# Semantica proposizionale

Unit 2, Lez 3 e 4 – Corso di Logica e Teoria dell’Argomentazione

# Sommario

- Semantica dei connettivi
- Costruzione delle tavole di verità
- Tautologie, contraddizioni e contingenze
- Semantica delle forme argomentative

# Sintassi e semantica

- La sintassi proposizionale, cioè la forma delle espressioni corrette, è determinata dalle regole di inferenza
- La semantica delle proposizioni passa attraverso la specifica di un **dominio di interpretazione**, cioè di un insieme di oggetti rispetto ai quali si dà un'**interpretazione** degli elementi del linguaggio
  - A, B, C, … cosa indicano nel nostro dominio? Sono vere o false?

# Semantica formule atomiche

- I **valori di verità** sono *vero* e *falso*: {V, F}
- La **semantica** di una formula atomica proposizionale (cioè una forma proposizionale) è fissata da un'**interpretazione** della formula in un dominio che dà luogo ad un valore di verità
  - L'interpretazione è una funzione $I : \Pi \rightarrow \{V, F\}$ (dove $\Pi$ è l'insieme delle formule atomiche) che cioè fa corrispondere ad ogni formula atomica il suo valore di verità in quel contesto

# Esempio

- Dato $\Pi$ ={A,B,C} ci sono otto possibili interpretazioni $I_i : \Pi \rightarrow \{V, F\}$ di $\Pi$

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | V | V | V |
| $I_2$ | V | V | F |
| $I_3$ | V | F | V |
| $I_4$ | V | F | F |
| $I_5$ | F | V | V |
| $I_6$ | F | V | F |
| $I_7$ | F | F | V |
| $I_8$ | F | F | F |

# Semantica di connettivi e formule

- La **semantica** (significato logico) di ogni connettivo è fissata da una regola, sintetizzata da una **tavola di verità**, che determina il valore di verità di ogni proposizione composta in cui il connettivo occorre come operatore principale
  - Nella tavola di verità si prendono in esame tutte le possibilità che si possono presentare rispetto a interpretazioni differenti (risp. ai valori di verità)
- Diciamo che una interpretazione $I$ **soddisfa** una formula $\Phi$ se e solo se $I(\Phi)$=V. Analogamente, se esiste un'interpretazione che la soddisfa, una formula $\Phi$ si dice **soddisfacibile**.

# Verofunzionalità

- **Principio di verofunzionalità**: il valore di verità di una proposizione è la risultante dei significati delle sue parti e del modo in cui sono combinate attraverso gli operatori logici

# Negazione

- La negazione $\sim\Phi$ è vera se $\Phi$ è falsa, ed è falsa se $\Phi$ è vera (indipendentemente se $\Phi$ è atomica o composta)

| $\Phi$ | $\sim\Phi$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

- Ogni riga rappresenta una classe di situazioni possibili

# Congiunzione

- La congiunzione Φ&Ψ è vera se entrambe le proposizioni sono vere, ed è falsa altrimenti (indipendentemente se Φ e Ψ sono atomiche o composte)

| Φ | Ψ | Φ&Ψ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

# Disgiunzione

- La disgiunzione Φ∨Ψ è vera se almeno una proposizione è vera, ed è falsa altrimenti (indipendentemente se Φ e Ψ sono atomiche o composte)

| Φ | Ψ | Φ∨Ψ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

- PS: si tratta della lettura inclusiva

# Condizionale materiale

- Il condizionale materiale $\Phi \rightarrow \Psi$ è vero in tutti i casi tranne quando $\Phi$ è vera e $\Psi$ è falsa (indipendentemente se $\Phi$ e $\Psi$ sono atomiche o composte)

| $\Phi$ | $\Psi$ | $\Phi \rightarrow \Psi$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

# Bicondizionale materiale

- Il bicondizionale materiale $\Phi \leftrightarrow \Psi$ è vero quando $\Phi$ e $\Psi$ hanno lo stesso valore di verità, ed è falso altrimenti (indipendentemente se $\Phi$ e $\Psi$ sono atomiche o composte)

| $\Phi$ | $\Psi$ | $\Phi \leftrightarrow \Psi$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

# Fatti importanti (1)

1. Gli operatori logici non sono tutti ugualmente necessari
   - Il bicondizionale ($\Phi \leftrightarrow \Psi$) si può ottenere dal condizionale materiale: $(\Phi \rightarrow \Psi)\&(\Psi \rightarrow \Phi)$
   - In realtà bastano la negazione ed uno tra congiunzione, disgiunzione e condizionale per esprimere semanticamente i connettivi rimanenti
   - Ad esempio, usando ~ e & come base si ha:
     disgiunzione (tra $\Phi$ e $\Psi$): $\sim(\sim\Phi\&\sim\Psi)$
     condizionale (se $\Phi$ allora $\Psi$): $\sim(\Phi\&\sim\Psi)$
     bicondizionale (tra $\Phi$ e $\Psi$): $((\Phi\&\sim\Psi)\&(\Psi\&\sim\Phi))$
   - Si dice che {~, &} forma una **base di connettivi**

# Fatti importanti (2)

2. Continuiamo ad usarli tutti per facilità nelle notazioni e per consuetudine
3. Preso un altro operatore logico qualsiasi, è esprimibile semanticamente con i nostri cinque connettivi?
   – Si! Questa proprietà si esprime dicendo che il nostro insieme di operatori è **funzionalmente completo**
   – Questa ragione spiega anche l'importanza e l'applicazione dei connettivi ~, v e & nell'informatica

# I connettivi ed i computers

- [Boole] riguardiamo F, V come simboli numerici (e denotiamoli con 0, 1). Il loro comportamento logico (rispetto ai connettivi ~, v e &) è interpretabile matematicamente all'interno di un calcolo algebrico: l'algebra booleana (-,+,x)
- Ogni funzione calcolabile la si può destrutturare come funzione che opera sui numeri 0 e 1, per cui il suo comportamento può essere espresso attraverso una serie di operatori logici
  - Teoria: la completezza dei connettivi ~, v e & ci assicura che ogni funzione esprimibile in tale aritmetica è esprimibile con questi connettivi
  - Pratica: l'implementazione fisica di ~, v e & permette di computare ciascuna di tali funzioni

# Tavole di verità per formule

- Si assegnano i valori di verità alle variabili proposizionali (che sono le sfbf più piccole), per poi procedere a calcolare i valori di verità delle sfbf via via maggiori, fino a raggiungere l'intera fbf
- Ad ogni passaggio di calcolo si usano le tavole dei connettivi
- Il numero di righe (interpretazioni) della tavola è dato dalla potenza $2^{(\text{numero variabili})}$

# Esempio

(AvB)→(A&B)

| 1 | 2 | 3 | 5 | 4 | 7 | 3 | 6 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **(A** | **v** | **B)** | **→** | **(A** | **&** | **B)** |
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | F | F | V | F | F |
| F | V | F | V | V | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | V | F | F | F |

# Esempio

((~A→B)v(A&B))→B

| 1 | 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 8 | 3 | 7 | 4 | 9 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **A** | **B** | **((~** | **A** | **→** | **B)** | **v** | **(A** | **&** | **B))** | **→** | **B** |
| V | V | F | V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | F | V | V | F | F | F | F |
| F | V | V | F | V | V | V | F | F | V | V | V |
| F | F | V | F | F | F | F | F | F | F | V | F |

# Semantica del bicondizionale

- Abbiamo detto che il bicondizionale (A↔B) è equivalente a (A→B)&(B→A). Hanno la stessa tavola di verità?

| A | B | A↔B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

| A | B | (A | → | B) | & | (B | → | A) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | F | F | F | F | V | V |
| F | V | F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | F | V | F | V | F | V | F |

# Esempi notevoli

- Provare che la disgiunzione esclusiva $v^e$ (vera se uno solo dei disgiunti è vero, falso altrimenti) è equivalente a (AvB)&~(A&B)

- Provare che l’espressione linguistica ‘né A né B’ (che è vera se A e B sono entrambe false, ed è falsa altrimenti) è equivalente a ~(AvB)

# Tautologia

- Una fbf che è vera in ogni riga della tavola di verità (quindi è vera in ogni interpretazione) è detta **tautologia** (o **tautologica**), così come l'asserzione che rappresenta
- Esempio: Av~A

| A | A | v | ~A |
|---|---|---|---|
| V | V | V | F |
| F | F | V | V |

- Se una fbf è tautologica allora ogni asserzione della stessa forma è logicamente necessaria

# Sulle tautologie

- La nozione di tautologia è di tipo formale
- Una tautologia è una proposizione vera in virtù solamente del significato dei connettivi in essa presenti (si prescinde totalmente da tutte le situazioni particolari delle variabili)
- Dunque una tautologia non rappresenta una verità del pensiero o del mondo, perché consegue semplicemente dal significato attribuito ai connettivi che in essa occorrono
  - Esempio: il fatto che ‘c’è il sole’ segua tautologicamente da ‘c’è il sole e fa caldo’ dipende solo dal significato del connettivo ‘e’

# Contraddizione

- Una fbf che è falsa in ogni riga della tavola di verità (quindi è falsa in ogni interpretazione) è detta **contraddizione** (o **vero-funzionalmente inconsistente**, o **contraddittoria**), così come l'asserzione che rappresenta
- Esempio: A&~A

| A | A | & | ~A |
|---|---|---|---|
| V | V | F | F |
| F | F | F | V |

- Se una fbf è una contraddizione allora ogni asserzione della stessa forma è logicamente impossibile

# Sulle contraddizioni

- La nozione di contraddizione è di tipo formale
- Una contraddizione è una proposizione falsa in virtù solamente del significato dei connettivi in essa presenti (si prescinde totalmente da tutte le situazioni particolari delle variabili)
- Dunque una contraddizione non rappresenta una falsità del pensiero o del mondo, perché ciò consegue semplicemente dal significato attribuito ai connettivi che in essa occorrono
  - Esempio: il fatto che ‘fa caldo e non fa caldo’ sia una contraddizione dipende solo dal significato del connettivo ‘e’

# Contingenza

- Una fbf che è vera in alcune righe della tavola di verità e falsa in altre è detta **vero-funzionalmente contingente**, così come l'asserzione rappresentata
- Esempio: A&B

| A | B | A&B |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

- E se A="Bob è sposato", B="Bob è scapolo"?
  - Se una fbf è vero-funzionalmente contingente allora è contingente relativamente agli operatori della logica proposizionale ma può essere sia autenticamente contingente, sia log. necessaria, sia log. impossibile

# Esempio

- $(A \vee B) \rightarrow (A \& B)$

| **A** | **B** | **(A** | **v** | **B)** | **→** | **(A** | **&** | **B)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | F | V | V | F | F | F | F | V |
| F | V | F | V | V | F | V | F | F |
| F | F | F | F | F | V | F | F | F |

PS: si tratta di una contingenza verofunzionale

# Esempio

- $(\sim A \rightarrow \sim B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$

| **A** | **B** | **(~** | **A** | **→** | **~** | **B)** | **↔** | **(B** | **→** | **A)** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | F | V | V | V | V | V |
| V | F | F | V | V | V | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | F | F | V | V | V | F | F |
| F | F | V | F | V | V | F | V | F | V | F |

PS: La proposizione condizionale $\sim A \rightarrow \sim B$ è equivalente, dunque sempre sostituibile, con la proposizione $B \rightarrow A$ (detta anche la *duale*)

# Esempio

- (AvB)⟷~A&~B

| A | B | (A | v | B) | ⟷ | ~ | A | & | ~ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | F | V | F | F | V |
| V | F | V | V | F | F | F | V | F | V | F |
| F | V | F | V | V | F | V | F | F | F | V |
| F | F | F | F | F | F | V | F | V | V | F |

PS: è una contraddizione

# Esempio

- ~(A&B)⟷~Av~B

| A | B | ~ | (A | & | B) | ⟷ | ~ | A | v | ~ | B |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | V | V | V | F | V | F | F | V |
| V | F | V | V | F | F | V | F | V | V | V | F |
| F | V | V | F | F | V | V | V | F | V | F | V |
| F | F | V | F | F | F | V | V | F | V | V | F |

PS: La proposizione ~(A&B) è equivalente, dunque sempre sostituibile, con la proposizione ~Av~B

# Esempi notevoli tautologie

- Identità $A \rightarrow A$
- Terso escluso $A v \sim A$
- Non contraddizione $\sim(A \& \sim A)$
- Doppia negazione $A \leftrightarrow \sim\sim A$
- Ex falso quodlibet $A \& \sim A \rightarrow B$
- Consequentia mirabilis $(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$
- Affermazione del conseguente $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
- Negazione dell’antecedente $\sim A \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Contrapposizione $(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\sim B \rightarrow \sim A)$

# Esempi notevoli tautologie

- Eliminazione congiunzione $A \& B \rightarrow A$
- Introduzione disgiunzione $A \rightarrow A v B$
- Idempotenza $A \& A \leftrightarrow A$
  $A v A \leftrightarrow A$
- Assorbimento $A \& (A v B) \leftrightarrow A$
  $A v (A \& B) \leftrightarrow A$
- Leggi di De Morgan $\sim(A v B) \leftrightarrow \sim A \& \sim B$
  $\sim(A \& B) \leftrightarrow \sim A v \sim B$
- Riduzione all'assurdo $((A \rightarrow B) \& \sim B) \rightarrow \sim A$

# Semantica per forme argomentative

- Con le tavole di verità possiamo esprimere in modo rigoroso la nozione di validità argomentativa
- Dopo aver costruito la tavola con tutte le fbf (premesse e conclusione), si cercano le interpretazioni in cui le premesse sono tutte vere:
  - se in corrispondenza la conclusione è sempre vera allora la forma è valida;
  - se c'è un solo caso in cui la conclusione è falsa (un **controesempio**) allora la forma non è valida
  - se non ci sono interpretazioni aventi premesse tutte vere allora la forma è valida;

# Esempio

- AvB,~B⊢A

| **A** | **B** | **A** | **v** | **B,** | **~B** | **⊢** | **A** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | | V |
| V | F | V | V | F | V | | V |
| F | V | F | V | V | F | | F |
| F | F | F | F | F | V | | F |

PS: Diciamo che la forma argomentativa AvB,~B⊢A è valida, oppure che A è conseguenza logica di AvB e ~B.

# Esempio

- A→B,~B⊢~A

| **A** | **B** | **A** | **→** | **B,** | **~B** | **⊢** | **~A** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | | F |
| V | F | V | F | F | V | | F |
| F | V | F | V | V | F | | V |
| F | F | F | V | F | V | | V |

PS: la forma argomentativa A→B,~B⊢~A è valida (~A è conseguenza logica di A→B e ~B).

# Esempio

- $A \rightarrow B, \sim A \vdash \sim B$

| **A** | **B** | **A** | **→** | **B,** | **~A** | **⊢** | **~B** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | F | | F |
| V | F | V | F | F | F | | V |
| F | V | F | V | V | V | | F |
| F | F | F | V | F | V | | V |

PS: la forma argomentativa $A \rightarrow B, \sim A \vdash \sim B$ non è valida ($\sim B$ non è conseguenza logica di $A \rightarrow B$ e $\sim A$).

# Esempio

- AvB,BvC⊢AvC

| **A** | **B** | **C** | **A** | **v** | **B,** | **B** | **v** | **C** | ⊢ | **A** | **v** | **C** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V | | V | V | V |
| V | V | F | V | V | V | V | V | F | | V | V | F |
| V | F | V | V | V | F | F | V | V | | V | V | V |
| V | F | F | V | V | F | F | F | F | | V | V | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | | F | V | V |
| F | V | F | F | V | V | V | V | F | | F | F | F |
| F | F | V | F | F | F | F | V | V | | F | V | V |
| F | F | F | F | F | F | F | F | F | | F | F | F |

# Esempio

- A,∼A⊢B

| **A** | **B** | **A,** | **∼A** | ⊢ | **B** |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | F | | V |
| V | F | V | F | | F |
| F | V | F | V | | V |
| F | F | F | V | | F |

PS: Non ci sono controesempi, dunque la forma argomentativa è valida!

# Esempio

- $A \rightarrow B \vdash (A \& \sim A) \rightarrow B$

| **A** | **B** | **A** | **→** | **B** | **⊢** | **(A** | **&** | **~A)** | **→** | **B** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | | V | F | F | V | V |
| V | F | V | F | F | | V | F | F | V | F |
| F | V | F | V | V | | F | F | V | V | V |
| F | F | F | V | F | | F | F | V | V | F |

PS: La conclusione è una tautologia, dunque la forma argomentativa è valida!

# Esempio

- $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$

| **A** | **B** | **C** | **A** | **→** | **B,** | **B** | **→** | **C,** | **A** | **⊢** | **C** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V | V | V | | V |
| V | V | F | V | V | V | V | F | F | V | | F |
| V | F | V | V | F | F | F | V | V | V | | V |
| V | F | F | V | F | F | F | V | F | V | | F |
| F | V | V | F | V | V | V | V | V | F | | V |
| F | V | F | F | V | V | V | F | F | F | | F |
| F | F | V | F | V | F | F | V | V | F | | V |
| F | F | F | F | V | F | F | V | F | F | | F |

# Decidibilità

- **Algoritmo**: è una procedura meccanica rigorosa che termina dopo un numero finito di operazioni finite
- Un sistema formale è **decidibile** quando esiste un algoritmo in grado di decidere se una qualunque forma argomentativa è valida oppure no
- **La logica proposizionale è decidibile**: un algoritmo è proprio dato dalla costruzione della tavola di verità

# Per casa

- Leggere
  - Varzi, par. 3.4, 3.5, 3.6

- Esercizi sul Varzi
- E poi esercizi online