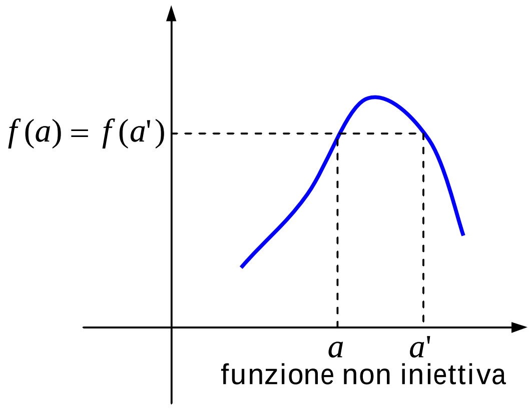
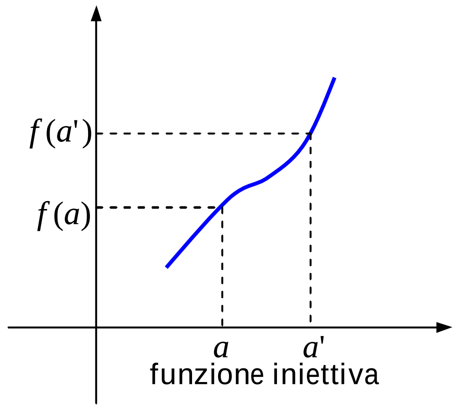
3. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive (Ref p.14)

Dalla definizione di funzione si ricava che, nota una funzione $y = f(x)$, comunque preso un valore di x appartenente al dominio di $f(x)$ esiste *un solo* valore di y nel codominio che gli corrisponde. Non è tuttavia vero, in generale, il viceversa, non è cioè detto che comunque si scelga un valore di y nel codominio della funzione ad esso corrisponda *un solo* valore della x nella colonna dei primi membri: vi sono certamente dei casi di funzione per cui ciò accade, ma non è tuttavia richiesto dalla definizione di funzione.
Le funzioni che godono di una tale particolare proprietà vengono dette funzioni *iniettive*.

Definizione: *una $f: A \to B$ si dice **iniettiva** se ad elementi diversi di A corrispondono elementi diversi di B*

Se cioè $a \in A \quad a' \in A \quad a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$





Esempi di funzioni iniettive sono la retta, la radice quadrata, il logaritmo, l'esponenziale; esempi di funzioni non iniettive sono la parabola, il seno, il coseno, la tangente, il ramo superiore di una circonferenza.

Non è poi detto che, se $f: A \to B$, qualora B non coincida con il codominio della funzione, tutti gli elementi di B siano l'immagine di un elemento di A: possono esservi in B degli elementi che non è possibile ottenere attraverso $f(x)$ partendo da un qualunque elemento di A. Ad esempio consideriamo la funzione:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid x \to x^2$$

In questo caso sia A che B sono l'insieme dei numeri reali, e come si vede facilmente, ad esempio tramite $f(x)$ non é mai possibile ottenere il numero reale -2.

Definizione: *una funzione $f: A \to B$ si dice **suriettiva** quando ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A.*

Per meglio capire va ricordato che una funzione sono tre cose: la legge $y = f(x)$, l'insieme di partenza e l'insieme di arrivo. Quest'ultimo non è detto che coincida con il codominio dell'espressione $y = f(x)$, in particolare se il codominio è un sottoinsieme dell'insieme di arrivo, la funzione non è suriettiva. Tornando all'esempio precedente, la funzione:

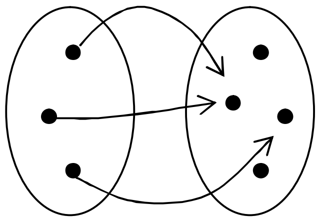
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \mid x \to x^2$$

diversa da quella di prima, è invece suriettiva. Poiché una funzione reale di variabile reale non è definita soltanto dalla sua espressione analitica, ma anche dall'insieme su cui essa agisce e dall'insieme dove si trovano le immagini dei punti di partenza, a parità di espressione analitica la funzione potrà essere suriettiva o meno a seconda degli insiemi che le sono associati. Ad esempio:

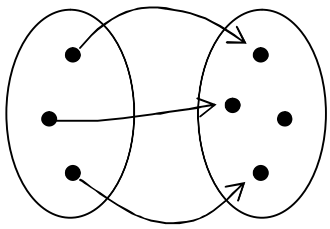
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,x\to\sin x \text{ non è suriettiva}$$
$$f:\mathbb{R}\to[-1,1]\,|\,x\to\sin x \text{ \textit{è suriettiva.}}$$

Se poi la funzione gode di entrambe le proprietà sopra esposte allora si dirà biunivoca o biiettiva.

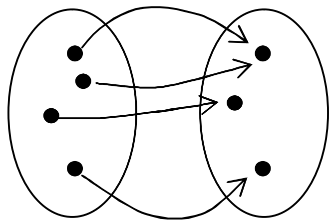
Definizione: *una funzione* $f: A\to B$ *si dice* ***biiettiva*** *se* ***ogni*** *elemento di B è immagine* ***di uno ed un solo*** *elemento di A (è quindi una corrispondenza biunivoca fra A e B)*



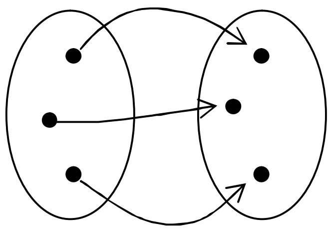
funzione qualunque



funzione iniettiva



funzione suriettiva



funzione biiettiva

Notare però che una funzione può anche non essere *né iniettiva né suriettiva*, ne è un esempio il caso precedente $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|x\to x^2$.

Esempio 15

Siano dati gli insiemi $A\{2;4;6;-2\}$ *e* $B\{1;3;-3;9;7\}$ *e sia inoltre definita la relazione* $f: A\to B$ *per cui:*

$$f(2)=1 \quad f(4)=3 \quad f(6)=-3 \quad f(-2)=1$$

stabilire se f è una funzione, se f è iniettiva, se f è suriettiva e se f è biiettiva. Scrivere quindi il dominio di f ed il suo codominio.

La relazione è una funzione, il dominio è tutto l'insieme A, il codominio è un sottoinsieme di B, cioè $\{1;3;-3\}$. La funzione non è iniettiva perché ai due elementi 2 e -2 è associata la stessa immagine 1. La funzione non è nemmeno suriettiva perché gli elementi di B, 9 e 7 non sono immagine di nessun elemento di A.

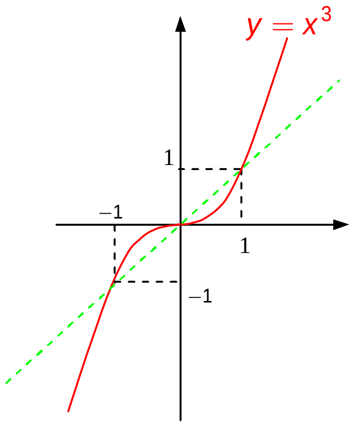
Esempio 16

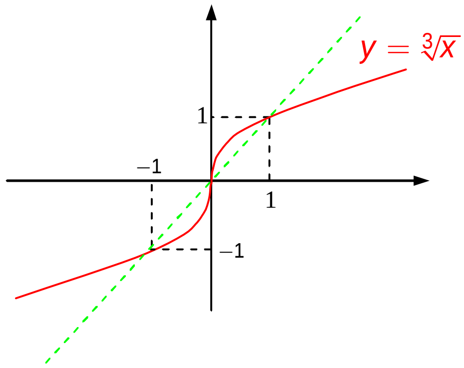
Dire se le funzioni:

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid y=x^3$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid y=\sqrt[3]{x}$

sono iniettive e suriettive.



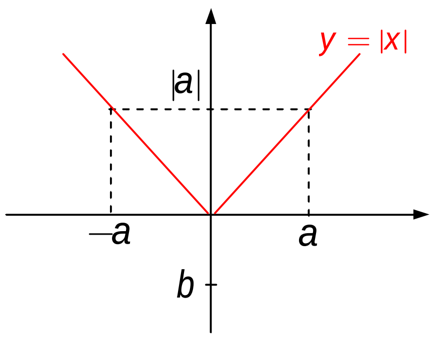


Le due funzioni sono l'una l'inversa dell'altra ed il loro grafico si ottiene per simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Come si vede dai grafici qualunque retta orizzontale interseca le funzioni una solo volta, quindi sono entrambe iniettive. Inoltre il codominio è sempre $\mathbb{R}$ quindi sono anche suriettive.

Esempio 17

Dire se è iniettiva e se è suriettiva la funzione:

$$y=|x| \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid y=|x|$$



Una qualunque coppia di valori a e $-a$ ammette lo stesso modulo, quindi la funzione non è iniettiva. Per come è stata assegnata la funzione non è nemmeno suriettiva, visto che tutti gli elementi negativi dell'insieme di arrivo ($\mathbb{R}$) non sono immagine di nessun valore reale. Sarebbe invece suriettiva la funzione:

$$y=|x| \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+ \mid y=|x|$$

6. Cardinalità degli insiemi di funzioni

Definizione: *si chiama cardinalità di un insieme il numero di elementi che appartengono ad esso.*

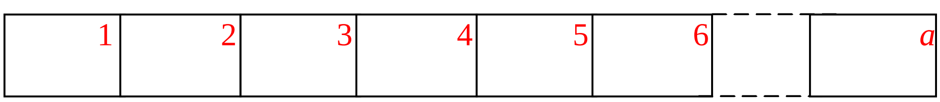
La cardinalità può essere finita ma anche infinita, come nel caso dell'insieme di numeri pari. Poniamo di avere due insiemi A e B e sia:

$$a=card(A) \qquad b=card(B)$$

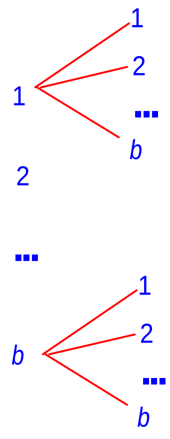
in termini elementari diremmo che l'insieme A si compone di a elementi mentre l'insieme B si compone di b elementi. Ci chiediamo ora quale sia la cardinalità dell'insieme costituito dalle funzioni che vanno da A in B.

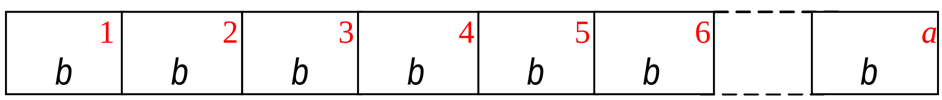
Insieme di funzioni $f:A\to B$

Costruiamo la funzione generica, che – lo ricordiamo - associa ad ogni elemento di A *un solo* elemento di B immaginando che ognuno degli elementi di A sia una scatola dove dobbiamo inserire un elemento di B, potendo anche ripetere la stessa scelta per scatole differenti. Abbiamo un numero totale di a scatole:



Ho a disposizione b oggetti da inserire in ciascuna scatola: ci sono quindi b diverse possibili scelte per la prima scatola. Dato che una funzione generica può associare anche tutti gli elementi di A allo stesso elemento di B, la scelta già fatta può essere ripetuta: è come se nel passare alla successiva casella gli b oggetti non si esaurissero mai. Passando quindi al secondo scomparto ho sempre b diverse possibili scelte, ognuna delle quali può essere associata a ciascuna delle scelte b della scatola precedente:





Lo stesso numero di scelte vale per le caselle successive. Il totale delle scelte possibili è quindi il prodotto delle diverse possibilità per ciascuna casella. Dato che si hanno un numero a di caselle:

$$\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \ldots \cdot b}_{\text{un numero di } a \text{ volte}} = b^a$$

Quindi la cardinalità dell'insieme di funzioni $f : A \to B$ è:

$$card(B)^{card(A)} = b^a$$

Esempio 18

Quante sono le funzioni $f : A \to B$ sapendo che $A = \{1; 2; 3; 4\}$ e che $B = \{h; k; l\}$? E quante sono invece le funzioni $f : B \to A$?

Risulta:

$$a = card(A) = 4 \qquad b = card(B) = 3$$

Ci sono quindi:

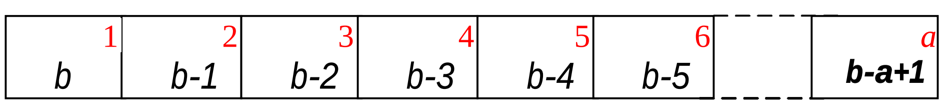
$$b^a = 3^4 = 81 \quad \text{funzioni} \quad f : A \to B$$
$$a^b = 4^3 = 64 \quad \text{funzioni} \quad f : B \to A$$

Insieme di funzioni iniettive $f : A \to B$

Ricordiamo che una funzione è iniettiva se ad elementi diversi di A corrispondono immagini diverse in B, e che f agisce su tutti gli elementi di A. Se quindi B contiene meno elementi di A non è possibile trovare un'immagine per ciascuno degli elementi di A senza ripetersi. E se ci si ripete, la funzione non è iniettiva. Ne concludiamo che:

Possono esistere funzioni iniettive da A in B solo se la cardinalità di B è maggiore od uguale a quella di A.

Tornando al modello delle scatole contrassegnate con gli elementi di A, questa volta dovremo riempirle con elementi *diversi* di B, visto che la funzione iniettiva non può ripetere una stessa immagine. Rispetto a prima gli b elementi in nostro possesso ora diminuiscono a mano a mano che li si va posizionando. Abbiamo così b possibili scelte per la prima casella, ma solo $b-1$ per la seconda, $b-2$ per la terza e così via.



Come si vede il numero di scelte per ogni casella si ottiene sottraendo a b il numero ordinale della casella e poi sommando 1. Quindi giunti all'ultimo oggetto dell'insieme A, che avrà il numero d'ordine a saranno rimaste $b-a+1$ scelte. Poiché ognuna delle scelte di ogni casella è associabile ad una qualsiasi delle scelte per la casella precedente, il numero totale si ottiene anche in questo caso facendo il prodotto:

$$b(b-1)(b-2)\dots(b-a+1) \qquad con\ b \geq a$$

espressione che rappresenta la cardinalità dell'insieme di funzioni iniettive $f: A \to B$.

Esempio 19

Dato l' insieme $A = \{1;2;3\}$ e l'insieme $B = \{h,k,l,m\}$ si dica quante sono le funzioni iniettive $f: A \to B$ e quante sono le funzioni iniettive $f: B \to A$

Risulta:

$$a = card(A) = 3 \qquad b = card(B) = 4$$

poiché è $b \geq a$ non possono esistere funzioni iniettive $f: B \to A$, mentre possono esistere funzioni iniettive $f: A \to B$. Calcoliamo il numero delle funzioni iniettive $f: A \to B$. Dato che risulta:

$$(b-a+1) = 4-3+1 = 2$$

ci sono quindi:

$$b(b-1)(b-2)\dots(b-a+1) = 4(4-1)(4-2) = 24$$

funzioni iniettive $f: A \to B$.

Pagine di riferimento (ma ci sono altre cose) Tomo A1 23-28.

Es Tomo A1 p.417 n *75,76,77 (iniettive e suriettive)*