CAPITOLO 1

Funzioni e limiti

1 I CONCETTI FONDAMENTALI SULLE FUNZIONI

1.1 Le definizioni e il dominio naturale

Ricordiamo che, dati due insiemi A e B, chiamiamo **funzione** ogni relazione f che associa ad ogni elemento x di A uno e un solo elemento y di B.
In simboli scriviamo: $f : A \to B$
Se A e B sono insiemi di numeri reali, parliamo di **funzione reale di variabile reale** e, in genere, in questi casi la relazione f si può esprimere mediante un'equazione della forma $y = f(x)$.
Le funzioni reali di variabile reale si possono classificare in base alla tipologia dell'espressione $f(x)$; in particolare avremo una funzione:

- **razionale intera** se $f(x)$ è un polinomio
  Esempio: $y = 3x^4 + 2x - 5$
- **razionale fratta** se $f(x)$ è il rapporto tra due polinomi
  Esempio: $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$
- **irrazionale** se la variabile x compare nell'argomento di un radicale
  Esempio: $y = \sqrt{x^2 + 2} - x$
- **esponenziale** se è della forma $a^{g(x)}$ con a numero reale positivo
  Esempio: $y = 2^{x^2+x-1}$
- **logaritmica** se è della forma $y = \log_a g(x)$ con a numero reale positivo
  Esempio: $y = \log_2 \dfrac{x-1}{x^2+4}$
- **goniometrica** se la variabile x compare nell'argomento di una funzione goniometrica
  Esempio: $y = \sin \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

Il **dominio naturale** di una funzione $f(x)$, detto anche **insieme di definizione** o **campo di esistenza**, è l'insieme dei valori che è possibile attribuire a x in modo che si possa calcolare y.
In generale, per determinare il dominio di una funzione dobbiamo tenere presente che:

- un polinomio, essendo composto solo da operazioni di addizione e sottrazione tra monomi, ha sempre significato;
- una frazione algebrica, essendo il quoziente tra due polinomi, ha significato solo se il polinomio al denominatore non è nullo;

- un radicale di indice dispari ha significato per qualsiasi valore dell'argomento della radice, a condizione che l'argomento stesso esista;
- un radicale di indice pari ha significato solo se l'argomento del radicale è positivo o nullo;
- un logaritmo esiste solo se il suo argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1;
- un esponenziale di base positiva esiste se esiste l'esponente;
- le funzioni goniometriche seno e coseno sono definite quando esiste il loro argomento, la funzione tangente esiste quando il suo argomento è diverso da $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

Nella tabella che segue diamo le indicazioni, dedotte dalle precedenti considerazioni, che portano alla determinazione del dominio di una funzione.

TIPOLOGIA DI FUNZIONE	FORMA DELL'EQUAZIONE	CONDIZIONI DA PORRE
Funzione polinomiale	$y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$	nessuna
Funzione razionale fratta	$y = \frac{A(x)}{B(x)}$	$B(x) \neq 0$
Funzione irrazionale con radicale di indice dispari	$y = \sqrt[3]{f(x)}$	esistenza di $f(x)$
Funzione irrazionale con radicale di indice pari	$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
Funzione logaritmica con base a positiva e diversa da 1	$y = \log_a f(x)$	$f(x) > 0$
Funzione esponenziale con base a positiva e diversa da 1	$y = a^{f(x)}$	esistenza di $f(x)$
Funzioni goniometriche	$y = \sin f(x)$ $y = \cos f(x)$ $y = \tan f(x)$	esistenza di $f(x)$ esistenza di $f(x)$ $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ESEMPI

1. Per determinare il dominio della funzione $y = x^3 - 2x^2$ non dobbiamo porre nessuna condizione; il dominio è R.

2. Per determinare il dominio della funzione $y = \sqrt{9 - x^2}$ dobbiamo porre la condizione:

$$9 - x^2 \geq 0 \quad \rightarrow \quad -3 \leq x \leq 3$$

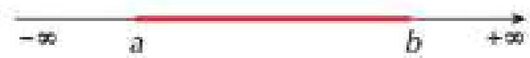
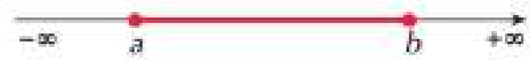
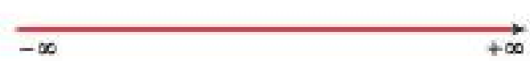
3. Per determinare il dominio della funzione $y = \ln x + \ln (x + 2)$ dobbiamo imporre che gli argomenti dei due logaritmi siano entrambi positivi; questo significa risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \quad \text{che ha soluzione} \quad x > 0$$

La rappresentazione grafica del dominio

Le procedure di determinazione del dominio di una funzione portano, in genere, ad individuare alcuni intervalli di numeri reali che possiamo rappresentare come riassunto nella seguente tabella.

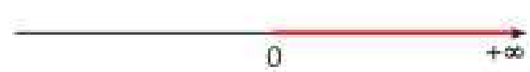
intervallo è un sottoinsieme dei numeri reali rappresentato da tutti i punti della retta reale che sono compresi tra due estremi a e b.

TIPOLOGIA DI INTERVALLO	NOTAZIONE ALGEBRICA	NOTAZIONE CON LE PARENTESI	RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
aperto	$a < x < b$	$(a,\ b)$	
chiuso	$a \leq x \leq b$	$[a,\ b]$	
aperto a sinistra, chiuso a destra	$a < x \leq b$	$(a,\ b]$	
chiuso a sinistra, aperto a destra	$a \leq x < b$	$[a,\ b)$	
illimitato a sinistra, aperto	$x < a$	$(-\infty,\ a)$	
illimitato a sinistra, chiuso	$x \leq a$	$(-\infty,\ a]$	
illimitato a destra, aperto	$x > b$	$(b,\ +\infty)$	
illimitato a destra, chiuso	$x \geq b$	$[b,\ +\infty)$	
illimitato	R	$(-\infty,\ +\infty)$	

Possiamo quindi rappresentare il dominio delle precedenti funzioni usando la notazione con le parentesi e quella grafica in questo modo:

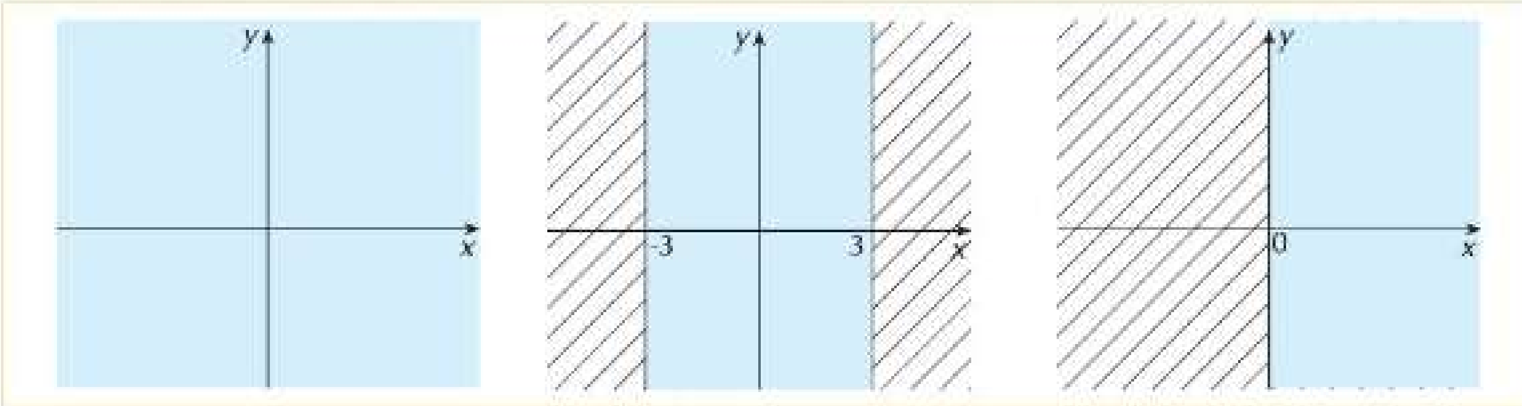
- $y = x^3 - 2x^2$ $\quad D: (-\infty,\ +\infty)$


- $y = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad D: [-3,\ 3]$


- $y = \ln x + \ln (x + 2)$ $\quad D: (0,\ +\infty)$


Poiché ad ogni funzione è associato un grafico, è utile rappresentare graficamente il dominio anche nel piano cartesiano evidenziando le zone che contengono il grafico ed eliminando quelle che non lo possono contenere.

Il dominio delle precedenti funzioni viene rappresentato nel piano cartesiano rispettivamente in questo modo:



1.2 Particolari categorie di funzioni

Funzioni pari e dispari

Sia $f(x)$ una funzione di dominio D; diciamo che:

- $f(x)$ è **pari** se $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in D$
- $f(x)$ è **dispari** se $f(-x) = -f(x)$ per ogni $x \in D$

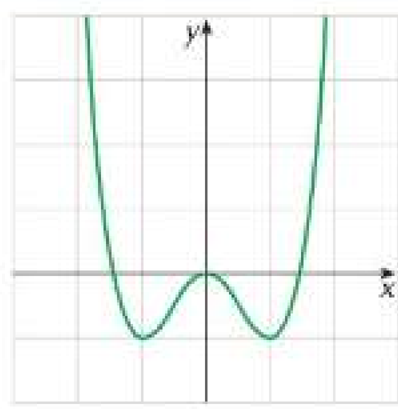
Una funzione pari ha quindi un grafico che è simmetrico rispetto all'asse y. Una funzione dispari ha un grafico che è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

ESEMPIO

La funzione $f(x) = x^4 - 2x^2$ è una funzione pari:

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$

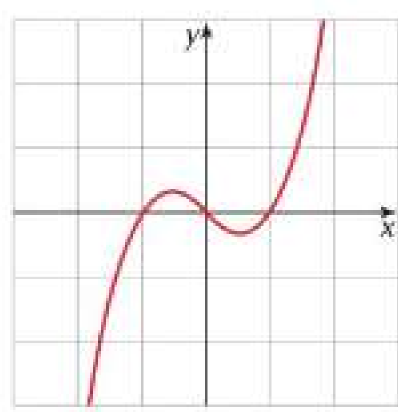
Il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y.



La funzione $y = x^3 - x$ è una funzione dispari:

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -f(x)$

Il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine.



Funzioni periodiche

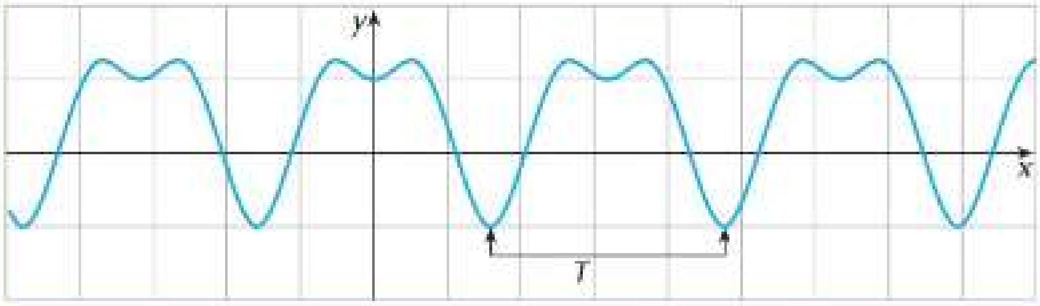
Una funzione $f(x)$ si dice periodica di periodo T, con $T > 0$, se si verifica che:

$$f(x+T) = f(x)$$

con T numero intero qualsiasi.

Il grafico di una funzione periodica si ripete ad ogni periodo T (***figura 1***).

Figura 1



Tra le funzioni che conosciamo, sono periodiche quelle goniometriche; in particolare:

- la funzione $y = \sin x$ e la funzione $y = \cos x$ sono periodiche di periodo $T = 2\pi$
- la funzione $y = \tan x$ è periodica di periodo $T = \pi$.

Inoltre:

- la funzione $y = \sin kx$ e la funzione $y = \cos kx$ sono periodiche di periodo $T = \dfrac{2\pi}{k}$
- la funzione $y = \tan kx$ è periodica di periodo $T = \dfrac{\pi}{k}$.

ESEMPIO

La funzione $y = \sin 2x$, essendo $k = 2$, è periodica di periodo $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

La funzione $y = \cos \dfrac{x}{3}$, essendo $k = \dfrac{1}{3}$, è periodica di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

La funzione $y = \tan \dfrac{2}{3}x$, essendo $k = \dfrac{2}{3}$, è periodica di periodo $T = \dfrac{\pi}{\frac{2}{3}} = \dfrac{3}{2}\pi$.

Funzioni definite per casi

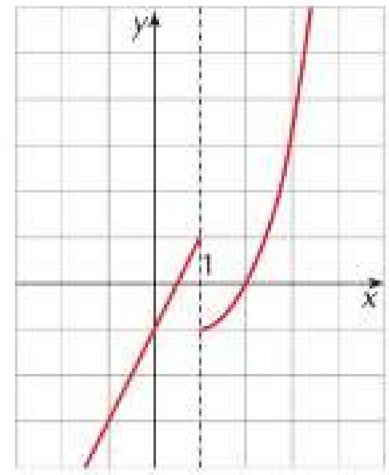
Alcune funzioni sono definite da espressioni diverse a seconda del valore assunto da x e si parla di **funzioni definite per casi.**
Per esempio:

$$y = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Il dominio di questa funzione è l'insieme R ed il suo grafico è rappresentato dalla retta di equazione $y = 2x - 1$ per tutti gli x che sono minori di 1, dalla parabola $x^2 - 2x$ per tutti gli x che sono maggiori oppure uguali a 1 (***figura 2***).

ANIMAZIONE

Figura 2



Tra le funzioni definite per casi possiamo annoverare anche quelle che contengono dei moduli; per esempio:

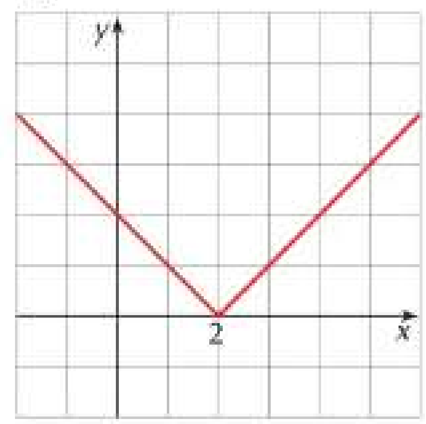
$$y = |x - 2|$$

la cui espressione è definita da:

$$y = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

ed il cui grafico è in ***figura 3***.

Figura 3



1.3 Le intersezioni con gli assi cartesiani e lo studio del segno

La domanda che ci poniamo ora è se il grafico della funzione $f(x)$ interseca o meno l'asse x e l'asse y.

I punti d'intersezione con l'asse x si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Le ascisse di questi punti, se esistono, si ottengono quindi risolvendo l'equazione

$$f(x) = 0$$

e sappiamo che vengono detti **zeri** della funzione.

Una funzione può avere al massimo un punto d'intersezione con l'asse y che, se esiste, si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{cioè valutando} \qquad f(0)$$

È evidente che il valore 0 deve appartenere al dominio della funzione, altrimenti $f(0)$ non è valutabile.

ESEMPI

1. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$

La funzione $y = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}$ ha come dominio l'insieme $D : (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Poiché per $x = 0$ la funzione ha significato, troviamo l'intersezione con l'asse y:

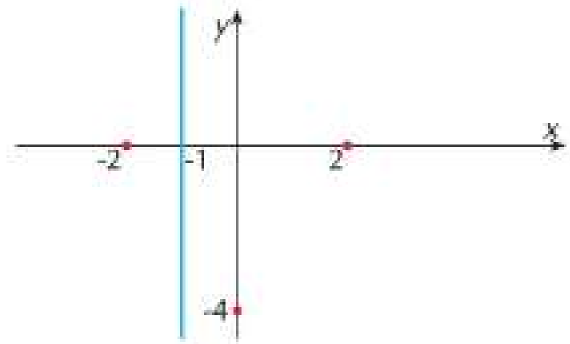
$f(0) = -4$ il punto d'intersezione ha coordinate $(0, -4)$

Troviamo le intersezioni con l'asse x risolvendo l'equazione $f(x) = 0$:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 1} = 0 \qquad x^2 - 4 = 0 \qquad x = \pm 2$$

La funzione interseca l'asse x nei punti di coordinate $(-2, 0)$ e $(2, 0)$.

Mettiamo in un grafico i risultati finora raggiunti.



2. $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

Il dominio della funzione è l'insieme $D: (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Poiché 0 non appartiene al dominio, non possiamo valutare $f(0)$, quindi la funzione non interseca l'asse y.
Cerchiamo le intersezioni con l'asse x risolvendo l'equazione

$$x^2+1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-1$$

Non esistono nemmeno intersezioni con l'asse x.

Studiare il segno di una funzione significa individuare gli intervalli del dominio in cui la funzione assume valori positivi, e in questo caso il suo grafico si trova al di sopra dell'asse x, e gli intervalli in cui assume valori negativi, e in questo caso il grafico si trova al di sotto dell'asse x. Basta quindi risolvere la disequazione $f(x) > 0$ nell'ambito del suo dominio e riportare in una tabella la variazione dei segni che in questo modo si vengono a individuare.

ESEMPIO

Riprendiamo la funzione $y = \dfrac{x^2-4}{x+1}$ di dominio $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ e studiamone il segno ponendo $f(x) > 0$:

$$\frac{x^2-4}{x+1} > 0$$

- $x^2-4>0 \quad \rightarrow \quad x<-2 \lor x>2$
- $x+1>0 \quad \rightarrow \quad x>-1$

	-2	-1	2	R
	+	−	−	+
	−	−	+	+
$f(x)$	−	+	−	+

La doppia linea nella tabella indica che il punto -1 non appartiene al dominio. Ricordiamo infatti che ogni equazione o disequazione che riguarda la funzione deve essere risolta nell'ambito del suo dominio.
La funzione è:

- positiva negli intervalli $(-2, -1)$ e $(2, +\infty)$
- negativa negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(-1, 2)$.

ANIMAZIONE

Per riportare le informazioni fin qui ottenute nel piano cartesiano (osserva la *figura a lato*) procediamo in questo modo:

- tracciamo una linea verticale in corrispondenza del valore $x=-1$ escluso dal dominio;