Esercizi sulle derivate

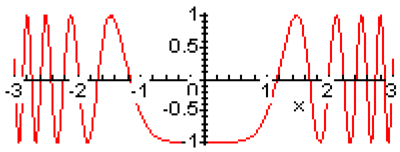
1) Calcolare le derivate della seguenti funzioni :

$(x+5)^4$; xcosx ; x^2sinx ; $\frac{x+1}{x-1}$; ln $\frac{x^2-2}{x^2+x}$; $\ln^3(x^2)$; arctg(x^2) ; $e^{3\cos(x)}$.

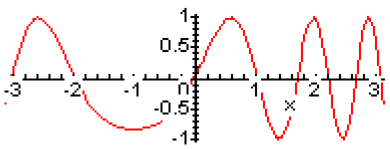
Soluzione : $4(x+5)^3$; cosx – xsinx ;2xsinx + x^2cosx ; $\frac{-2}{(x-1)^2}$; $\frac{2x(x^2+x)-(x^2-2)(2x+1)}{(x^2-2)(x^2+x)}$;

$6\frac{\ln^2(x^2)}{x}$; $\frac{2x}{1+x^4}$; -3sinx$e^{3\cos x}$.

2) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva y = cos(x^3 + π) in x=0 .
Soluzione : Abbiamo y(0) = -1, y'(x) = -sin(x^3 + π)($3x^2$), y'(0) = 0 e da qui l'equazione cercata y + 1 = 0 , come si vede bene sul grafico della curva in questione :

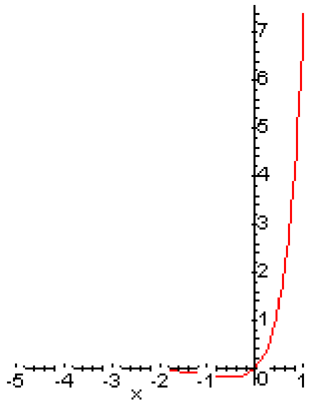


2) Determinare l'equazione della retta tangente alla curva y = sin(x^2 + 2x) nel punto di ascissa x = 0
Soluzione : y(0) = 0 , y'(x) = cos(x^2 + 2x)(2x + 2) , y'(0) = 2 , da cui l'equazione y = 2x .
Il grafico della curva è il seguente



4) Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa 0 alla curva y = xe^{2x}

Soluzione: $y(0) = 0$; $y'(x) = e^{2x} + 2x\, e^{2x}$, $y'(0) = 1$, da cui l'equazione della retta tangente $y = x$.
Riportiamo anche il grafico della curva



5) Dire se sono continue e derivabili nell'origine le funzioni seguenti :

a) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x>0 \\[2ex] -\dfrac{\sin(x)}{x} & x<0 \\[2ex] 0 & x = 0 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\[2ex] -x & x<0 \end{cases}$$

c) $f(x) = |x| + 1$

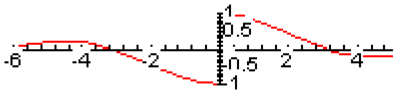
Soluzione : a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{\sin(x)}{x} = -1$, $f(0) = 0$: la funzione non è continua in 0 e

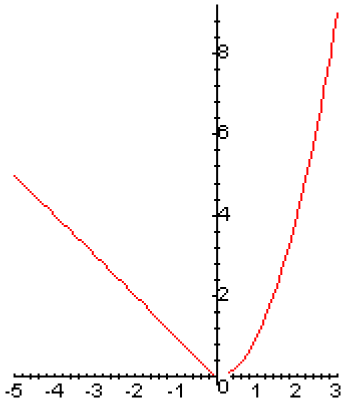
quindi non è derivabile in 0 .

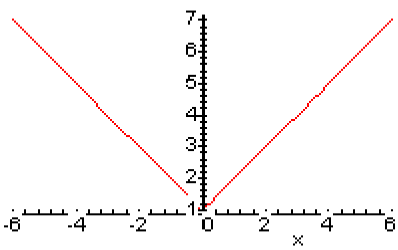
b) $\lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{x\to 0^-} -x = f(0) = 0$. La funzione è continua . Poiché la derivata destra , $f'_d(x) = 2x$, e la derivata sinistra , $f'_s(x) = -1$, assumono valori diversi in $x = 0$, la funzione data non è derivabile in $x = 0$.

c) Osserviamo che si ha $f(x) = x+1$,se $x\geq 0$, e $f(x) = - x + 1$, se $x<0$. Ne segue che i limiti laterali (in $x = 0$) sono uguali al valore $f(0) = 1$ e quindi la funzione è continua . Le derivate destra e sinistra invece hanno valori diversi (1 e –1 rispettivamente) , da cui la non derivabilità in $x = 0$

Riportiamo di seguito i grafici di queste funzioni .



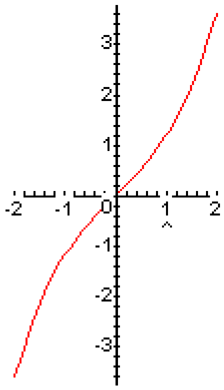




.

6) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ in $x = 0$.

Soluzione : la funzione data è y = shx (seno iperbolico) ed ha grafico :



La retta tangente nell'origine ha equazione y = x , in quanto y(0) = 0 e y'(0) = 1 (y'(x) = cosh(x) (coseno iperbolico) = $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$).

7) Date le funzioni f : R→R e g : R→R , f(x) = e^x e g(x) = x^2 , trovare gof , fog e le loro derivate .

Soluzione : gof(x) = g(f(x)) = $(e^x)^2 = e^{2x}$, fog(x) = f(g(x)) = e^{x^2} .

gof'(x) = $2e^{2x}$, fog'(x) = $2x\, e^{x^2}$.

8) Determinare i punti della curva di equazione y = $(\ln x)^3$ aventi tangente orizzontale e l'equazione della relativa tangente .

Soluzione : Sono i punti in cui è nulla la derivata . y' = $3(\ln x)^2 \frac{1}{x}$ = 0 per x =1 . Nel punto (1,0) la tangente è la retta y = 0 , come si vede sul grafico della curva :