$$U = C^{\alpha} \cdot S^{1-\alpha} \qquad 0<\alpha<1$$

$$\frac{dU}{dC} = U'_C = \alpha C^{\alpha-1} S^{1-\alpha} > 0$$

$$\frac{d^2U}{dC^2} = U''_C = \alpha \cdot (\alpha-1) C^{\alpha-2} S^{1-\alpha} < 0$$

$$\frac{dU}{dS} = U'_S = (1-\alpha) C^{\alpha} S^{-\alpha} > 0$$

$$\frac{d^2U}{dS^2} = U''_S = (-\alpha)(1-\alpha) C^{\alpha} S^{-\alpha-1} < 0$$

Vincolo $\Rightarrow$ $R_{NL} + w(T-S) = p_c \cdot C$

Ricorda che $y = a x^n$

la derivata prima $\frac{dy}{dx} = y'_x = n a x^{n-1}$

le derivate seconde $\frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = \frac{d y'_x}{dx} = (n)\cdot(n-1) x^{n-2}$

Nel nostro caso $y = a x^n \cdot z^m$

derivata parziale rispetto ad x $\Rightarrow$ $y'_x = n a z^m x^{n-1}$

derivata parziale rispetto a z $\Rightarrow$ $y'_z = m a x^n z^{m-1}$

Il problema formale:

$$\begin{cases} \max\limits_{C,S} \; U = C^{\alpha} S^{1-\alpha} \\ \text{sub} \quad R_{WL} + w(T-S) = p_c \cdot C \\ \text{sub} \quad S \leq T \end{cases}$$

Sfruttando le condizioni del primo ordine (FOC) derivate dalla risoluzione con il metodo di Lagrange, noi sappiamo che le allocazione ottimale rispetta le seguenti condizione:

$$\frac{U'_c}{p_c} = \frac{U'_s}{w}$$ quindi sostituiamo con le rispettive utilità calcolate a pag. 1

$$\frac{\alpha C^{\alpha-1} S^{1-\alpha}}{p_c} = \frac{(1-\alpha) C^{\alpha} S^{-\alpha}}{w}$$

cerco la combinazione ottimale tra C ed S (isolo S in funzione di C)

moltiplico per S^{α} e per $C^{-\alpha}$

$$\frac{\alpha C^{-1} S}{p_c} = \frac{(1-\alpha)}{w}$$

ricordo che $C^{-1} = \frac{1}{C}$ per cui ho

$$\frac{\alpha S}{p_c \cdot C} = \frac{(1-\alpha)}{w}$$

moltiplico per $\frac{C \cdot p_c}{\alpha}$ ed ottengo $S = \frac{(1-\alpha)\, p_c}{\alpha \cdot w} \cdot C$

$$S = \frac{(1-\alpha)\, p_c}{\alpha\, w} \cdot C$$

posso anche invertire moltiplicando $\cdot \frac{\alpha w}{(1-\alpha) p_c}$ ed ottengo:

$$C = \frac{\alpha\, w}{(1-\alpha)\, p_c} \cdot S$$

Ricordate che vogliamo ottenere la forma ridotta del modello, cioè

$$S^* = f(R_{NL}, w, p_c, \alpha, T); \quad C^* = f(R_{NL}, w, p_c, \alpha, T)$$

Otteniamo la forma ridotta sostituendo C oppure S nel vincolo $[\, R_{NL} + w(T-S) = p_c \cdot C \,]$

$$R_{NL} + w(T-S) = p_c \cdot \frac{\alpha w}{(1-\alpha) p_c} \cdot S; \quad R_{NL} + wT - wS = \frac{\alpha w}{(1-\alpha)} S;$$

$$wS + \frac{\alpha w}{(1-\alpha)} S = R_{NL} + wT; \quad S\left[w + \frac{\alpha w}{(1-\alpha)}\right] = R_{NL} + wT; \quad S\left(\frac{w(1-\alpha) + \alpha w}{(1-\alpha)}\right) = R_{NL} + wT$$

$$S\left(\frac{w - w\alpha + \alpha w}{(1-\alpha)}\right) = R_{NL} + wT; \quad S\left(\frac{w}{1-\alpha}\right) = R_{NL} + wT; \quad S^* = \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)\left[R_{NL} + wT\right]$$

FORMA RIDOTTA DI S

$$S = \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)\left[R_{NL} + wT\right]$$

Dato che il rapporto ottimale tra S e C è dato da

$$C = \frac{\alpha w}{(1-\alpha)p_c} \cdot S$$

sostituisco ad S la sua forma ridotta

$$C = \left(\frac{\alpha \cancel{w}}{\cancel{(1-\alpha)}p_c}\right)\left(\frac{\cancel{1-\alpha}}{\cancel{w}}\right)\left[R_{NL} + wT\right] \; ; \qquad C^* = \left(\frac{\alpha}{p_c}\right)\left[R_{NL} + wT\right]$$

$$\left.\begin{aligned} S^* &= f(\alpha, w, R_{NL}, T) \\ C^* &= f(\alpha, p_c, R_{NL}, w, T) \end{aligned}\right\}$$

le forme ridotte sono utili per fare analisi di statica comparata

$$S^* = \left(\frac{1-\alpha}{w}\right)\left[R_{NL} + wT\right]$$

$$S^* = f\left(\overset{-}{\overset{?}{\alpha}},\ \overset{-}{\overset{?}{w}},\ \overset{+}{\overset{?}{R_{NL}}},\ \overset{+}{\overset{?}{T}}\right)$$

$$\frac{dS^*}{d\alpha} = -\frac{1}{w}\left(R_{NL} + wT\right) < 0$$

$$\frac{dS^*}{dw} = \left[-(1-\alpha)\,w^{-2}\right]\left[R_{NL} + wT\right] + T\left(\frac{1-\alpha}{w}\right);\ \left[-\frac{(1-\alpha)}{w^2}\right]R_{NL} - \cancel{\frac{(1-\alpha)wT}{w^2}} + \cancel{\frac{T(1-\alpha)}{w}} < 0$$

$$\frac{dS^*}{dR_{NL}} = \frac{(1-\alpha)}{w} > 0$$

$$\frac{dS^*}{dT} = (1-\alpha) > 0$$