Indici statistici di variabilità

Rendimento azioni Amazon e Microsoft a confronto

Anno	Microsoft	Amazon
1	1,6%	2,5%
2	5,4%	4,5%

Il rendimento medio e mediano sono uguali, ma Amazon ha rendimenti che vanno dal 2,5% al 4%, mentre Microsoft ha variazioni più ampie.

Indici di variabilità

L'utilizzo di indici di tendenza centrale non è sufficiente a discriminare situazioni molto differenti.

La **variabilità** rappresenta l'attitudine della variabile ad assumere diverse modalità.

In questo caso l'indicatore dovrà essere capace di graduare la variabile in termini di dispersione delle modalità rispetto ad un unico valore di sintesi (ad esempio una misura di posizione).

La concentrazione è in qualche modo una misura simmetrica della variabilità; quando un fenomeno è molto concentrato su un valore, si dice ragionevolmente che c'è poca variabilità.

Indici di variabilità

Un indice di variabilità:
- deve essere un numero positivo
- deve valere zero se calcolato su una distribuzione costante
- deve essere invariante se aggiungo una costante ad X

Gli indici di dispersione sono:
- l'**Intervallo di variazione (range)**
- lo **scarto interquartile**
- la **Varianza**
- la **Deviazione standard**
- il **Coefficiente di variazione**

Range

Il **range** (intervallo o campo di variazione) è la misura più semplice di variabilità ed è dato dalla differenza tra il valore più grande meno il valore più piccolo della distribuzione. Fornisce un'idea dello spazio all'interno del quale si muove il fenomeno, ma non dice nulla sulla variabilità all'interno dell'intervallo.

Range = Valore più grande – valore più piccolo
Esempio: calcolo il range dei seguenti stipendi

3310	3355	3450	3650	3730	3925

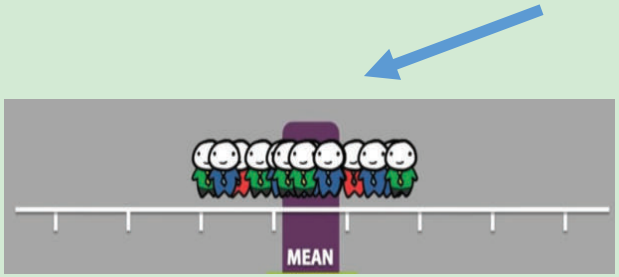
Range = 3925-3310 = 615

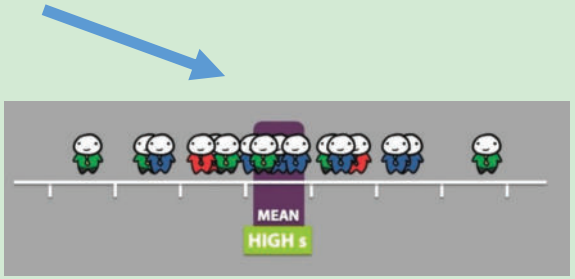
Limiti del range

Si base solo su due osservazioni e quindi è fortemente influenzato dai valori estremi.

È una misura che non indica come, ma solo quanto sono dispersi i dati.

Non ci dice se i dati sono concentrati attorno al valore centrale o attorno ad un altro valore o se sono distribuiti in modo omogeneo.





Esercizio

Calcolare il range e lo scarto interquartile della seguente distribuzione: 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 24.

Esercizio

Calcolare il range e lo scarto interquartile della seguente distribuzione: 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 24.

Range = 24-3 = 19
Q1 = 0,25*11(N) = 2,75 quindi la posizione 3, corrisponde al numero 4.
Q3 = 0,75*11(N) = 8,25 quindi la posizione 9, che corrisponde al numero 7.
IQR = 7-4 = 3

Varianza

La **varianza** è una misura della variabilità che utilizza tutti i dati.

Si basa sulla differenza tra il valore di ciascuna osservazione xi e la media. Tale differenza viene definita scarto dalla media.

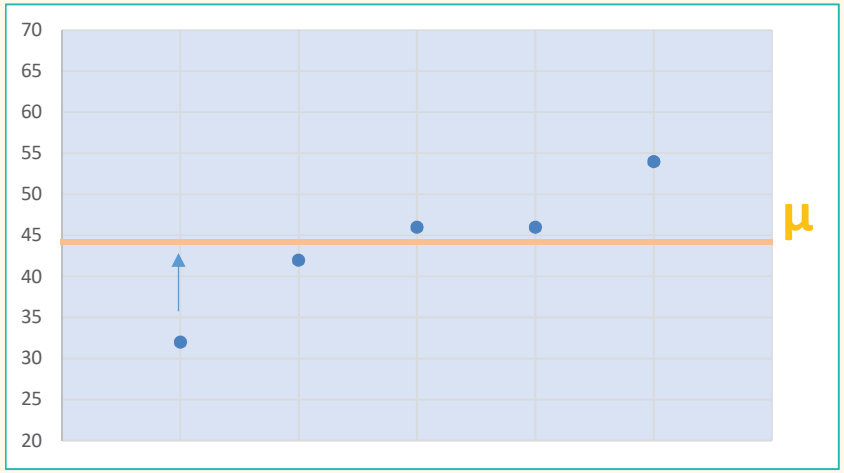
Nel calcolo gli scarti sono elevati al quadrato, quindi la varianza ha sempre valore positivo.

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \ldots + (x_n - M)^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M)^2$$

Calcolo della varianza

La **varianza** descrive e quantifica la dispersione dei dati intorno al valore centrale della popolazione.

Si calcola la distanza esistente tra ogni singola osservazione e la media, che per definizione è nulla, per cui bisogna elevare al quadrato le distanze rilevate.



Esercizio

N. di studenti	xi - μ	xi - μ	$(xi - \mu)^2$
46	46-44	2	4
54	54-44	10	100
42	42-44	-2	4
46	46-44	2	4
32	32-44	-12	144
			$\sum$ 256

$\sigma^2 = 256/5 = 51,2$

Proprietà della varianza

Il valore zero equivale alla non dispersione e può essere ottenuto solo se tutte le osservazioni sono identiche.

Es. la seria 3, 3, 3, 3 avrà media 3 e varianza 0.

Il caso di massima variabilità si ha quando una unità possiede tutto il fenomeno e le altre n-1 unità hanno la modalità pari a zero.

Se moltiplico X per qualsiasi costante b, Y=bX allora la varianza di Y sarà moltiplicata per b^2 ovvero $\mathbf{varY=b^2\,\sigma^2}$

Varianza per le distribuzioni di frequenza

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - M)^2 n_1 + (x_2 - M)^2 n_2 + \ldots + (x_k - M)^2 n_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - M)^2 n_i = \sum_{i=1}^{k}(x_i - M)^2 f_i$$

xi (voti)	ni (studenti)	xi - μ	$(xi - \mu)^2$	$(xi - \mu)^2 * ni$
24	18	-2,5	6,25	112,5
25	12	-1,5	2,25	27
26	16	-0,5	0,25	4
27	17	0,5	0,25	4,25
28	10	1,5	2,25	22,5
29	22	2,5	6,25	137,5
	∑ 95	0		∑ 307,75

μ=26,5

σ^2 = 307,75/95= 3,239

Deviazione standard

La **deviazione standard** (detta anche **errore standard, scarto quadratico medio, scarto tipo**) è definita come la radice quadrata della varianza.
Oltre a fornire informazioni su come il fenomeno sia disperso intorno al valore medio, dà un risultato nella stessa unità di misura della media.

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{n}}$$

Indici di variabilità

La **varianza** e la **deviazione standard** appartengono al gruppo degli scostamenti medi, indicatori che misurano la tendenza delle varie modalità del carattere a disperdersi attorno a un valore medio (dispersione), solitamente la media aritmetica.
In assenza di dispersione (distribuzione costante), gli indici assumono valore nullo.

Varianza

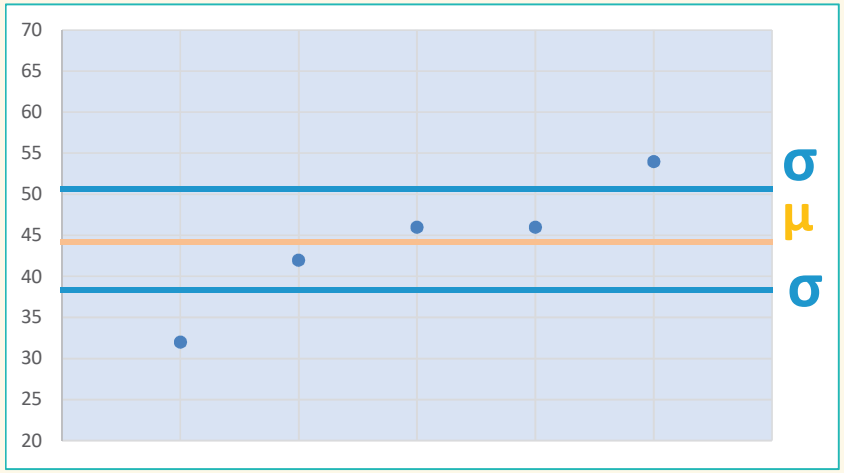
espressa al quadrato dell'unità di misura del carattere

Deviazione standard

espressa su scala lineare, di migliore interpretazione

Calcolo

$\sigma^2 = 256/5 = 51{,}2 \quad \sigma = 51{,}2^{(1/2)} = 7{,}1$



Esercizio

Calcolare la varianza e la deviazione standard per la seguente distribuzione: 4, 9, 9, 5, 8, 5, 6, 1.

μ=5,875

xi	
4	
9	
9	
5	
8	
5	
6	
1	

Esercizio

Calcolare la varianza e la deviazione standard per la seguente distribuzione: 4, 9, 9, 5, 8, 5, 6, 1.

μ=5,875

xi	xi - μ	$(xi - \mu)^2$
4	-1,875	3,52
9	3,125	9,77
9	3,125	9,77
5	-0,875	0,77
8	2,125	4,52
5	-0,875	0,77
6	0,125	0,02
1	-4,875	23,77
		$\sum$ 52,87

σ^2= 52,87/8= 6,61

$\sigma = \sqrt{6,61} = 2,57$

Esempio

Abbiamo 2 farmaci per il trattamento della pressione arteriosa e vediamo che effetto hanno dopo la somministrazione:

Farmaco	Prima		Dopo	
	Media	DV	Media	DV
1	90	15	70	10
2	90	15	70	15

Esempio

I 2 farmaci hanno prodotto gli stessi risultati medi?

I pazienti del farmaco 1 hanno avuto una reazione più omogenea?

Ogni paziente del farmaco 1 dopo il trattamento ha registrato livello di pressione inferiore rispetto ai pazienti del trattamento 2?

I pazienti del farmaco 2 hanno avuto reazioni molto diverse al trattamento?

Esempio

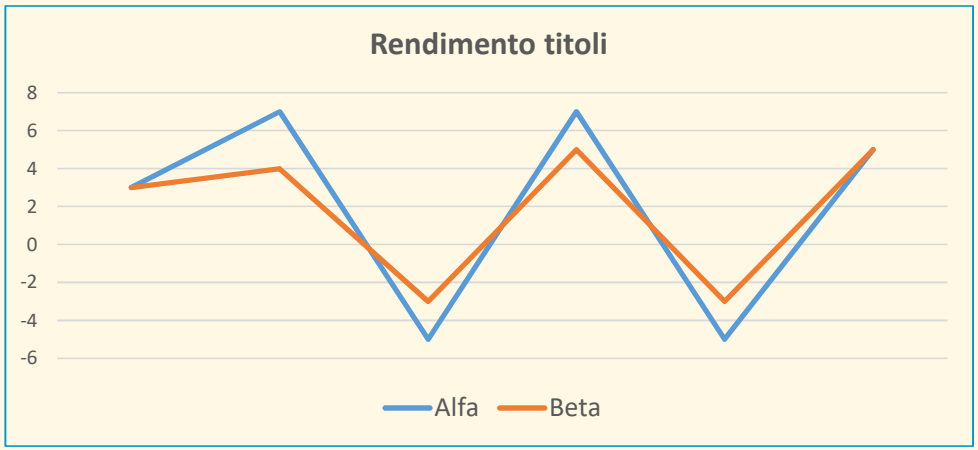
La deviazione standard è una misura comunemente utilizzata del rischio associato all'investimento in azioni o in fondi azionari.
Essa fornisce una misura di come i rendimenti mensili fluttuano attorno la rendimento medio di lungo periodo.

Azioni	**Microsoft**	**Amazon**
Rendimento	5% negli ultimi 5 anni	15% negli ultimi 5 anni
Deviazione standard	10	20

Minore è la deviazione standard, maggiore è la probabilità di ottenere un rendimento vicino a quello medio.

Esempio

La deviazione standard in ambito finanziario indica la **volatilità,** ossia le fluttuazioni/oscillazioni dei prezzi (o dei tassi di rendimento).
La volatilità finanziaria indica il grado di incertezza di rendimento di un determinato asset di mercato.
La deviazione standard in questo ambito misura la dispersione dei prezzi (o rendimenti) rispetto alla media degli stessi.



Esempio

Andamento del petrolio fine 2018 - inizi 2020

σ

In rosso i 3 momenti in cui il mercato ha mostrato un cambiamento di trend.
In questi casi la deviazione standard indica che vi è un'elevata volatilità e può dare indicazioni utili per anticipare un cambio di trend.

Coefficiente di variazione

Permette di confrontare fenomeni riferiti a unità di misura differenti o un ordine di misura diversa.
È una misura della variabilità relativa.

Ad esempio non possiamo confrontare la varianza di due diverse valute oppure il peso dei bambini con quello degli adulti.
In questi casi, per confrontare la variabilità di due distribuzioni per il carattere X con media M positiva, può essere utilizzato il **coefficiente di variazione**:

CV ha un campo di variazione positivo.

$$CV = \frac{\sigma}{|\mu|} * 100$$

Valore assoluto della media con $\mu \neq 0$

Esempio

	Altezza (m)	Peso (kg)
Media	165,8	60,64
Varianza	123,49	23,13

DEV	11,11	4,81
CV	6,70%	7,93%

CV del peso > CV dell'altezza

La variabilità per i caratteri qualitativi

Con riferimento ai caratteri qualitativi si parla di **mutabilità** o **eterogeneità**.
Con mutabilità si intende l'attitudine di un carattere qualitativo ad assumere differenti modalità.
Esempio: mettere a confronto le seguenti distribuzioni D1 e D2

Colore della macchina	Frequenze relative D1	Frequenze relative D2
Bianco	0,25	0
Nero	0,25	0
Rosso	0,25	0
Verde	0,25	1
	1	1

La variabilità per i caratteri qualitativi

Massima eterogeneità (omogeneità nulla) = le modalità del fenomeno qualitativo presentano uguale frequenza.

D1 = equidistribuzione

Massima omogeneità (eterogeneità nulla) = tutte le frequenze (100%) sono concentrate su un'unica modalità (la moda).

D2= tutti hanno lo stesso colore di macchina (il fenomeno presenta una sola modalità con frequenza non nulla)

Indice di eterogeneità di Gini

Somma dei quadrati delle frequenze relative

$$G = 1 - \sum_{i=1}^{k} f_i^2$$

$$0 \leq G \leq \frac{k-1}{k}$$

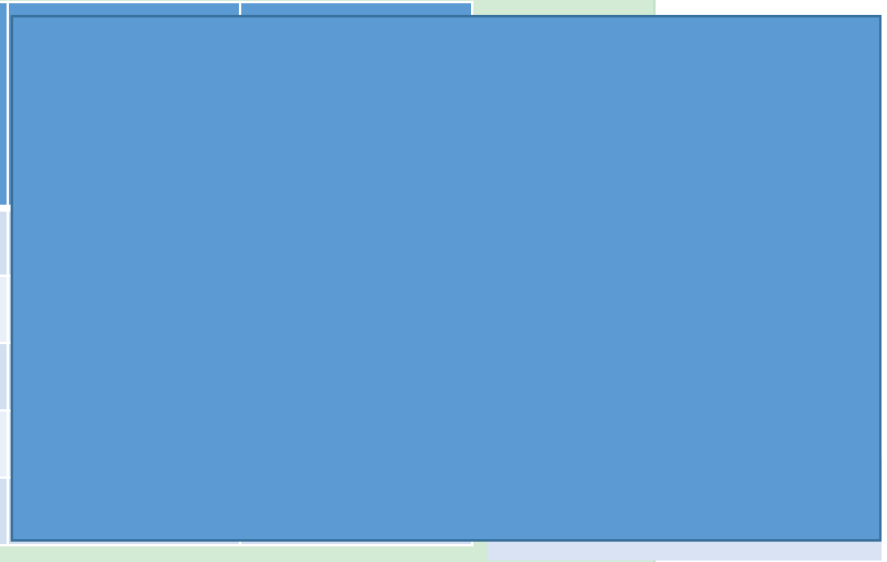
Massima omogeneità: G = 0 se il collettivo è omogeneo: si osserverà solo una delle k modalità del carattere, che avrà frequenza assoluta pari a N. Le frequenze relative delle k–1 restanti modalità saranno nulle, tranne quella della modalità osservata, che varrà uno.

Minima omogeneità: G = (k-1)/k Nel caso di massima eterogeneità, i dati sono distribuiti equamente su tutte le k modalità, che hanno pari frequenza relativa.

Esercizio

Calcolare l'indice di Gini per la seguente distribuzione:

Stato civile	Frequenze assolute
Celibe	36
Coniugato	74
Divorziato	60
Vedovo	33
	203



I dati sono distribuiti in modo altamente eterogeneo sulle 4 scelte.

Esercizio

Calcolare l'indice di Gini per la seguente distribuzione:

Stato civile	Frequenze assolute	Frequenze relative	fi^2
Celibe	36	0,177	0,031
Coniugato	74	0,365	0,133
Divorziato	60	0,296	0,087
Vedovo	33	0,163	0,026
	203	1	∑ 0,278

G = 1-0,278 = 0,722

I dati sono distribuiti in modo altamente eterogeneo sulle 4 scelte.

Indice di Gini normalizzato

Quando si hanno 2 distribuzioni dei dati per avere informazioni sul grado di >< elevatezza dell'eterogeneità bisogna normalizzare l'indice di Gini. Si ottiene moltiplicando l'indice ottenuto per k (che indica il numero delle modalità) e dividendolo per k-1.
La formula per calcolare l'indice di Gini normalizzato è la seguente:

$$G_N = G^* \frac{k}{k-1}$$

Quest'ultimo indice è chiaramente compreso tra 0 e 1.

Gn = 0,722*4/3 = 0,963

Riassunto

Carattere	Indice di dispersione
Qualitativo	Indici di mutabilità (eterogeneità di Gini)
Quantitativo	Range, IQR, Varianza, Deviazione standard, Coefficiente di variazione