2. I numeri reali e le funzioni di variabile reale

Introduzione

Il metodo comunemente usato in Matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti, da non cambiare durante l'elaborazione dei dati o della teoria, e nel dedurre da tali presupposti il maggior numero di informazioni possibili. Se ad esempio si considera il gioco della pallacanestro, una volta iniziato il campionato, le regole di tale gioco non vengono più cambiate. In Matematica i presupposti sono le regole del gioco e sono denominati *postulati o assiomi*. Da essi, mediante dimostrazioni, si deducono i risultati ossia i *teoremi*.

Il nostro punto di partenza è quello di assumere, come postulato, che esista *il sistema dei numeri reali*. Cioè assumiamo che esista un insieme di numeri, che chiamiamo numeri reali e che indichiamo con **R**, su cui sia possibile, ad esempio, eseguire le quattro operazioni elementari (+,-,$\cdot$,/), oppure sia possibile stabilire qual è il minore tra due numeri.

Poiché abbiamo assunto come postulato l'esistenza dei numeri reali, elenchiamo gli *assiomi dei numeri reali relativi alle operazioni* di addizione (+) e moltiplicazione ($\cdot$). Indichiamo con a, b, c dei numeri reali generici.

1) Proprietà associativa:
   $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$
2) Proprietà commutativa:
   $a+b=b+a$, $a\cdot b = b\cdot a$
3) Proprietà distributiva:
   $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$
4) Esistenza degli elementi neutri: esistono in **R** due numeri distinti 0, 1, tali che $a+0=a$, $a\cdot 1 = a$
5) Esistenza degli opposti: per ogni numero reale a, esiste un numero reale, indicato con $-a$, tale che $a+(-a)=0$
6) Esistenza degli inversi: per ogni numero reale $a \neq 0$, esiste un numero reale, indicato con a^{-1}, tale che $a\cdot(a^{-1}) = 1$

Cenni di teoria degli insiemi

Introduciamo alcune definizioni e notazioni della teoria degli insiemi. Sia S un insieme qualsiasi. Per indicare che x è un elemento di S scriveremo:

$x \in S$ (x appartiene ad S)

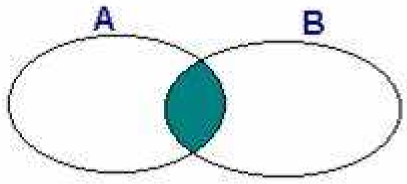
Per indicare, invece, che y non è un elemento di S, scriveremo:

$y \notin S$ (y non appartiene ad S)

Se A è un insieme i cui elementi sono anche elementi di S, diremo che A è un *sottoinsieme* o *parte* di S. Tra i sottoinsiemi di S si suole considerare anche l'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, che si indica con $\varnothing$.

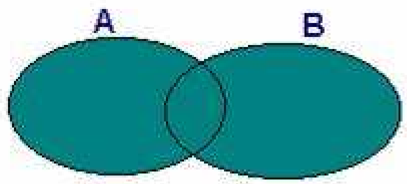
Se A e B sono due sottoinsiemi di S, *l'intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme degli elementi di S che sono comuni ad A e B:

$$A \cap B = \{x \in S : x \in A \quad e \quad x \in B\}$$



L'unione $A \cup B$ di A e B è l'insieme costituito dagli elementi di S che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B:

$$A \cup B = \{x \in S : x \in A \quad oppure \quad x \in B\}$$

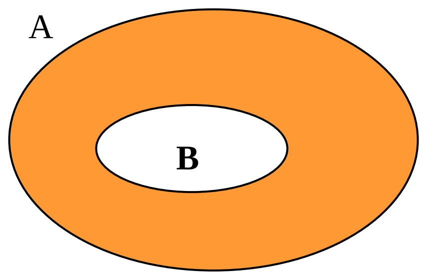


Diremo che A è contenuto in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B:

$$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Il simbolo $\Leftrightarrow$ si legge "se e solo se" ad il simbolo $\Rightarrow$ si legge "implica".
Osservazione: l'insieme vuoto è contenuto in qualsiasi insieme ($\varnothing \subseteq A, \varnothing \subseteq B, \varnothing \subseteq S, \ldots$)
Se A e B sono due sottoinsiemi dell'insieme S, il complemento $A - B$ di B rispetto ad A è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B:

$$A - B = \{x \in S : x \in A \quad e \quad x \notin B\}$$



In particolare, per $A = S$, l'insieme $S - B$, complemento di B rispetto ad S, si chiama anche *complementare* di B e si indica con $-B$.
Per l'unione e l'intersezione, valgono le proprietà associativa e distributiva. Siano A, B, C tre insiemi, valgono le seguenti relazioni:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - proprietà associativa dell'unione
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - proprietà associativa dell'intersezione
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ - proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ - proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione

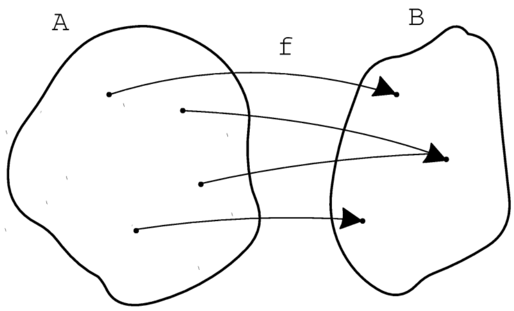
Due insiemi A e B si dicono *disgiunti* se la loro intersezione è l'insieme vuoto. Ossia, se $A \cap B = \emptyset$ allora A e B sono disgiunti.
Vale inoltre la seguente uguaglianza:

- $\{a, b, c\} = \{b, a, c\}$

Ossia, se non sono stati definiti ordinamenti, gli elementi di un insieme possono apparire in un qualunque ordine

Il concetto di funzione
Nella scienza e nell'esperienza quotidiana si incontrano spesso relazioni quantitative tra insiemi di oggetti e dati. Ad esempio quando si afferma che "l'area del cerchio è funzione del suo raggio", si utilizza implicitamente il concetto di *funzione*.
Siano A e B due insiemi di numeri reali. Una *funzione* di A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed un solo elemento di B. Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f : A \longrightarrow B$, oppure $y = f(x)$, intendendo che ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde, tramite la funzione f, l'elemento $y = f(x) \in B$. Formalmente:

$$\forall x \in A \, \exists! \, y \in B : y = f(x)$$



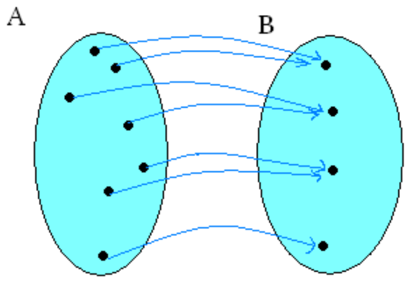
Si dice che A è il *dominio* o *insieme di definizione* di f. Il simbolo $f()$ indica un complesso di operazioni che devono effettuarsi su x (*argomento* di f) per ottenere y (*valore* di f).
Due funzioni si dicono *uguali* quando hanno lo stesso dominio e ad ogni elemento corrisponde la stessa cosa, ossia

$$\forall x \in A \qquad f(x) = g(x)$$

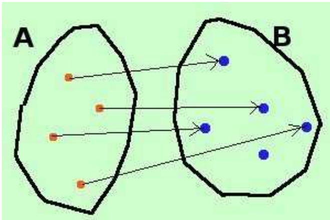
Si consideri ad esempio, la funzione $f : R \longrightarrow R$ (ossia dall'insieme dei numeri reali all'insieme stesso) tale che $f(x) = x^2$. Valgono le seguenti uguaglianze:

- $f([0,1]) = [0,1]$
- $f(]-5,7]) = [0,49] = f([0,7])$

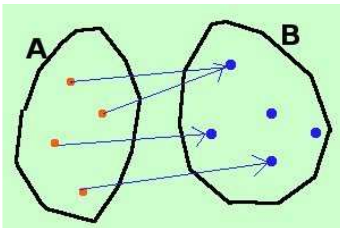
Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice *suriettiva* se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A, ossia se $\forall y \in B \, \exists \, x \in A : f(x) = y$.



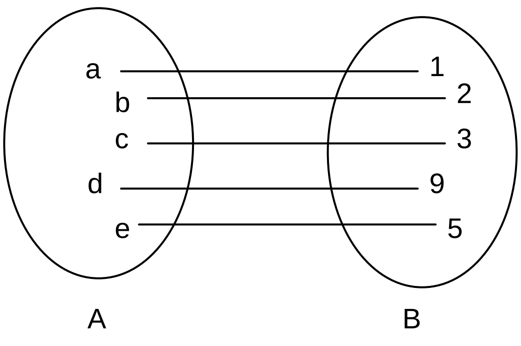
Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice *iniettiva* se ad oggetti diversi di A, corrispondono oggetti diversi di B, ossia se $\forall x, x^{'} \in A$ con $x \neq x^{'}$, segue che $f(x) \neq f(x^{'})$.



Un esempio di funzione *non iniettiva* è il seguente:



In questo caso infatti ad oggetti diversi in A, *corrispondono gli stessi oggetti* in B.
Una funzione *suriettiva* ed *iniettiva* si dice *biettiva*.

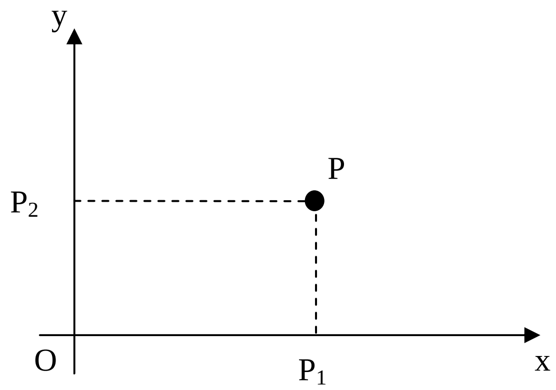


In altri termini, una funzione si dice *biettiva* se per ogni elemento y di B vi è uno e un solo elemento x di A tale che $f(x) = y$.

Grafico di una funzione

Una volta definito il significato di funzione, ci chiediamo come sia possibile effettuare *la rappresentazione cartesiana* della funzione stessa. Consideriamo due rette perpendicolari che si intersecano in un punto O, origine degli assi. Fissiamo sulle due rette una direzione positiva ed una

unità di misura. Chiamiamo asse delle *ascisse*, o *asse x*, una delle due rette, asse delle *ordinate*, o *asse y*, l'altra retta.
Ad ogni numero reale x corrisponde in modo biunivoco un punto P_1 dell'asse delle x, scelto in modo che il segmento OP_1 abbia lunghezza uguale ad x. Analogamente ad ogni numero reale y corrisponde un punto P_2 dell'asse y, tale che il segmento OP_2 abbia lunghezza uguale ad y. Tracciamo due rette parallele agli assi e passanti rispettivamente per P_1 e P_2. Il punto P di incontro delle due rette corrisponde in modo biunivoco alla coppia di numeri reali (x, y).



Se è assegnata una funzione f, in corrispondenza alle coppie di numeri reali $(x, f(x))$ abbiamo un insieme di punti del piano, ottenuti con la rappresentazione cartesiana sopraindicata, che costituisce il **grafico della funzione**.
Volendo fornire una definizione formale, occorre prima definire **il prodotto cartesiano tra insiemi.**

Definizione. Siano A e B due insiemi. Dicesi **prodotto cartesiano** (e si indica con la notazione $A\times B$) l'insieme delle coppie ordinate (x,y) con $x\in A$ e $y\in B$.

$G=\{(x, f(x)) : x\in A\}\subset A\times B$ è il grafico di una funzione $f : A\to B$.

Il grafico G di una funzione f gode della proprietà "$\forall x\in A \;\; \exists! y\in B : (x, y)\in G$"

Funzioni invertibili. Composizione tra funzioni.
Supponiamo che la corrispondenza tramite la funzione f tra due insiemi A e B sia *biunivoca*. Cioè supponiamo che f non solo faccia corrispondere ad ogni $x\in A$ uno ed un solo valore $y\in B$, ma anche che per ogni $y\in B$ esista uno ed un solo $x\in A$ tale che $f(x)=y$. In tali condizioni diciamo che f è *invertibile*. La funzione da B ad A che ad ogni $y\in B$ fa corrispondere l'unico $x\in A$ per cui $f(x)=y$, si chiama *funzione inversa* e si indica con $f^{-1} : B\longrightarrow A$. Si ha

$$f^{-1}(f(x))=x, \qquad \forall x\in A; \qquad\qquad f^{-1}(f(y))=y, \qquad \forall y\in B$$

Siano f e g due funzioni tali che $f : A\longrightarrow B$ e $g : B\longrightarrow C$, si definisce *composizione* tra le funzioni g ed f:

$$g\circ f : A\longrightarrow C$$

$g\circ f$ si legge g *composto* con f.

La *composizione* tra funzioni non è *commutativa*. Ad esempio, si considerino le funzioni:

$$f : R \longrightarrow R, \quad f(x) = x^2$$
$$g : R \longrightarrow R, \quad g(x) = x + 1$$

Segue che

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$$

Esempi

1. La funzione $f : R \longrightarrow R$ definita da $f(x) = 2x + 1$ *è suriettiva*, perché per ogni numero reale *y* si ha $f(x) = y$ dove $x = \frac{y-1}{2}$.
2. Sia f una funzione $f : R \longrightarrow R$ con $f(x) = x^2$; questa funzione *non è suriettiva* in quanto l'insieme delle immagini è costituito da tutti i numeri reali *non negativi*, mentre il codominio comprende anche i numeri reali negativi. Per rendere suriettiva questa funzione è sufficiente considerare un codominio diverso, ossia $f : R \longrightarrow R^+$.
3. La funzione $f : R \longrightarrow R^+$ definita da $f(x) = x^2$, *non è iniettiva* poiché per valori differenti di x, ottengo i medesimi valori di y. Ad esempio se $x = -1$ e $x' = 1$ (con $x \neq x'$) segue che $f(-1) = f(1) = 1$

Funzioni crescenti e decrescenti

Definizione Diremo che una funzione reale f(x), definita in un intervallo I, è **crescente** in I se, per ogni coppia x, x' di punti di I per i quali è $x < x'$, risulta $f(x) < f(x')$. In altri termini, una funzione f è **crescente** in un intervallo I se:

$$\forall x, x' \in I, \, x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

Diremo inoltre che f(x) è **decrescente** in I se:

$$\forall x, x' \in I, \, x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

Definizione Una funzione f è **strettamente crescente** in I se:

$$\forall x, x' \in I, \, x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

Definizione Una funzione f è **strettamente decrescente** in I se:

$$\forall x, x' \in I, \, x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$$

Definizione Una funzione si dice **monotona** se è crescente o decrescente.

Definizione Diremo che una funzione reale f(x) della variabile reale x, definita in un insieme X, è **superiormente limitata** in X se l'insieme f(X), sua immagine, è superiormente limitato; cioè se esiste un numero reale M tale che si abbia $f(x) \leq M$, per ogni $x \in X$; f(x) si dice invece **inferiormente limitata** in X se l'insieme f(X) è inferiormente limitato, ossia se $\exists N \in R : f(x) \geq N, \forall x \in X$.

Definizione La funzione f(x) sarà detta **limitata** in X se risulterà tanto limitata inferiormente quanto superiormente; cioè

$\exists M \in R^{+} : | f(x) | \leq M, \forall x \in X$

Esempio

Un esempio di funzione limitata è la funzione $senx$; infatti:

$-1 \leq senx \leq 1$

oppure

$| senx | \leq 1$