Università degli Studi di Teramo

Corso di Laurea in Economia – Anno Accademico 2021-2022

Insegnamento di Economia dello Sport

Prof. Marco Di Domizio

Esercizio 1

Antonia è una studentessa universitaria che finanzia i propri studi svolgendo il lavoro di baby-sitter. La sua funzione di utilità presenta le seguenti caratteristiche:

$$U = C^{0,6} \cdot S^{0,4},$$

dove C esprime la quantità di beni di consumo ed S il numero di ore di tempo libero. I suoi genitori contribuiscono al suo mantenimento con un reddito quantificabile in circa 12€ al giorno, mentre la paga oraria che Antonia ottiene per il suo lavoro di *babysitter* è di 8€ l'ora. Calcola:

a. la quantità giornaliera ottimale di tempo che Antonia dedica al tempo libero, il numero di ore di lavoro, ed i livelli di consumo considerato che, dato l'impegno per lo studio, il numero massimo di ore di lavoro è quantificabile in 6 ore giornaliere, e che il prezzo medio dei beni di consumo è di 4€.
b. Si verifichi che la spesa giornaliera di Antonia corrisponde esattamente al suo reddito complessivo, e si rappresenti la soluzione anche attraverso un'analisi grafica.
c. Si ricalcoli l'atteggiamento di Antonia in termini di orario di lavoro e tempo libero se, insieme al contributo dei propri genitori, lei potesse contare su un reddito di cittadinanza di ulteriori 20€ al giorno.
d. Si calcolino i nuovi livelli di consumo e del relativo tempo di svago nel caso in cui la funzione di utilità avesse la seguente forma per i dati del punto a:
$$U = 0,6 \cdot C + 0,4 \cdot S.$$
e. Si calcolino i nuovi livelli di consumo e del relativo tempo di svago nel caso in cui la funzione di utilità avesse la seguente forma per i dati del punto a:
$$U = 0,2 \cdot C + 0,8 \cdot S.$$
f. Si calcolino i nuovi livelli di consumo e del relativo tempo di svago nel caso in cui la funzione di utilità avesse la seguente forma per i dati del punto a:
$$U = C^{\alpha} + S^{1-\alpha} \qquad \text{con } \alpha = 1.$$
g. Si calcolino i nuovi livelli di consumo e del relativo tempo di svago nel caso in cui la funzione di utilità avesse la seguente forma per i dati del punto a:
$$U = C^{\alpha} + S^{1-\alpha} \qquad \text{con } \alpha = 0.$$
h. Si calcolino i nuovi livelli di consumo e del relativo tempo di svago nel caso in cui la funzione di utilità avesse la seguente forma per i dati del punto a:
$$U = 0,4 \cdot C + 0,8 \cdot S.$$

Risoluzione:

a. $U = C^{0,6} \cdot S^{0,4}$; R_{NL}=12; w = 8; T = 6; P_C = 4.

$$\max_{C,S} U = C^{0,6} \cdot S^{0,4}$$
$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$
$$\frac{U'_C}{P_C} = \frac{U'_S}{w}$$

$$\frac{dU}{dC} \equiv U'_C = 0,6 \cdot C^{0,6-1} \cdot S^{0,4};$$

$$\frac{dU}{dS} \equiv U'_S = 0,4 \cdot C^{0,6} \cdot S^{0,4-1};$$

$$\frac{0,6 \cdot C^{0,6-1} \cdot S^{0,4}}{4} = \frac{0,4 \cdot C^{0,6} \cdot S^{0,4-1}}{8}$$

$$\frac{0,6 \cdot C^{-0,4} \cdot S^{0,4}}{4} = \frac{0,4 \cdot C^{0,6} \cdot S^{-0,6}}{8}$$

Moltiplichiamo primo e secondo termine per $C^{0,4}$ e per $S^{0,6}$

$$\frac{0,6 \cdot S}{4} = \frac{0,4 \cdot C}{8}$$

Moltiplichiamo per 8 primo e secondo termine

$$1,2 \cdot S = 0,4 \cdot C$$

Dividiamo primo e secondo termine per 1,2

$$S = \frac{1}{3} \cdot C$$

Questa è la relazione ottimale con la quale l'agente deve distribuire consumo e tempo di svago per massimizzare la sua funzione di utilità. Ora cerchiamo i "valori" che permettono al nostro agente di massimizzare la sua utilità "dati" i parametri del problema…
Sostituiamo, quindi, nel vincolo di bilancio la relazione ottimale appena definita…

$$12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$

$$12 + 48 - 8 \cdot S = 4 \cdot C$$

$$60 = 8 \cdot S + 4 \cdot C$$

$$60 = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot C + 4 \cdot C$$

$$\frac{180}{3} = \frac{8 + 12}{3} \cdot C$$

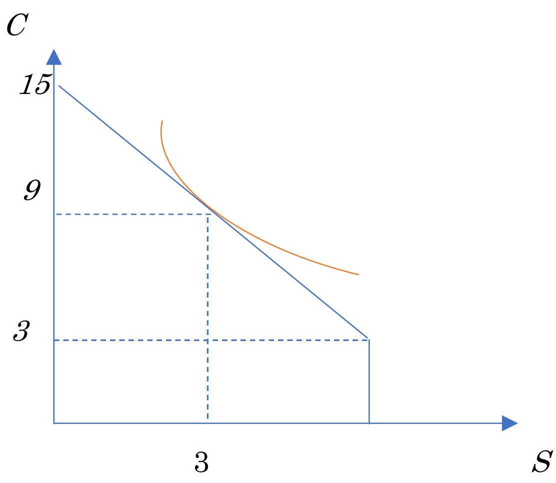
$$180 = 20 \cdot C$$

$$C^* = 9$$
$$S^* = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$$

$$\text{Ore di lavoro ottimali} = T - S^* = 6 - 3 = 3$$

b. Spesa per i consumi $\quad C^* \cdot P_C = 9 \cdot 4 = 36$

Reddito giornaliero $\quad R_{NL} + 8 \cdot (6 - S^*) = 12 + 8 \cdot (6 - 3) = 36$



c.

$$\max_{C,S} U = C^{0,6} \cdot S^{0,4}$$
$$\text{Sub} \quad 32 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$

Dato che le preferenze di Antonia non sono cambiate, il rapporto ottimale di distribuzione del tempo tra lavoro (consumo) e svago non cambia, per cui …

$$S = \frac{1}{3} \cdot C$$

$$32 + 48 - 8 \cdot S = 4 \cdot C$$

$$80 = 8 \cdot S + 4 \cdot C$$

$$80 = 8 \cdot \frac{1}{3} \cdot C + 4 \cdot C$$

$$\frac{240}{3} = \frac{8 + 12}{3} \cdot C$$

$$240 = 20 \cdot C$$

$$C' = 12$$
$$S' = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

d. $U = 0{,}6 \cdot C + 0{,}4 \cdot S$.

$$\underset{C,S}{\text{Max}}\, U = 0{,}6 \cdot C + 0{,}4 \cdot S$$
$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$

$$\frac{U'_C}{P_C} = \frac{U'_S}{w}$$

$$\frac{dU}{dC} \equiv U'_C = 0{,}6;$$

$$\frac{dU}{dS} \equiv U'_S = 0{,}4;$$

$$\frac{0{,}6}{4} = \frac{0{,}4}{8}; \qquad 0{,}15 = 0{,}05; \quad 0{,}15 > 0{,}05$$

Dalle FOC emerge che l'utilità marginale ponderata del consumo è sempre superiore all'utilità marginale ponderata del tempo di svago. Siamo di fronte ad una scelta d'angolo…

$$S'' = 0; \qquad C = \frac{R_{NL} + T \cdot w}{P_C} = \frac{12 + 6 \cdot 8}{4} = 15$$

e. $U = 0{,}2 \cdot C + 0{,}8 \cdot S$.

$$\underset{C,S}{\text{Max}}\, U = 0{,}2 \cdot C + 0{,}8 \cdot S$$
$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$

$$\frac{U'_C}{P_C} = \frac{U'_S}{w}$$

$$\frac{dU}{dC} \equiv U'_C = 0{,}2;$$

$$\frac{dU}{dS} \equiv U'_S = 0{,}8;$$

$$\frac{0{,}2}{4} = \frac{0{,}8}{8}$$

$$0{,}05 = 0{,}1$$

$$0{,}05 < 0{,}1$$

Dalle FOC emerge che l'utilità marginale ponderata del tempo di svago è sempre superiore all'utilità marginale ponderata del tempo di lavoro (consumo). Siamo di fronte ad una scelta d'angolo…

$$S''' = 6; \qquad C = \frac{R_{NL}}{P_C} = \frac{12}{4} = 3$$

f. $$U = C^{\alpha} + S^{1-\alpha} \qquad \text{con } \alpha = 1.$$

$$U = C + 1$$

$$\underset{C,S}{\text{Max}}\, U = C + 1$$
$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$

$$S = 0;\, C = max = \frac{60}{4} = 15$$

g. $$U = C^{\alpha} + S^{1-\alpha} \qquad \text{con } \alpha = 0.$$

$$U = 1 + S$$

$$\underset{C,S}{\text{Max}}\, U = 1 + S$$

$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$

$$S \leq 6;$$

$$S = 6\,; \qquad C \text{ è } compreso\ tra\ 0\ e\ \frac{12}{4} = 3$$

h. $U = 0{,}4 \cdot C + 0{,}8 \cdot S.$

$$\underset{C,S}{\text{Max}}\, U = 0{,}4 \cdot C + 0{,}8 \cdot S$$
$$\text{Sub} \quad 12 + 8 \cdot (6 - S) = 4 \cdot C$$
$$S \leq 6;$$

$$\frac{U'_C}{P_C} = \frac{U'_S}{w}$$

$$\frac{dU}{dC} \equiv U'_C = 0{,}4;$$

$$\frac{dU}{dS} \equiv U'_S = 0{,}8;$$

$$\frac{0{,}4}{4} = \frac{0{,}8}{8}$$

$$0{,}1 = 0{,}1$$

Dalle FOC emerge che l'utilità marginale ponderata del consumo è sempre uguale all'utilità marginale ponderata del tempo di svago. Siamo di fronte ad un *continuum* di soluzioni, ogni possibile combinazione nel tratto del vincolo di bilancio compreso tra l'intersezione con l'asse delle ordinate e l'angolo in corrispondenza della quantità di consumo pari al rapporto tra reddito non da lavoro e prezzo dei beni di consumo.