Distribuzione di frequenza

Una **distribuzione di frequenza** è una tabella dove in corrispondenza delle modalità viene riportato il numero di volte che quelle stesse modalità si sono verificate.

Ad ogni modalità della variabile statistica viene associata la sua frequenza.

Modalità (voto)	Frequenze assolute (n. 26 studenti)
24	3
25	4
26	4
27	6
28	2
29	5
30	2

Distribuzione di frequenza

La distribuzione di frequenza può essere utilizzata anche per variabili non numeriche (es. regioni)

Regioni	Stranieri residenti
Piemonte	203,9
Valle d'Aosta-Vallée d'Aoste	3,7
Lombardia	577,3
Bolzano-Bozen	*24,0*
Trento	*22,1*

Si può raggruppare la **distribuzione di frequenza in classi**.
L'ampiezza delle classi è arbitraria, purchè si utilizzi un criterio di scelta che tenga conto dell'obiettivo dell'analisi.

Modalità (classi di voto)	Frequenze assolute (n. 26 studenti)
24-26	11
27-29	13
30	2

Frequenze relative

Per confrontare due distribuzioni è sufficiente guardare le frequenze assolute?

N. di componenti in famiglia	Campania Freq. assolute	Valle d'Aosta Freq. assolute
1	59	11
2	74	13
3	75	11
4	66	14
5	23	8
6	10	6
Totale	**307**	**63**

Frequenze relative

Per confrontare due distribuzioni è sufficiente guardare le frequenze assolute?

N. di componenti in famiglia	Campania		Valle d'Aosta	
	Freq. assolute	Freq. relative	Freq. assolute	Freq. relative
1	59	0,192	11	0,175
2	74	0,241	13	0,206
3	75	0,244	11	0,175
4	66	0,215	14	0,222
5	23	0,075	8	0,127
6	10	0,033	6	0,095
Totale	**307**	**1**	**63**	**1**

Frequenze relative

N. di componenti in famiglia	Campania			
	Freq. assolute	Freq. relative	Freq. percentuali	Freq. cumulate
1	59	0,192	19,2	19,2
2	74	0,241	24,1	43,3
3	75	0,244	24,4	67,7
4	66	0,215	21,5	89,2
5	23	0,075	7,5	96,7
6	10	0,033	3,3	**100**
Totale	**307**	**1**	**100**	

Tipo di frequenze

La **frequenza assoluta** rappresenta il numero intero di unità statistiche nelle quali è stata osservata una certa caratteristica.

Le **frequenze relative** si calcolano dividendo la frequenza assoluta di una determinata modalità o classe per il totale delle osservazioni. Si otterrà sempre un numero da 0 a 1.

Le frequenze relative possono essere moltiplicate per 100 ottenendo le **frequenze relative percentuali** (il totale è sempre 100%).

La **frequenza cumulata** di una modalità o classe è pari alla sua frequenza assoluta sommata alle frequenze assolute delle modalità che la precedono.

Le distribuzioni per le variabili continue

Nel caso di **variabili continue** dobbiamo tener conto del fatto che tra due modalità ce ne possono essere infinite altre.
Il risultato probabile è che ci siano solo modalità distinte nel collettivo.

Ad esempio in questo caso:

	peso alla nascita
Michela	1.95
Francesco	2.15
Valentina	2.00
Giacomo	2.35
Matteo	3.10
Federica	2.45

Le distribuzioni per le variabili continue

Bisogna considerare le classi di modalità e la frequenza degli elementi nella classe così per la classe (x_{i-1}, x_i) si conteggiano tutte le modalità di X comprese in $x_{i-1} < X \leq x_i$.

La frequenza n_i mi dice quante unità presentano modalità comprese nell'intervallo (x_{i-1}, x_i).

Come si calcola l'ampiezza delle classi?

Un criterio può essere prendere delle *classi equi-ampie* con ciascuna ampiezza uguale.

Tipo di frequenze

Supponiamo di voler sapere quanti dipendenti di una società abbiamo un reddito uguale o inferiore a 30.000€ l'anno.
Totale dei dipendenti = 120

Classi di reddito €	Frequenze assolute	Frequenze relative	Frequenze%	Frequenze relative cumulate	Frequenze % cumulate
< 15.000	16	0,13	13,3	0,13	13,3
15.000-30.000	64	0,53	53,3	0,67	66,7
30.000-45.000	30	0,25	25,0	0,92	91,7
45.000-60.000	8	0,07	6,7	0,98	98,3
60.000 <	2	0,02	1,7	1	100
	120	1	100		

Dalla tabella si evince che il 67% dei dipendenti ha un reddito uguale o inferiore a 30.000€.

Tipo di frequenze

Supponiamo ora di voler sapere quanti dipendenti della stessa società abbiamo un reddito superiore a 45.000€ l'anno.

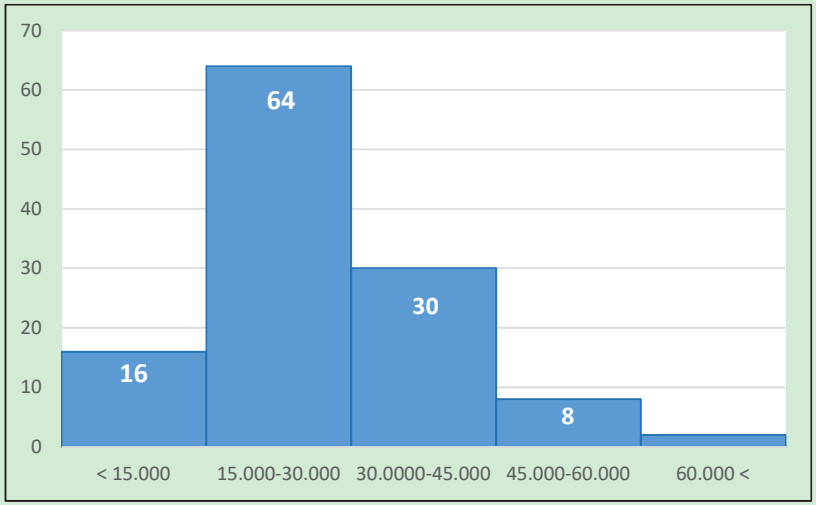
Bisogna calcolare la **frequenza retrocumulata** sommando le frequenze a partire dall'ultima classe fino alla prima.

Classi di reddito €	Frequenze assolute	Frequenze assolute retrocumulate	Frequenze relative retrocumulate	Frequenze % retrocumulate
< 15.000	16	120	1	100
15.000-30.000	64	104	0,87	86,67
30.0000-45.000	30	40	0,33	33,33
45.000-60.000	8	10	0,08	8,33
60.000 <	2	2	0,02	1,67
	120			

Dalla tabella si evince che 10 dipendenti hanno un reddito superiore a 45.000€, ossia l'8,33%.

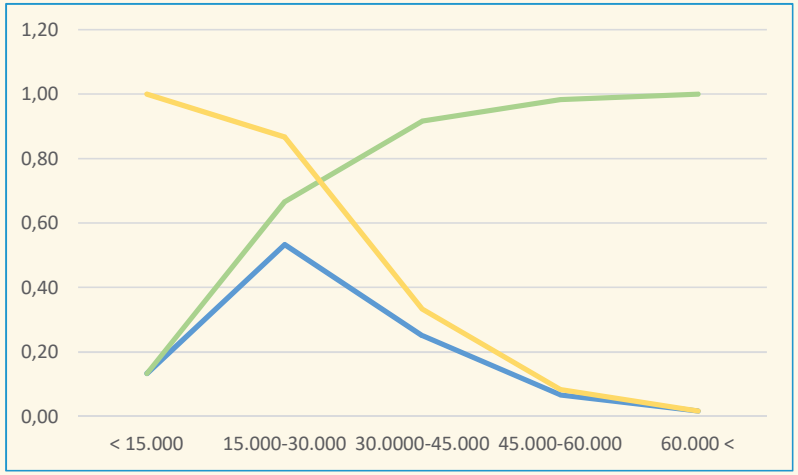
Gli istogrammi

Gli **istogrammi** sono grafici che consistono in una serie di rettangoli con la base che poggia sull'asse orizzontale del piano cartesiano.
La base è data dall'ampiezza della classe, mentre l'altezza dipende dalla frequenza.



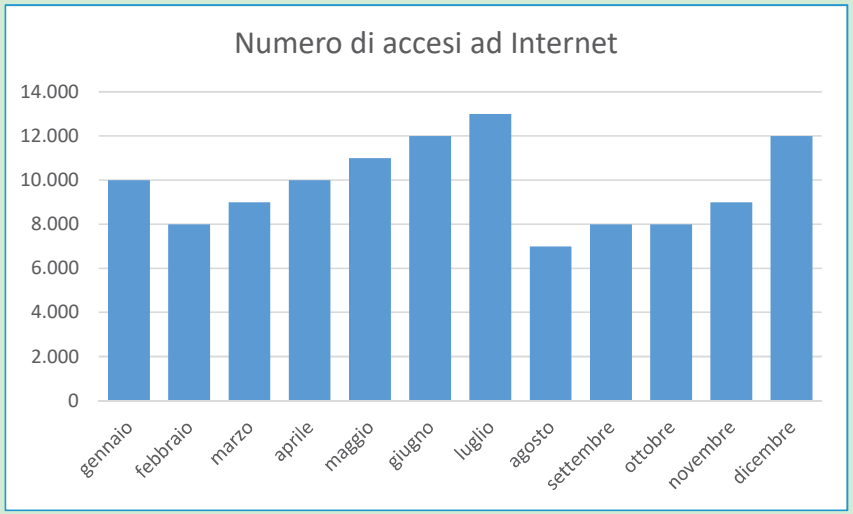
Le ogive

Le **ogive** sono utili per rappresentare le frequenze cumulate e retrocumulate.
Le ogive dal basso sono relative alle frequenze cumulate, le ogive dall'alto alle frequenze retrocumulate.



I diagrammi a barre

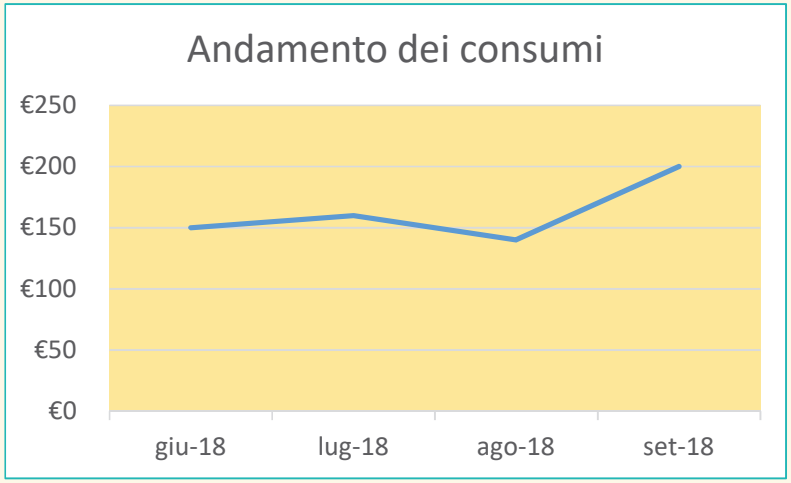
I **diagrammi a barre** sono simili agli istogrammi, ma vengono utilizzati per rappresentare dati qualitativi. Sono utilizzati per visualizzare i raffronti tra categorie.
Non c'è continuità tra le classi per cui le barre sono distanziate le une dalle altre.



Le serie storiche

La **serie storica** rappresenta la dinamica di un certo fenomeno nel tempo.
Supponiamo di avere una variabile, un'unità ed il tempo: i consumi in Italia.
Per l'Italia (unità) abbiamo raccolto le informazioni per ciascun mese (tempo) dei consumi (variabile).
In questo caso abbiamo la cosiddetta **serie storica dei consumi**.

Grafico a linee



Calcolo della media per una distribuzione di frequenza

Modalità di x	Frequenze assolute (ni)
38	1
39	1
40	3
41	4
42	8
43	1
44	0
45	1
46	1
	20

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}$$

$$\mu = \frac{(38*1+39*1.....46*1)}{1+1+3...+1}$$

$$\mu = 41{,}55$$

Calcolo della media per una distribuzione di frequenza

Modalità di x	Frequenze relative	xi*fi
38	0,05	1,9
39	0,05	2,0
40	0,15	6,0
41	0,20	8,2
42	0,40	16,8
43	0,05	2,2
44	0,00	0,0
45	0,05	2,3
46	0,05	2,3
	1	41,55

Esercizio

Calcolare le frequenze relative e il numero medio di macchine possedute per famiglia

Macchine possedute (xi)	N. di famiglie	(fi)	xi*fi
0	35	0,21	0,00
1	50	0,30	0,30
2	66	0,40	0,80
3	15	0,09	0,27
		1	1,36

Calcolo della media per una distruzione di frequenza per classi

Nel caso in cui la distribuzione sia per classi occorre fare un passaggio ulteriore, calcolare il valore centrale di ciascuna classe:

$$\frac{(x_i + x_{i-1})}{2}$$

Ipotesi di **equidistribuzione**, ossia che i valori siano distribuiti uniformemente all'interno della classe

Classi di modalità	Frequenze assolute (ni)	Valore centrale della classe	ni*xi
0-60	5	30	150
60-120	27	90	2.430
120-180	255	150	38.250
180-300	571	240	137.040
300-600	312	450	140.400
600-1022	22	811	17.842
	1.192		336.112

μ = 336.112/1.192= 282

Esercizio

Calcolare la media per la seguente distribuzione per classi

xi	ni	Valori centrali	xi*ni
20-30	17	25	425
30-40	65	32,5	2.113
40-50	20	37,5	750
50-60	35	47,5	1.663
	137		4.950

μ = 4.950/137= 36,13

Calcolo della mediana

1- Disporre i dati in ordine crescente

2- Calcolare le frequenze cumulate

2- Calcolare l'indice **i**

$$i = \left(\frac{p}{100}\right) * n$$

p = p-mo percentile

Se i non è intero, bisogna arrotondare per eccesso. L'intero più grande definisce la posizione del p-mo percentile.
Se i è intero, il p-mo è la media delle posizioni i e i+1.

oppure

2- Calcolare

$$Me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & \text{per n dispari} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2} & \text{per n pari} \end{cases}$$

Calcolo della mediana per una distribuzione di frequenza

Occorre calcolare le **frequenze assolute cumulate**.

µe: $\left(\frac{50}{100}\right)$*777 = 388,5 ➡ 389

Oppure: $\frac{777+1}{2}$ = 389

Oppure: $\frac{777}{2}$ = 388,5 ➡ 389

µe ➡

Modalità di x	Frequenze assolute	Frequenze cumulate
38	4	4
39	12	16
40	53	69
41	107	176
42	212	388
43	178	566
44	123	689
45	68	757
46	18	775
47	1	776
49	1	777
	777	

Calcolo della mediana per una distruzione di frequenza per classi

Occorre calcolare le **frequenze assolute cumulate**.

$Me = \frac{50}{100} * 75 = 37{,}5$ → 38

Oppure essendo un numero dispari $\frac{75+1}{2} = 38$

La classe che contiene il valore mediano è la 300-400. **Me** è il valore centrale 350.

Classi di modalità	Frequenze assolute (ni)	Frequenze assolute cumulate
100-200	15	15
200-300	20	35
300-400	27	62
400-500	13	75
	75	

Calcolo della mediana per una distruzione di frequenza per classi

Occorre calcolare le **frequenze assolute cumulate**.

$Me = \frac{50}{100} * 76 = 38 \text{ e } 39 \Rightarrow 38{,}5$

Oppure essendo un numero pari= $\frac{(76/2) + ((76/2)+1)}{2} = 38{,}5$

La classe che contiene il valore mediano è la 300-400. **Me** è il valore centrale 350.

Classi di modalità	Frequenze assolute (ni)	Frequenze assolute cumulate
100-200	15	15
200-300	20	35
300-400	27	62
400-500	14	76
	76	

Esercizio

Considerando le seguenti frequenze assolute del livello di soddisfazione dei clienti di un servizio di vendita online, determinare il valore mediano.

xi	Frequenze assolute	Frequenze assolute cumulate
Per niente soddisfatto	28	28
Poco soddisfatto	15	43
Abbastanza soddisfatto	37	80
Molto soddisfatto	21	101
Non so	2	103
	103	

(103+1)/2= 52
Abb. soddisfatto

Metodo dell'interpolazione

Mediana

$$\mu e = L_{inf} + c \frac{\frac{N}{2} - \sum F_{iMe}}{n_{Me}}$$

L_{inf} = limite inferiore della classe mediana
c = ampiezza della classe
F_{ime} = frequenze cumulate della classe inferiore alla mediana
n_{me} = frequenza assoluta della classe mediana

Classi d'età	Frequenze assolute	Frequenze cumulate
0-20	22	22
20-40	45	67
40-65	80	147
65 ed oltre	40	187
	187	

$$=40+25*\frac{(187/2)-67}{80}$$

Moda

Qual è il valore modale della distribuzione?

xi per classi	Frequenze % (pi)
20-30	36
30-40	57
40-50	51,5
50-60	47,5
60-70	34

Classe modale 30-40. E’ possibile calcolare il valore centrale (30+40)/2 oppure utilizzare la formula:

$$\mu o = L_{inf} + c \frac{\Delta inf}{\Delta inf + \Delta sup}$$

Esercizio

Qual è il valore modale della distribuzione?

xi per classi	Frequenze relative (fi)
35-45	0,179
45-55	0,329
55-70	0,451
70-85	0,381

In questo caso l'ampiezza delle classi è differente.
Nel caso di classi non sono **equiampie** bisogna calcolare le **densità di frequenza**.

Densità di frequenza

Rapporto tra le frequenze assolute (o relative) e l'ampiezza delle classi. Si può interpretare come il grado di addensamento delle frequenze nel corrispondente intervallo di valori.

$$di = \frac{ni \text{ (o } fi)}{hi}$$

hi = ampiezza delle classi (limite superiore-limite inferiore)

h1 = 45-35 = 10
h2 = 55-45 = 10
h3 = 70-55 = 15
h4 = 85-70 = 15

d1 = 0,179/10 = 0,0179
d2 =0,329/10= 0,0329
d3 = 0,451/15= 0,0300
d4 =0,381/15= 0,0254

xi per classi	di
35-45	0,0179
45-55	0,0329
55-70	0,0300
70-85	0,0254

Intervallo modale è quello a cui corrisponde la più elevata densità di frequenza

Istogramma di densità

Se le classi sono equiampie non fa distinzione riportare la densità o la frequenza sull'asse verticale dell'istogramma.

Quando invece le classi non sono tutti uguali non sarebbe corretto disegnare l'altezza di ogni rettangolo in base alla frequenza.
Infatti, un intervallo di valori più ampio tenderà a contenere un numero maggiore di frequenze.

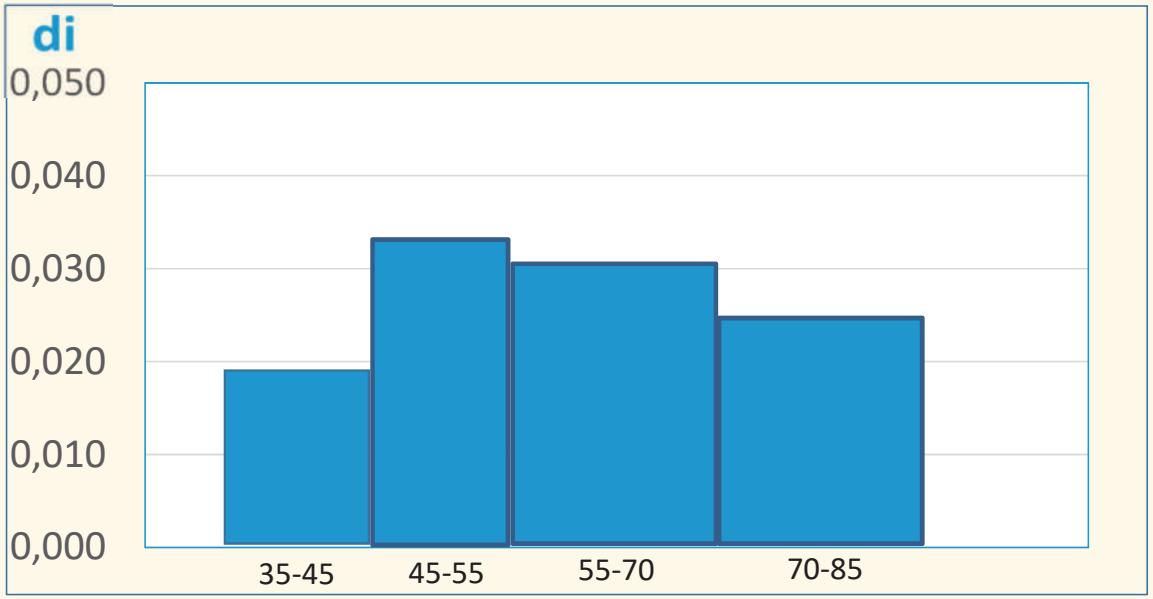
Negli **istogrammi di densità** (con classi di ampiezza diversa), l'altezza dei rettangoli indica la densità della classe, mentre la frequenza è rappresentata dall'area del rettangolo**.**

Frequenza = base x altezza

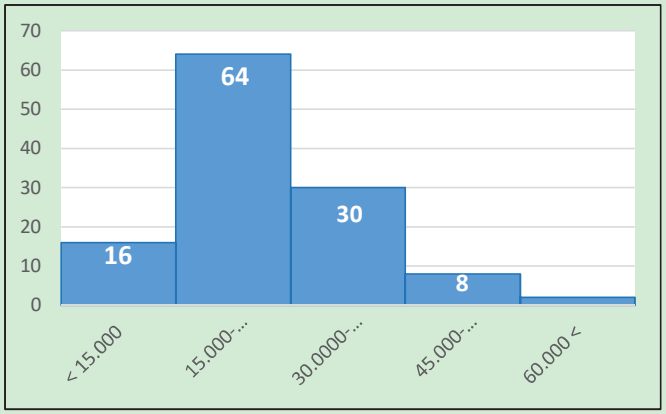
$$\textbf{Altezza (ovvero densità)} = \frac{\textbf{frequenza}}{\textbf{base}}$$

Istogramma di densità

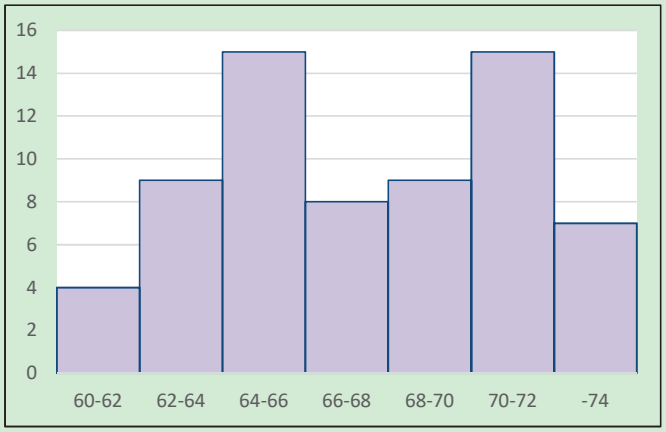
L’altezza dei rettangoli sarà determinata in modo che l’area del rettangolo sia pari alla frequenza della classe.
La somma delle aree sarà quindi la somma delle frequenze per ogni singola classe.



Tipi di distribuzione

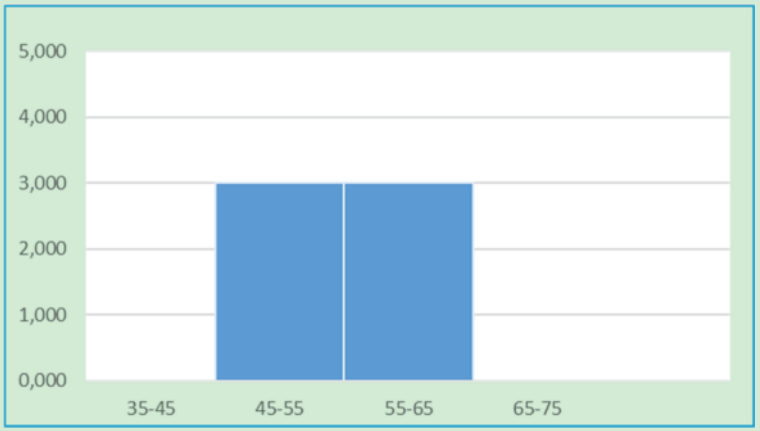


Unimodale

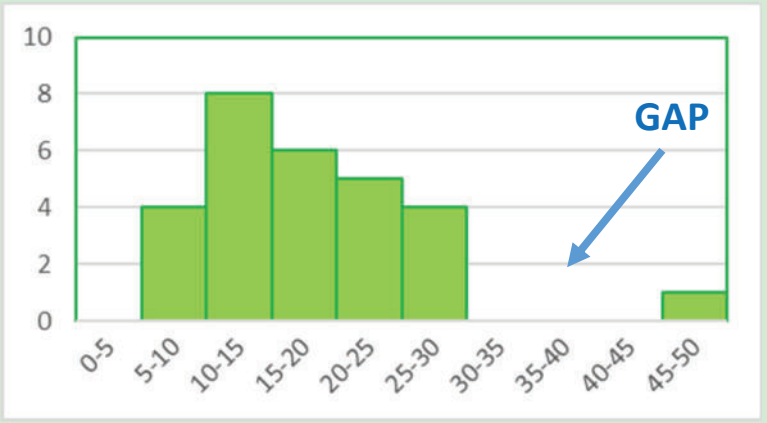


Bimodale

Tipi di distribuzione



Uniforme



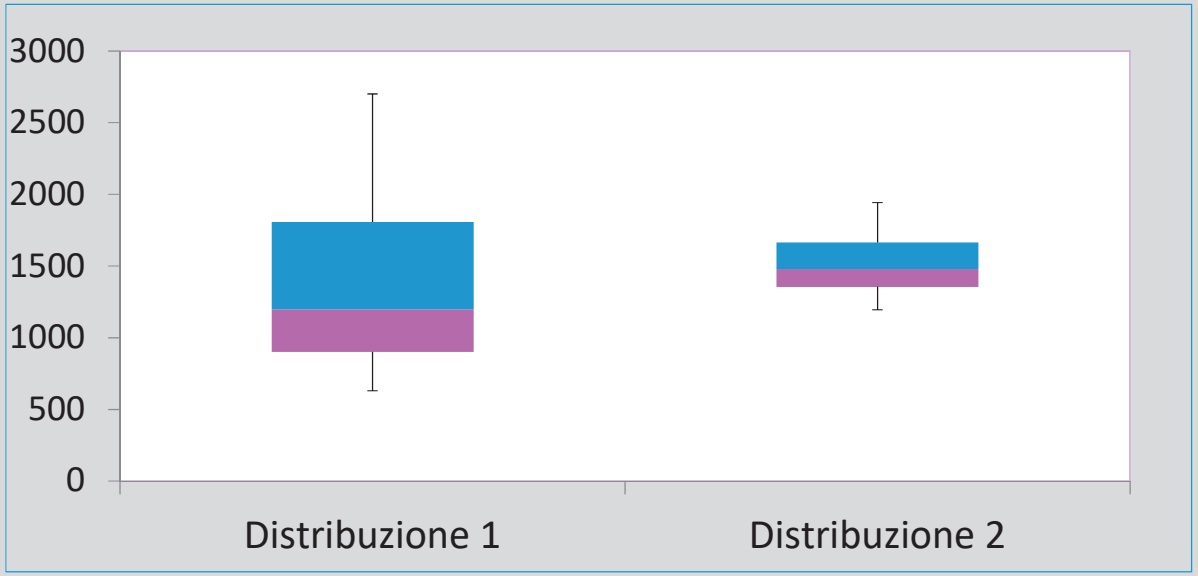
Outlier

Riassunto

Carattere		Misura
Qualitativo	Sconnesso (nominale)	Moda
	Ordinabile	Moda, mediana, quartili
Quantitativo		Moda, mediana, quartili, media

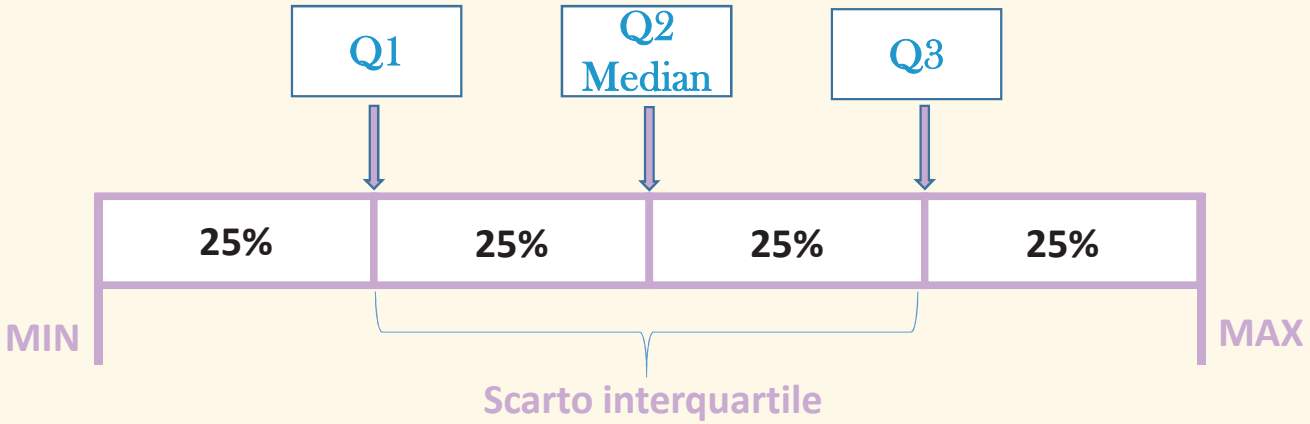
Misura	Quando usarla	Caratteristiche
Media	Facile da calcolare	Indice poco robusto. Per distribuzioni con valori estremi non è appropriato
Media ponderata	Quando ogni osservazione ha un peso diverso	Indice poco robusto
Mediana	Per conoscere il punto centrale di una distribuzione o se questa è asimmetrica	Non è sensibile ai valori estremi
Moda	E' facile da usare per scale nominali	Misura grezza

Confronto tra distribuzioni



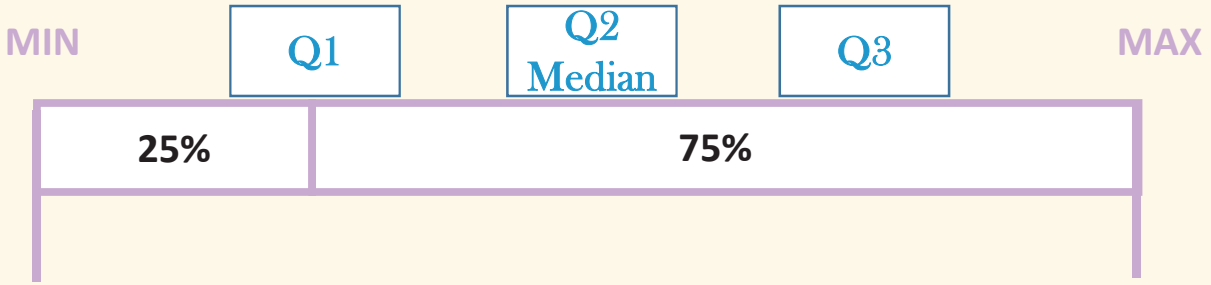
Quartili

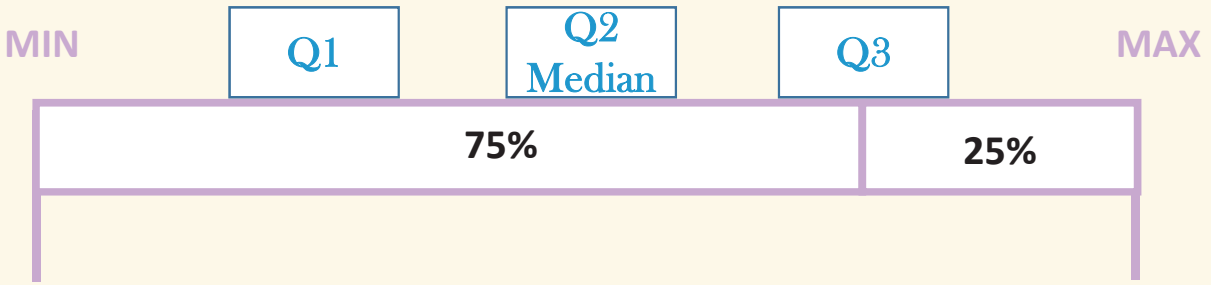
I **quartili** sono quei valori che dividono l'insieme dei dati in 4.
La mediana lascia a destra e a sinistra del proprio valore il 50% dei casi, suddividendo la distribuzione in due parti uguali.
Posso dividere in maniera analoga la distribuzione in 4 parti uguali.



Lo **scarto interquartile** si definisce come la differenza tra il terzo e il primo quartile di un insieme di dati.

Quartili





Q3-Q1 = scarto interquartile. É l'ampiezza dell'intervallo che contiene il 50% dei dati posizionati in mezzo alla distribuzione.
É una misura di variabilità che supera il problema della dipendenza dai valori estremi.

Utilizzo dei quartili

Esempio: Per un manager è utile sapere che la propria azienda si trova nel primo quartile, se questo corrisponde a un fatturato di 20mln. Vuol dire che fa parte del gruppo del 25% di aziende che ha avuto un fatturato fino a 20mln, mentre il restante 75% ha avuto un fatturato maggiore di 20mln.

Esempio: Si può valutare il posizionamento del proprio salario rispetto alla distruzione dei salari di altri dipendenti di altre aziende.

Esempio

Calcolo della mediana, dei quartili e dello scarto interquartile per i seguenti salari (N 12)

3310	3355	3450	3480	3480	3490	3520	3540	3550	3650	3730	3925

(3450+3480)/2= 3465
Q1

(3490+3520)/2= 3505
Q2

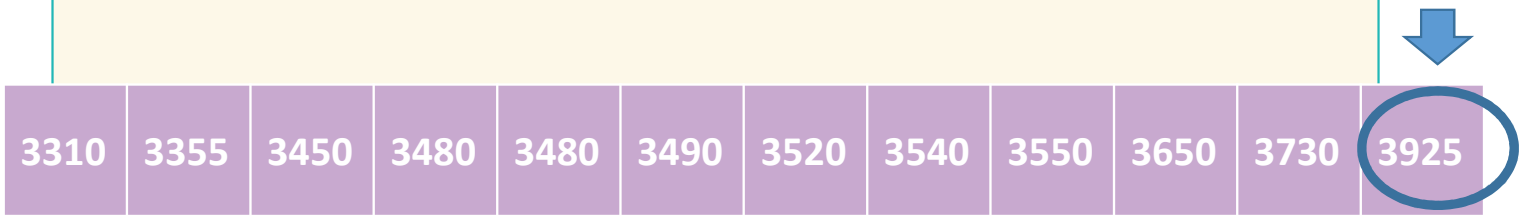
(3550+3650)/2= 3600
Q3

$Q2 = 0{,}5 * 12 = 6 \rightarrow$ tra 6 e 7
$Q1 = 0{,}25 * 12 = 3 \rightarrow$ tra 3 e 4
$Q3 = 0{,}75 * 12 = 9 \rightarrow$ tra 9 e 10
$IQR = 3600 - 3465 = 135$

Come individuare un outlier

< Q1 – 1,5 (IQR) = 3465 – 1,5(135) = > 3262,5

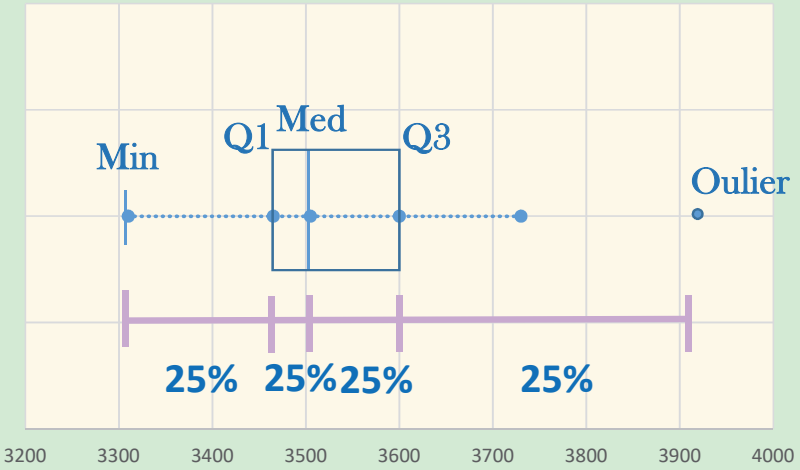
> Q3 + 1,5 (IQR) = 3600 + 1,5(135)= < 3802,5



Boxplot

Il diagramma a scatole e baffi, o **boxplot**, è un tipo di rappresentazione grafica adatta a studiare la forma di una distribuzione.
Mostra la mediana, i quartili superiore e inferiore, i valori minimo e massimo ed eventuali outlier nel dataset.

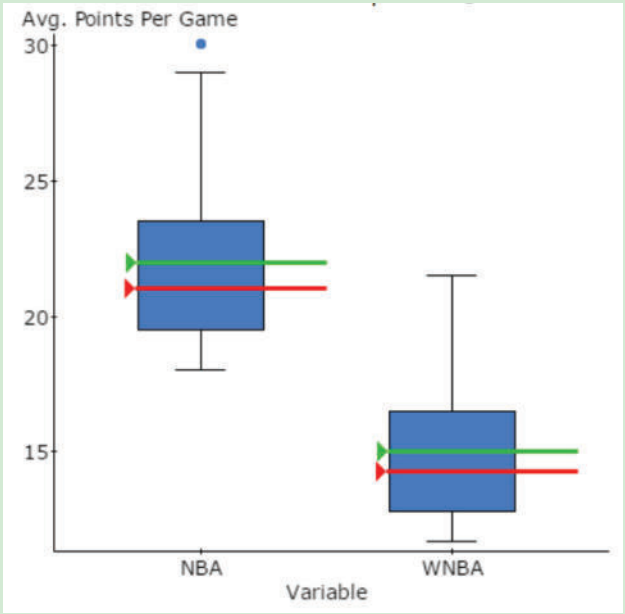
5 numeri EDA		
1	MIN	3310
2	Q1	3465
3	Q2 (mediana)	3505
4	Q3	3600
5	MAX	3925



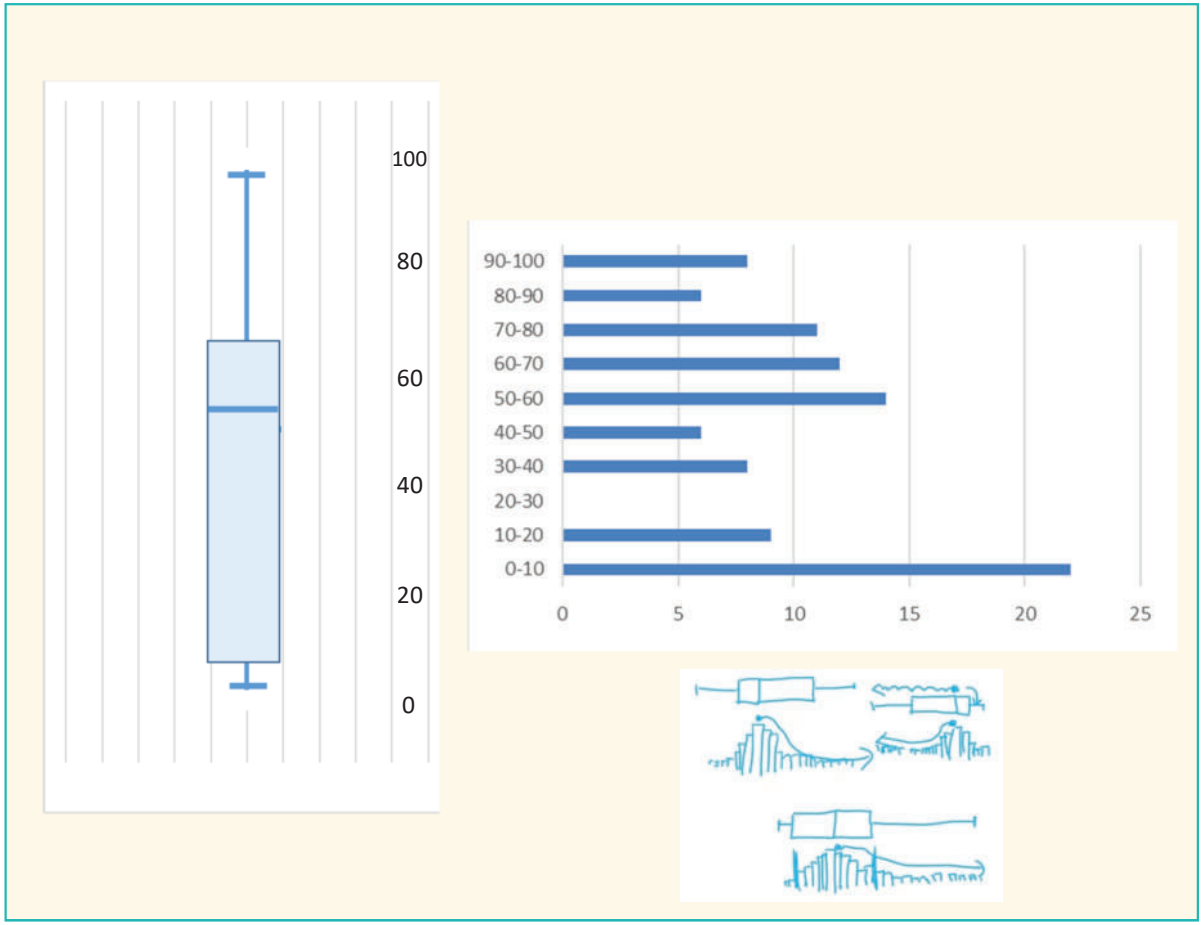
Domande

Se la lunghezza del baffo è corta, cosa ci dice dei valori dei dati?

Se la lunghezza del baffo è lunga, cosa ci dice dei valori dei dati?

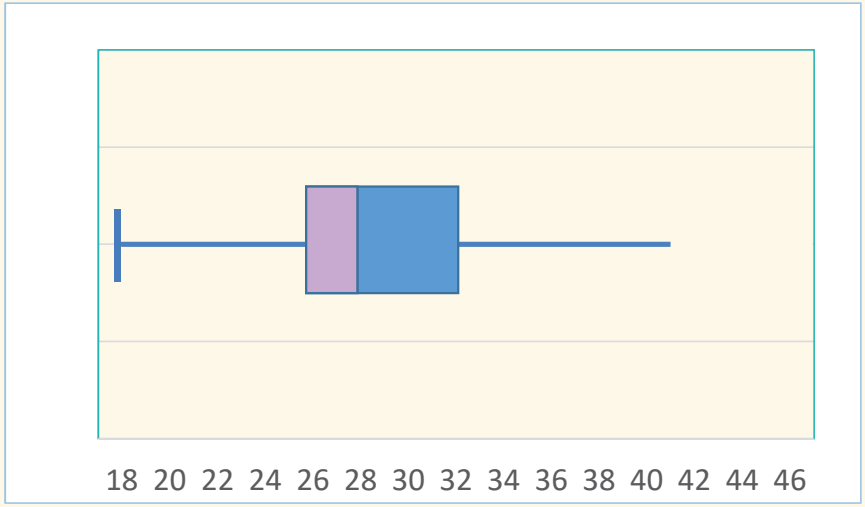


Bloxplot e istogramma a confronto



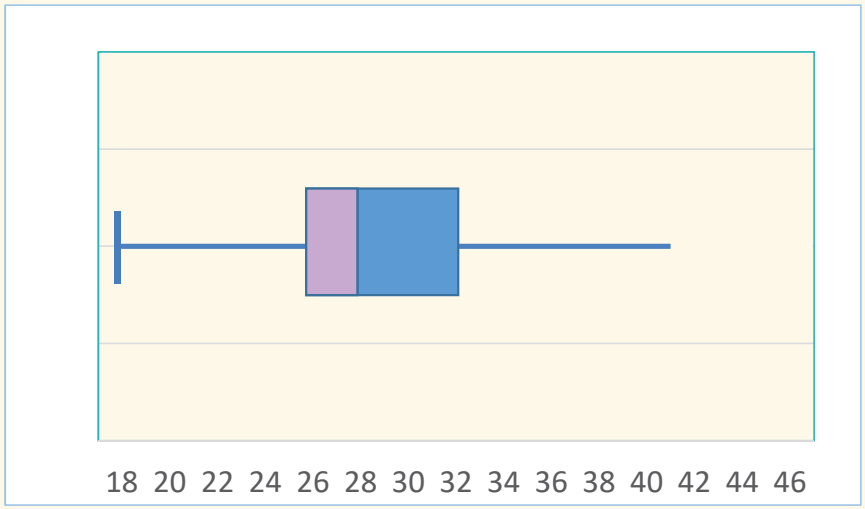
Domande 1

Boxplot – età al matrimonio



1- Qual è l'età mediana al matrimonio?
2- Vengono celebrati più matrimoni nella fascia d'età 28-32 che 26-28?
3- Qual è il valore dell'IQR?
4- È possibile individuare un outlier? Come?
5- È possibile calcolare il numero di matrimoni che sono stati celebrati tra i 26-28 anni?

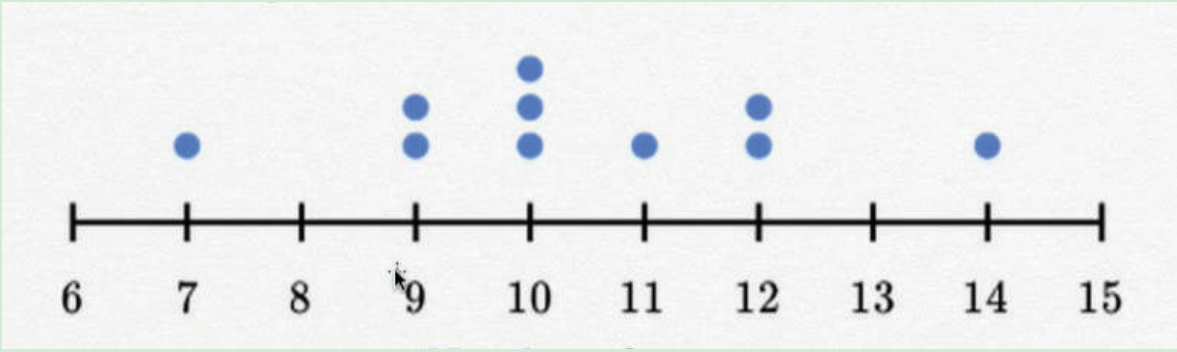
Domande 2



6- Quale percentuale dei matrimoni è celebrata a un'età superiore ai 28 anni?
7- Si può determinare se qualche matrimonio è stato celebrato all'età di 17 anni?
8- In quale fascia d'età si rileva una maggiore variabilità?

Esercizio

Calcolo della mediana, dei quartili e dello scarto interquartile per la distribuzione:



Svolgimento

Modalità	Frequenze assolute	Frequenze cumulate
7	1	1
9	2	3
10	3	6
11	1	7
12	2	9
14	1	10

Scarto interquartile

Q2= 0,5*10 = 5 tra 5 e 6
Q1= 0,25*10 = 2,5 quindi 3
Q3= 0,75*10 =7,5 quindi 8

IQR = 12-9= 3