sostituisco:

$$\boxed{R=v_x\,t_v}$$

dove
$R=x-x_0$
t_v è il tempo di volo



Quanto varia la gittata in funzione dell'angolo?
Per quale angolo avremo la gittata MASSIMA?

Ricaviamo il valore di R in funzione dell'**angolo** dalle equazioni del moto

Il moto di un proiettile: calcolo della gittata

Poniamo l'origine degli assi nel punto di partenza del proiettile **P**(0)= (0,0) e calcoliamo la distanza (R) percorsa lungo l'asse x quando il proiettile atterra di nuovo: $y(t)=y_0=0$

$$\begin{cases} \text{asse x: MRU} \\ \text{asse y: mua} \end{cases} \quad \begin{cases} R = v_0 cos\theta \cdot t \\ 0 = v_0 sin\theta \cdot \cancel{t} - \frac{1}{2} g t^{\cancel{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} '' \\ t = \frac{2 v_0 sin\theta}{g} \end{cases}$$

sostituisco t nell'equazione in x ed ho:

$$R = 2\frac{v_0^2 \cdot sin\theta \cdot cos\theta}{g}$$ dove $$2 \cdot sin\theta \cdot cos\theta = sin(2\theta)$$

$$\Rightarrow R = \frac{v_0^2 sin(2\theta)}{g}$$

GITTATA
in funzione
dell'angolo

$$\boxed{R = v_x t_v}$$

Il moto di un proiettile: gittata massima

- Per quale angolo si ha la massima gittata possibile?

$$\Rightarrow R = \frac{v_0^2 \boxed{sin(2\theta)}}{g}$$

$$sin(2\theta) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2\theta = 90^o$$
$$\Rightarrow \theta = 45^o$$

Quindi, la massima gittata R_{max} si ha per un angolo di lancio di 45 gradi:

$$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

Gittata MASSIMA R_{max}

$$\theta = 45^o$$

dove v_0 è il modulo della velocità di lancio