Hp: 2 competitors identici A, B
ognuno dei quali massimizza la sua funzione di profitto

$$\pi_A = p_A(x_A, x_B) \cdot Z - c\, x_A \qquad \text{funzione di profitto di } A$$

$$\pi_B = p_B(x_A, x_B) \cdot Z - c\, x_B \qquad \text{funzione di profitto di } B$$

dove $p_A = \dfrac{x_A^r}{x_A^r + x_B^r}$; $p_B = \dfrac{x_B^r}{x_A^r + x_B^r}$

L'Agente A

$$\max_{x_A} \pi_A = \frac{x_A^r}{x_A^r + x_B^r} \cdot Z - c\, x_A$$

Imposto le condizioni del primo ordine

$$\frac{d\pi_A}{dx_A} = 0 \; ; \; \frac{\left[r x_A^{r-1}\left(x_A^r + x_B^r\right) - r x_A^{r-1} \cdot x_A^r\right] \cdot Z}{\left(x_A^r + x_B^r\right)^2} = c \;\Rightarrow\; \frac{\left[\cancel{r x_A^{2r-1}} + r x_A^{r-1} x_B^r - \cancel{r x_A^{2r-1}}\right] \cdot Z}{\left(x_A^r + x_B^r\right)^2} = c$$

$$\frac{\gamma x_A^{\gamma-1} \cdot x_B^{\gamma}}{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2} \cdot Z = c$$

L'agente B

$$\max_{x_B} \Pi_B = \frac{x_B^{\gamma}}{x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma}} \cdot Z - c\, x_B$$

$$\frac{d\Pi_B}{dx_B} = \emptyset \;; \quad \frac{\left[\gamma x_B^{\gamma-1}\left(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma}\right) - \gamma x_B^{\gamma-1} x_B^{\gamma}\right] \cdot Z}{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2} = c$$

$$\frac{\left[\gamma x_B^{\gamma-1} x_A^{\gamma} + \cancel{\gamma x_B^{2\gamma-1}} - \cancel{\gamma x_B^{2\gamma-1}}\right] \cdot Z}{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2} = c$$

$$\frac{\gamma x_B^{\gamma-1} x_A^{\gamma}}{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2} \cdot Z = c$$

In equilibrio sarà

$$\frac{\cancel{\gamma} x_A^{\gamma-1} x_B^{\gamma}}{\cancel{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2}} \cdot \cancel{Z} = \frac{\cancel{\gamma} x_B^{\gamma-1} x_A^{\gamma}}{\cancel{(x_A^{\gamma} + x_B^{\gamma})^2}} \cdot \cancel{Z}$$

$$x_A^{\cancel{\gamma}-1} \cancel{x_B^{\gamma}} = x_B^{\cancel{\gamma}-1} \cancel{x_A^{\gamma}}$$

$$\left(x_A^{-1}\right)^{-1} = \left(x_B^{-1}\right)^{-1} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$\frac{\gamma x_A^{\gamma-1} x_A^{\gamma}}{(x_A^{\gamma} + x_A^{\gamma})^2} \cdot Z = c \;; \quad \frac{\left(\gamma x_A^{2\gamma-1}\right) \cdot Z}{(2 x_A^{\gamma})^2} = c$$

$$\frac{\gamma\, x_A^{\cancel{2\gamma}-1}}{4\,\cancel{x_A^{2\gamma}}} \cdot Z = c$$

$$\frac{\gamma\, x_A^{-1} \cdot Z}{4} = c$$

Risolviamo rispetto ad x_A

$$\frac{\gamma Z}{4 x_A} = c \qquad \left(\begin{array}{l}\text{moltiplico per } x_A \\ \text{e divido poi per } c\end{array}\right)$$

$$c\, x_A = \frac{\gamma Z}{4}$$; ed infine

$$x_A^* = \frac{\gamma Z}{4c}$$ effort di equilibrio del competitor A

Per simmetria $x_A^* = x_B^*$ per cui

$$x_B^* = \frac{\gamma Z}{4c}$$

$$\frac{d x_A^*}{dZ} = \frac{\gamma}{4c} > 0 = \frac{d x_B^*}{dZ}$$

$$\frac{d x_A^*}{d\gamma} = \frac{Z}{4c} > 0 = \frac{d x_B^*}{d\gamma}$$

$$\frac{d x_A^*}{dc} = \frac{-4\gamma Z}{(4c)^2} < 0 = \frac{d x_B^*}{dc}$$

Una volta calcolato gli effort di equilibrio rimane da calcolare qual'è l'equilibrio competitivo del "CONTEST"

Definiamo equilibrio competitivo (EC) il rapporto tra le probabilità di vittoria "ex ante" dei due contendenti

$$EC_{A/B} = \frac{P_A^*(x_A^*, x_B^*)}{P_B^*(x_A^*, x_B^*)}$$

$$P_A^* = \frac{(x_A^*)^r}{[(x_A^*)^r + (x_B^*)^r]}$$

$$P_B^* = \frac{(x_B^*)^r}{[(x_A^*)^r + (x_B^*)^r]}$$

$$EC_{A/B}^* = \frac{\frac{(x_A^*)^r}{\cancel{[(x_A^*)^r + (x_B^*)^r]}}}{\frac{(x_B^*)^r}{\cancel{[(x_A^*)^r + (x_B^*)^r]}}} \Rightarrow EC_{A/B}^* = \frac{(x_A^*)^r}{(x_B^*)^r}$$

ma in equilibrio $x_A^* = x_B^*$ per cui

$$EC_{A/B}^* = \frac{(x_A^*)^r}{(x_A^*)^r} \Rightarrow EC_{A/B}^* = 1$$

equilibrio competitivo perfetto!!!