La logica dei predicati

Unit 3, Lez. 2 e 3 – Corso di Logica e Teoria dell’Argomentazione

Sommario

- Quantificatori
- Predicati e nomi
- Formalizzazione
- Regole di formazione
- Modello e varianti

Osservazioni introduttive

- Nella logica proposizionale abbiamo utilizzato interi enunciati legati logicamente da operatori verofunzionali
- Nelle asserzioni categoriche abbiamo considerato la forma interna, considerando anche la quantificazione (portava alla distinzione tra asserzioni universali e particolari), che non è verofunzionale
- La **logica dei predicati** è un'estensione della logica proposizionale che permette di analizzare la struttura interna degli enunciati attraverso l'uso di **predicati** e di **operatori di quantificazione**

FORMALIZZAZIONE PREDICATIVA

Struttura delle proposizioni semplici

- **I tipo**: proposizioni che asseriscono che un individuo specifico ha una certa proprietà o che asserisce l’esistenza di una certa relazione tra individui specifici
- **II tipo**: proposizioni che asseriscono che una certa proprietà è posseduta da qualche individuo (senza specificare da chi specificamente) o da tutti, o che stabilisce l’esistenza di una relazione

Proposizioni del I tipo

- Asseriscono che un certo individuo ha una certa proprietà
  - “Bob è americano”
  - “3 è dispari”
- oppure che tra due o più individui sussiste una certa relazione
  - “Dario è più alto di Aldo”
  - “Anna legge la Divina Commedia”
  - “Dario è figlio di Anna e Bob”
  - “I punti A, B, C, D sono i vertici di un quadrato”
- usando, eventualmente, anche descrizioni definite
  - “Il figlio di Anna e Bob è più alto di Aldo”
  - “Il filosofo greco che bevve la cicuta era maestro di Platone”

Formalizzazione prop. I tipo

- Introduciamo lettere minuscole (a, b, c, …) dette **costanti individuali** per indicare i nomi degli individui
- Introduciamo lettere maiuscole (A, B, C, …) dette **costanti predicative** per indicare proprietà e relazioni
- In generale, le proposizioni del I tipo si formalizzano scrivendo una costante predicativa seguita da una o più costanti individuali
  - Aa, Bac, Cbba

Introduzione costanti

b A

Costanti individuali

"Bob è americano"

Ab

"Dario è più basso di Aldo"

Bda

d B a

Costanti predicative

Esempi

- Predicati a un posto (**proprietà**)
  - Carla studia — Sc
  - Bob è un uomo — Ub
- Predicati a due posti (**relazionali**)
  - Carla ama Bob — Acb
  - Bob è più studioso di Carla — Sbc
- Predicati a tre posti (**relazionali**)
  - Carla ha regalato un pesce a Bob — Rcpb
  - Carla ha inviato un'email a Bob — Iceb
- Predicati a quattro posti (**relazionali**)
  - Alice è più alta di Dario di quanto Bob lo sia di Carla — Aadbc

Esempi con connettivi

Convenzione: d'ora in poi prendiamo la lettera iniziale del nome o della proprietà/relazione per designare una costante individuale o predicativa.

Bob e Dario sono studenti	Sb & Sd
Bob o Dario sono studenti	Sb v Sd
Anna è uno studente o un professore	Sa v Pa
Anna è più alta di Bob ma non di Carla	Aab & ~Aac
Dario e Bob sono più alti di Anna	Ada & Aba
Ad Anna piace Bob o Dario	Pab v Pad
Bob ha fatto conoscere Anna a Dario	Cbad
Bob ha fatto conoscere Anna a Dario ma non a Carla	Cbad & ~Cbac
Carla si è fatta conoscere a Dario ma non ad Anna	Cccd & ~Ccca

Proposizioni con quantificazioni

- Esprimono una quantificazione sugli individui che hanno una certa proprietà o che sono in una certa relazione con altri individui
  - "Tutti gli uomini sono mortali"
  - "Qualche numero è dispari"
  - "Tutte le mogli del sultano sono bellissime"
- Ci sono modi diversi di quantificare ("tanti", "pochi", "una parte trascurabile", "più della metà", "la maggior parte", "quasi tutti", ecc.)
- Si considerano solo due quantificatori: "ogni" e "qualche", nel linguaggio ordinario esprimibili anche in molti modi diversi

Variabili, proposizioni e funzioni proposizionali

“qualcuno ama Bob” ->
“esiste un x tale che x ama Bob” ->
“esiste un x tale che Axb” ->
-> ∃xAxb

“tutti amano Bob” ->
“per ogni x, x ama Bob” ->
“per ogni x si ha che Axb” ->
-> ∀xAxb

∃
quantificatore particolare

∀
quantificatore universale

x
variabile individuale
(posto vacante)

Proposizioni
Aab
∃xAxb
∀xAxb

Funzioni proposizionali
Axb

Formalizzare le asserzioni universali

- Ogni S è P, ovvero:
  per ogni individuo, se esso è S allora esso è P
  - abbiamo esplicitato un condizionale
  - sostituiamo ‘x’ a ‘individuo’:
    per ogni x, se x è S, allora x è P
  - dunque: $\forall x(Sx \rightarrow Px)$
- Ogni S non è P
  - per ogni x, se x è S, allora x non è P
  - abbiamo esplicitato un condizionale e la negazione del conseguente
  - dunque: $\forall x(Sx \rightarrow \sim Px)$

Formalizzare le asserzioni particolari

- Qualche S è P
  - per qualche x, x è S e x è P
  - abbiamo esplicitato una congiunzione
  - dunque: $\exists x(Sx \& Px)$
- Qualche S non è P
  - per qualche x, x è S e x non è P
  - abbiamo esplicitato una congiunzione e la negazione del secondo congiunto
  - dunque: $\exists x(Sx \& \sim Px)$

Chiarimento

- Perché “Ogni S è P” si formalizza con $\forall x(Sx \rightarrow Px)$ e non con $\forall x(Sx \& Px)$?
  - Usando la congiunzione si asserirebbe che tutti gli individui dell’universo sono contemporaneamente uomini e mortali, il che in generale è banalmente falso
- Se ‘ogni S è P’ si formalizza con $\forall x(Sx \rightarrow Px)$, perché ‘qualche S è P’ non si formalizza con $\exists x(Sx \rightarrow Px)$?
  - Poiché il condizionale è automaticamente vero quando l’antecedente è falso, se non esiste nessun U allora $\exists x(Sx \rightarrow Px)$ sarebbe sempre vera
  - Invece $\exists x(Sx \& Px)$ è vero solo se esiste davvero un S che è anche P

Esempi

I pesci sono rossi	$\forall x(Px \rightarrow Rx)$
Qualche pesce è rosso	$\exists x(Px \& Rx)$
Qualche pesce non è rosso	$\exists x(Px \& {\sim}Rx)$
Non ci sono pesci rossi	${\sim}\exists x(Px \& Rx)$
Nessun pesce è rosso	(1) $\forall x(Px \rightarrow {\sim}Rx)$
	(2) ${\sim}\exists x(Px \& Rx)$
Esistono pesci non rossi	$\exists x(Px \& {\sim}Rx)$
Non tutti i pesci sono rossi	${\sim}\forall x(Px \rightarrow Rx)$
Non esistono pesci non rossi	${\sim}\exists x(Px \& {\sim}Rx)$
Nessun pesce non è rosso (ogni pesce non è non-rosso)	$\forall x(Px \rightarrow Rx)$

Forza espressiva

- Possiamo rappresentare tutte le strutture logiche delle logiche proposizionale e categoriale, prese isolatamente o in combinazione, e strutture non rappresentabili in nessuna delle due teorie considerate isolatamente
  - "Tutto ha un prezzo" (C) $\forall xCx$
  - "Tutto è opinabile" (O) $\forall xOx$
  - "Qualcosa mi puzza" (P) $\exists xPx$
- Possiamo quantificare su più individui
  - "Tutti vogliono qualcosa" $\forall x \exists yVxy$
  - "C'è qualcosa che vogliono tutti" $\exists x \forall yVyx$
  - "Tutti vogliono tutto" $\forall x \forall yVxy$

Cautele e osservazioni

- L'individuazione delle forma logica non è meccanica
  - "Anna ama Bob", "Bob è amato da Anna", "Anna ha la proprietà di amare Bob"
- La scelta delle variabili non influenza il significato
  - $\exists x \forall y Pyx$ e $\exists y \forall z Pzy$ sono equivalenti
- Variabili differenti non si riferiscono a oggetti necessariamente diversi
  - In "a qualcuno piace tutto" ($\exists x \forall y Pyx$) si asserisce che a quel qualcuno piace anche se stesso
- Le stesse variabili usate in congiunzione con due quantificatori non designano necessariamente gli stessi oggetti
  - $\exists x Pbx \& \exists x Pcx$

LINGUAGGIO PREDICATIVO

Alfabeto del linguaggio predicativo

- Simboli logici
  - connettivi: ~, v, &, →, ↔
  - quantificatori: ∀, ∃
  - variabili: lettere minuscole (da ‘u’ in poi) e pedici (u_1, u_2, ecc.)
  - parentesi: (,)
- Simboli non logici
  - Costanti individuali: lettere minuscole (da ‘a’ a ‘t’) e pedici
  - Costanti predicative: lettere maiuscole e pedici

Formule

- Una **formula** è una qualunque sequenza di simboli logici e non logici nel dizionario
  - $\sim\forall xTxc \qquad \forall x\forall yGxy \qquad \&xG\rightarrow c$
- Una formula è **atomica** se consiste di una sola lettera predicativa seguita da nessuna o da alcune costanti individuali
  - $B \qquad Ga \qquad Dabc$

Regole di formazione e formule ben formate (fbf)

- Nella logica predicativa le regole sono:
  1) qualunque formula atomica è una fbf
  2) se ϕ è una fbf, allora lo è anche $\sim\phi$
  3) se ϕ e ψ sono fbf, allora lo sono anche $(\phi \& \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$
  4) se ϕ è una fbf contenente una costante individuale α, allora qualunque espressione $\forall\beta\phi^{\beta}/_{\alpha}$ o $\exists\beta\phi^{\beta}/_{\alpha}$ è una fbf, dove $\phi^{\beta}/_{\alpha}$ è il risultato della sostituzione di una o più occorrenze di α in ϕ con una variabile β non presente in ϕ
  5) niente altro è una fbf

Osservazioni

Una variabile può essere introdotta solo con la regola 4, per cui un quantificatore la deve precedere

- $\forall x Txc$ [fbf: $Tbc \rightarrow \forall x Txc$] Txc [non-fbf: x?]

Non si può aggiungere una variabile già presente

- $\forall x \exists x(Tx \& Bx)$ [non-fbf: quantificazione di Tx? Bx?]

È possibile che più quantificatori usino la stessa variabile solo quando ciò avviene attraverso le regole 2) e 3)

- $\forall x Tx \ \& \ \exists x Bx$ [fbf]

Perché non sono fbf?

- $\exists xPxy$
- (Gc)
- $\forall xGx\&Hx$
- $\forall x(Gx)$
- $(\forall xGx)$
- $\exists x\forall yGx$
- $\forall x\exists x(Gx\&\sim Hx)$
- $\exists xGx \ \& \sim\exists xHx$
  - Se mancano solo le parentesi più esterne si accetta per convenzione come fbf

SEMANTICA PREDICATIVA

Semantica predicativa

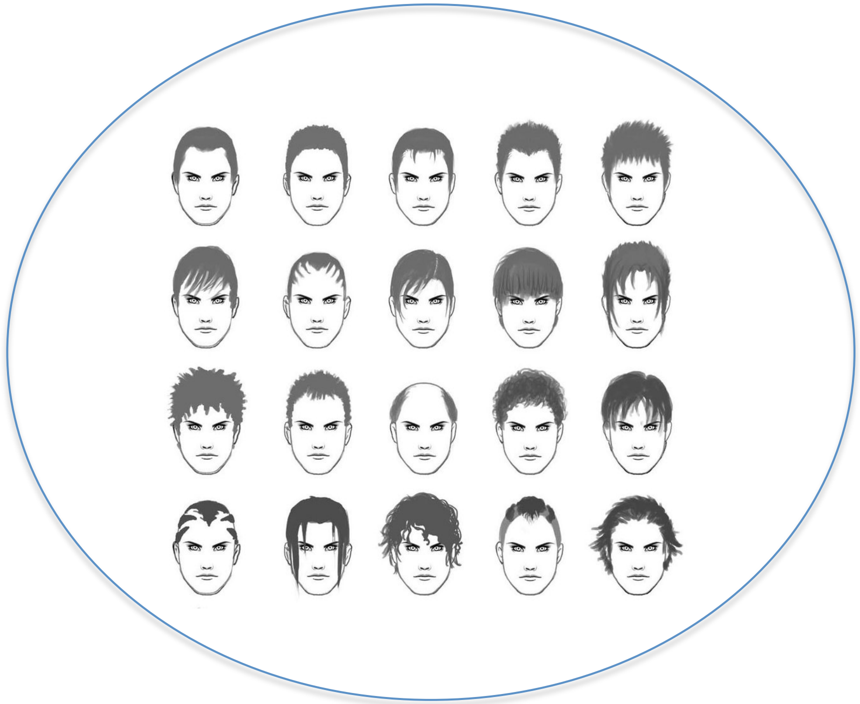
- I quantificatori non sono verofunzionali
  - cioè non possiamo determinare il valore di verità di '$\exists xAx$' in termini di 'Ax' in quanto quest'ultimo non è un enunciato
- L'idea è di interpretare 'x' all'interno di un **modello** (o *struttura interpretativa*), cioè una coppia <D, I> in cui
  - D è un **dominio** (o **universo**, o un insieme di oggetti)
  - I è un'**interpretazione** dei simboli non logici (costanti e predicati) che compaiono nelle fbf, con cui si assegna un significato alle costanti individuali e ai predicati

Estensionalità

Intensionale

Estensionale

L’uomo è un animale
razionale



Verità/Falsità nel modello

Predicato a 0 posti (es.: P)

valore di verità dato direttamente dal modello

Predicato a n posti con costanti individuali (es.: Tab)

Vero nel modello ⟷ gli oggetti designati dalle costanti appartengono alla classe di oggetti designati dal predicato;

fbf che inizia con quantificatore universale ($\forall xBx$)

Vera nel modello ⟷ è vero *ogni suo esempio*;

fbf che inizia con quantificatore particolare ($\exists xDx$)

Vera nel modello ⟷ è vero *almeno un suo esempio*

Esempio

- Dominio: l’insieme {B. Obama, M. Renzi, S. Mattarella}.
- Costanti e predicati
  b B. Obama
  m M. Renzi
  s S. Mattarella
  A {B. Obama, M. Renzi}
  B {M. Renzi, S. Mattarella}
  D insieme degli italiani
  P insieme delle persone
  E relazione di maggiore età (il 1^ più anziano del 2^)

Dm	V
Bb	F
Esm	V
$Ab \;\&\; Bs$	V
$\sim Dm$	F
$Db \to Bs$	V
$\exists x \sim Dx$	V
$\forall x(Dx \;\&\; Ax)$	F
$\forall x(Px \to Dx)$	F

Esempio di c-variante

- Dominio: l'insieme delle cose di questo mondo
- Costanti e predicati

  b B. Obama

  m M. Renzi

  g G. Napolitano

  D insieme degli italiani

  P insieme delle persone
- c individuo qualsiasi

$\exists x \sim Px$?

Costruiamo la **c-variante** (ogni interpretazione di c dà un nuovo modello)

Nella c-variante in cui 'c' è interpretata come il Colosseo si ha che ~Pc è vera, dunque

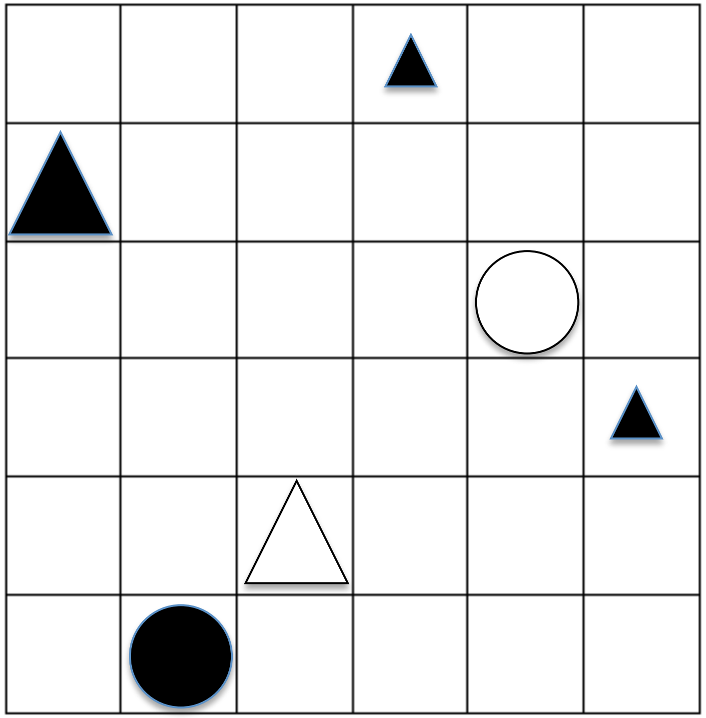
$\exists x \sim Px$ V

$\forall x Px$?

Nella c-variante in cui 'c' è interpretata come il Colosseo è falsa, dunque

$\forall x Px$ F

Esempio Interpretazione



$\exists x(\sim Tx \& Nx)$	V
$\exists x(Cx \& \sim Gx)$	F
$\exists x((Cx \& Gx) \& Bx)$	V
$\forall x(Bx \rightarrow Cx)$	F
$\forall x(Px \rightarrow Tx)$	V
$\forall x((Bx \& \sim Cx) \rightarrow \sim Px)$	V
$\exists x((Cx \& Px) \vee Tx)$	V
$\exists x(Tx \& Nx) \& \exists x Cx$	V
$\forall x(Cx \rightarrow \forall y(Ty \rightarrow Dxy))$	F
$\exists x(Cx \& \exists y(Ty \& Sxy))$	V

‘T’ sta per ‘triangolo’, ‘C’ sta per ‘cerchio’,
‘N’ sta per ‘nero’, ‘B’ sta per ‘bianco’,
‘P’ sta per ‘piccolo’, ‘G’ sta per ‘grande’,
‘D’ sta per ‘più a destra di’,
‘S’ sta per ‘più a sinistra di’.

Verità/falsità logica e validità

- Nella logica predicativa (Varzi, p. 185) una fbf è:
  - **logicamente vera** se è vera in ogni modello (ad es. $\exists xPx \vee \sim\exists xPx$)
  - **logicamente falsa** se è falsa in ogni modello (ad es. $\exists xPx \,\&\, \sim\exists xPx$)
- Una forma argomentativa è (Varzi, p. 175):
  - **valida** se non esiste alcun modello in cui le premesse sono vere mentre la conclusione è falsa
  - **invalida** se esiste almeno un modello in cui le premesse sono vere mentre la conclusione è falsa
- Se una forma è valida, allora la conclusione è **conseguenza logica** delle premesse

Relazioni tra quantificatori

- Le seguenti forme sono valide
  - $\vdash \forall\beta\phi \leftrightarrow \sim\exists\beta\sim\phi$
  - $\vdash \exists\beta\phi \leftrightarrow \sim\forall\beta\sim\phi$
- Per cui sono equivalenti
  - Le fbf $\forall\beta\phi$ e $\sim\exists\beta\sim\phi$
  - Le fbf $\exists\beta\phi$ e $\sim\forall\beta\sim\phi$
- In altri termini avremmo potuto adottare un solo quantificatore come simbolo logico e introdurre l'altro per definizione (definendolo rispetto al primo)

Per casa

- Leggere
  - Varzi, dal par 6.1 al 6.4

- Esercizi sul Varzi
- E poi esercizi online: quiz interattivo e quiz sulla semantica predicativa (file pdf)