LE FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Campo di Esistenza.

Poiché la funzione data è una razionale fratta, essa risulta definita su tutto l'asse reale tranne che nei punti in cui il denominatore della frazione si annulla, cioè:

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 4 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq \pm 2\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < -2,\ -2 < x < +2,\ +2 < x < +\infty\}}$

Proprio in corrispondenza di quei valori della x che annullano il denominatore della funzione si ottengono gli *Asintoti Verticali*.

Nel caso in esame, quindi, è già possibile asserire che le rette $x = -2$ ed $x = +2$ costituiscono i due asintoti verticali della funzione assegnata.

$\boxed{A.V.: x = -2,\ x = +2}$

Intersezioni con gli Assi.

Le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani si ottengono risolvendo, come di consueto, i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, 0)}$$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{B = C = (0, 0) = A}$ sono le due intersezioni della funzione con l'asse x

Ne segue che la funzione data interseca gli assi cartesiani esclusivamente nell'origine.

Segno della Funzione.

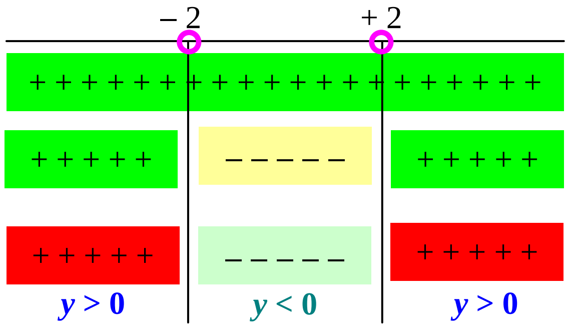
Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Ne segue:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 4} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in R \ (\textit{si tratta di un quadrato: è sempre positivo}) \\ x < -2, x > +2 \end{cases}$$

da cui:



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti delle funzioni polinomiali, occorre ricordare che, in generale, vale la seguente proprietà:

Se $y=\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+...+b_{m-1}x+b_m}$, dove $P_1(x)$ e $P_2(x)$ sono due polinomi nella variabile x, rispettivamente di grado n ed m, e $P_2(x) \neq 0$, allora risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{P_1(x)}{P_2(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[P_1(x)\right]}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[P_2(x)\right]}=\begin{cases}\frac{a_0}{b_0} & se\ n=m\\ 0 & se\ n<m\\ \infty & se\ n>m\end{cases}$$

Risulta allora possibile, in virtù di quanto sopra esposto, calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza di tutte le funzioni razionali fratte.

Nell'esempio si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)=\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to +1$: dunque la retta $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale*.

$\boxed{A.O.: y = 1}$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{D\left[f(x)\right]g(x)-f(x)D\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

si ottiene:

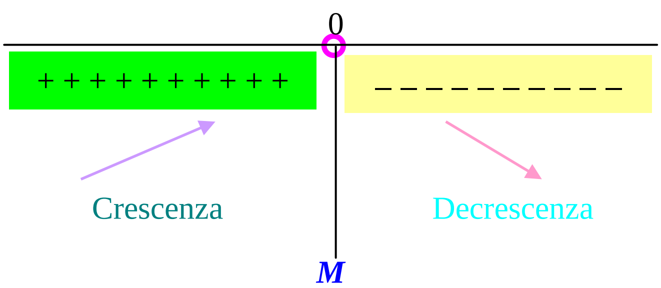
$$D\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)=\frac{D(x^2)(x^2-4)-x^2D(x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x(x^2-4)-x^2(2x)}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3}{(x^2-4)^2}=-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$-\frac{8x}{(x^2-4)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}-8x>0\\ (x^2-4)^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}8x<0\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x<0\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



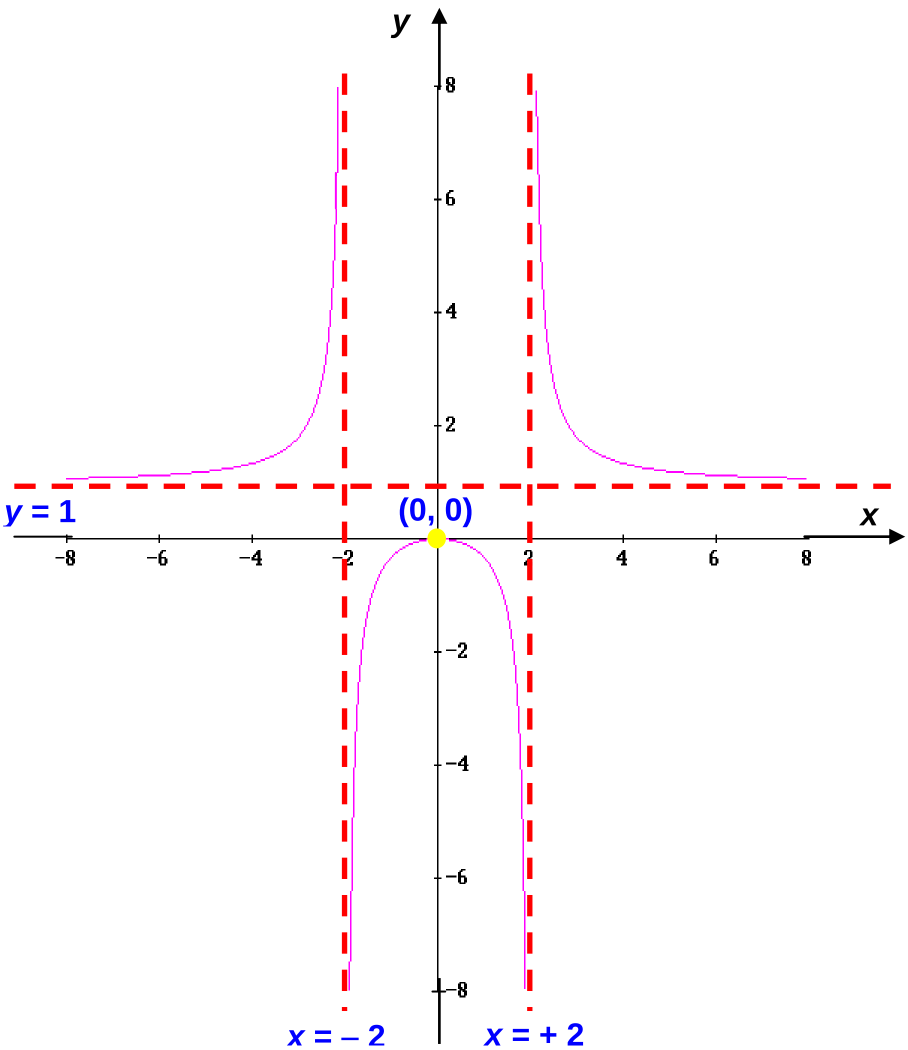
In $x = 0$, quindi, la funzione ha un *Massimo M*. L'ordinata corrispondente ad $x = 0$ è già stata calcolata facendo l'intersezione con l'asse delle y.
Dunque $\boxed{M = (0, 0)}$ è il *punto di Massimo*.

***Osservazioni*.**

1. Una frazione si annulla se e solo se si annulla il suo numeratore: per determinare, quindi, i valori della variabile x per i quali una frazione è uguale a zero basta uguagliare a zero il suo numeratore.
2. Dalla formula generale della derivata di un quoziente, segue che il denominatore della funzione derivata prima sarà sempre un quadrato, cioè una quantità sempre positiva: per studiare il segno della derivata prima, quindi, è sufficiente studiare la positività del numeratore.

***Il Grafico*.**

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = \frac{x+1}{x-3}$$

Campo di Esistenza.

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R}: x - 3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 3\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < 3,\ 3 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = 3$ è un asintoto verticale per la funzione assegnata:

$\boxed{A.V.: x = 3}$

Intersezioni con gli Assi.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x+1}{x-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \left(0, -\dfrac{1}{3}\right)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

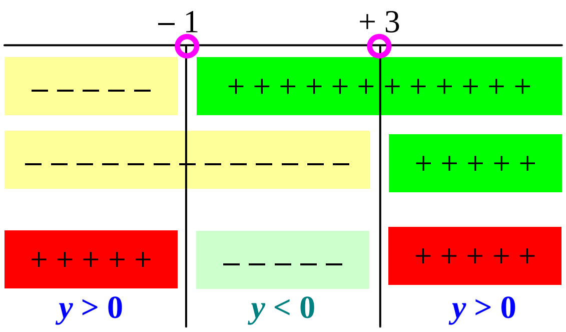
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x+1}{x-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x+1}{x-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{B = (-1, 0)}$ è l'intersezione della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-3} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > 3 \end{cases}$$



Quindi:

$y > 0$ per $-\infty < x < -1,\ 3 < x < +\infty$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Poiché anche in questo caso il numeratore ed il denominatore della frazione hanno lo stesso grado (pari ad 1), il limite si ottiene facendo il rapporto dei coefficienti della x che figura al grado massimo sia al numeratore che al denominatore:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} y} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right) = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 1$: dunque la retta $y = 1$ è un *Asintoto Orizzontale*.

$\boxed{A.O.: y = 1}$

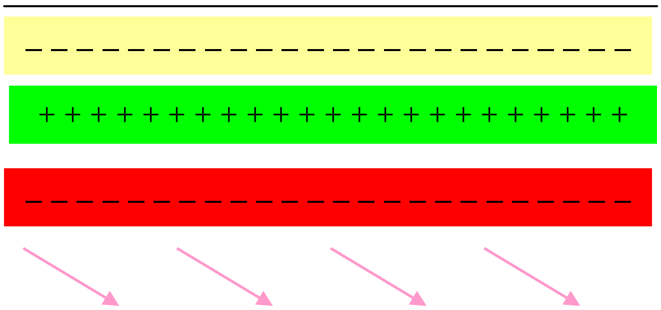
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(\frac{x+1}{x-3}\right)=\frac{1\cdot(x-3)-(x+1)\cdot 1}{(x-3)^2}=\frac{x-3-x-1}{(x-3)^2}=-\frac{4}{(x-3)^2}$$

da cui:

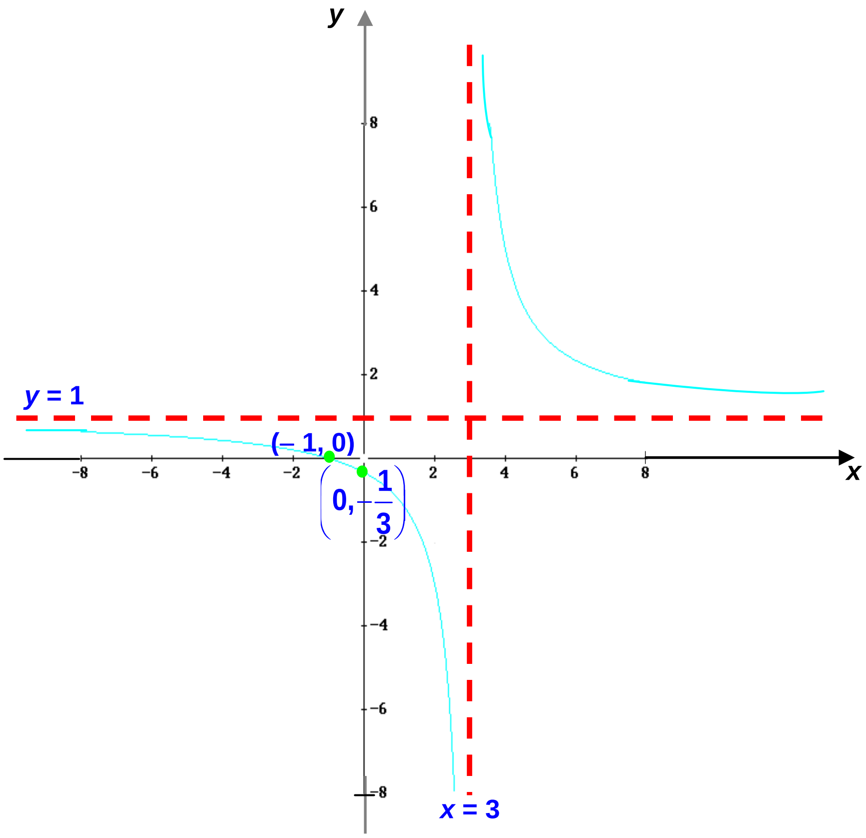
$$-\frac{4}{(x-3)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases} -4>0 \\ (x-3)^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mai: \text{è } sempre\ negativo \\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$



Decrescenza

Ne segue che la funzione è sempre decrescente per cui non ha né massimi né minimi.

IL GRAFICO.



$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

Campo di Esistenza.

$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R}: x \neq 0\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < 0,\ 0 < x < +\infty\}}$

Ne segue subito che la retta $x = 0$, cioè l'asse delle y, è un asintoto verticale per la funzione assegnata:

$\boxed{A.V.: x = 0}$

Intersezioni con gli Assi.

Si osservi in primo luogo che non ci possono essere intersezioni con l'asse y, in quanto tale retta è un asintoto verticale per la funzione. È inutile, quindi, risolvere il primo dei due sistemi!!!

Si considererà, pertanto, solo il secondo sistema:

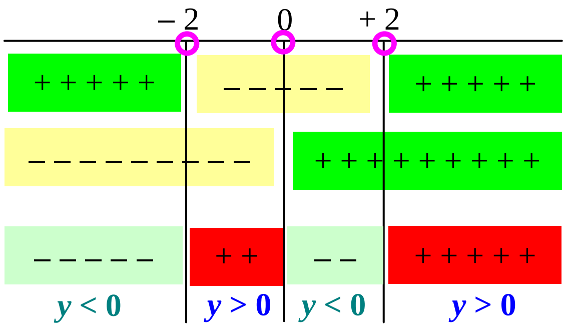
$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x^2 - 4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \pm 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{A = (-2, 0)}$ e $\boxed{B = (2, 0)}$ sono le intersezioni della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2, x > +2 \\ x > 0 \end{cases}$$



Quindi:

$y > 0$ per $-2 < x < 0,\ 2 < x < +\infty$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

In questo caso, poiché il grado del numeratore (pari a 2) è maggiore di quello del denominatore (pari ad 1), si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} y} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}\right) = \boxed{\pm\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to \pm\infty$: dunque la funzione <u>non</u> ha *Asintoti Orizzontali*.
In assenza di asintoti orizzontali, si può vedere, però, se esistono *Asintoti Obliqui*.
L'equazione di un asintoto obliquo è esattamente quella generale di una qualsiasi retta, cioè:

$$y = mx + q$$

dove:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) \qquad \text{e} \qquad q = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$$

Nel caso in esame, quindi, si ha:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4-x^2}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-4}{x}\right) = -4\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Sostituendo ora i valori di m e q trovati nell'equazione generale della retta si ottiene l'equazione dell'astintoto obliquo, cioè:

$y = mx + q = 1 \cdot x + 0 = x \Rightarrow y = x$

$\boxed{A.Ob.: y = x}$

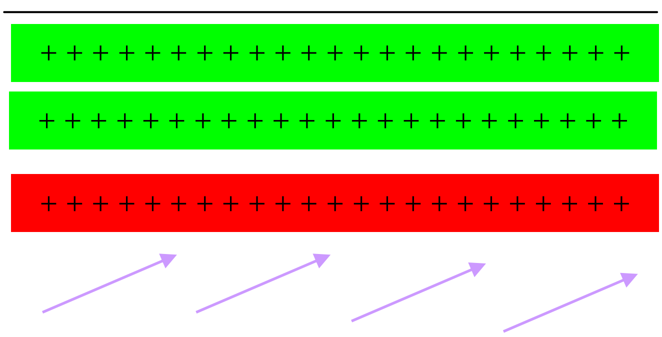
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ottiene:

$$D\left(\frac{x^2-4}{x}\right) = \frac{2x\cdot(x) - 1\cdot(x^2-4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2+4}{x^2}$$

da cui:

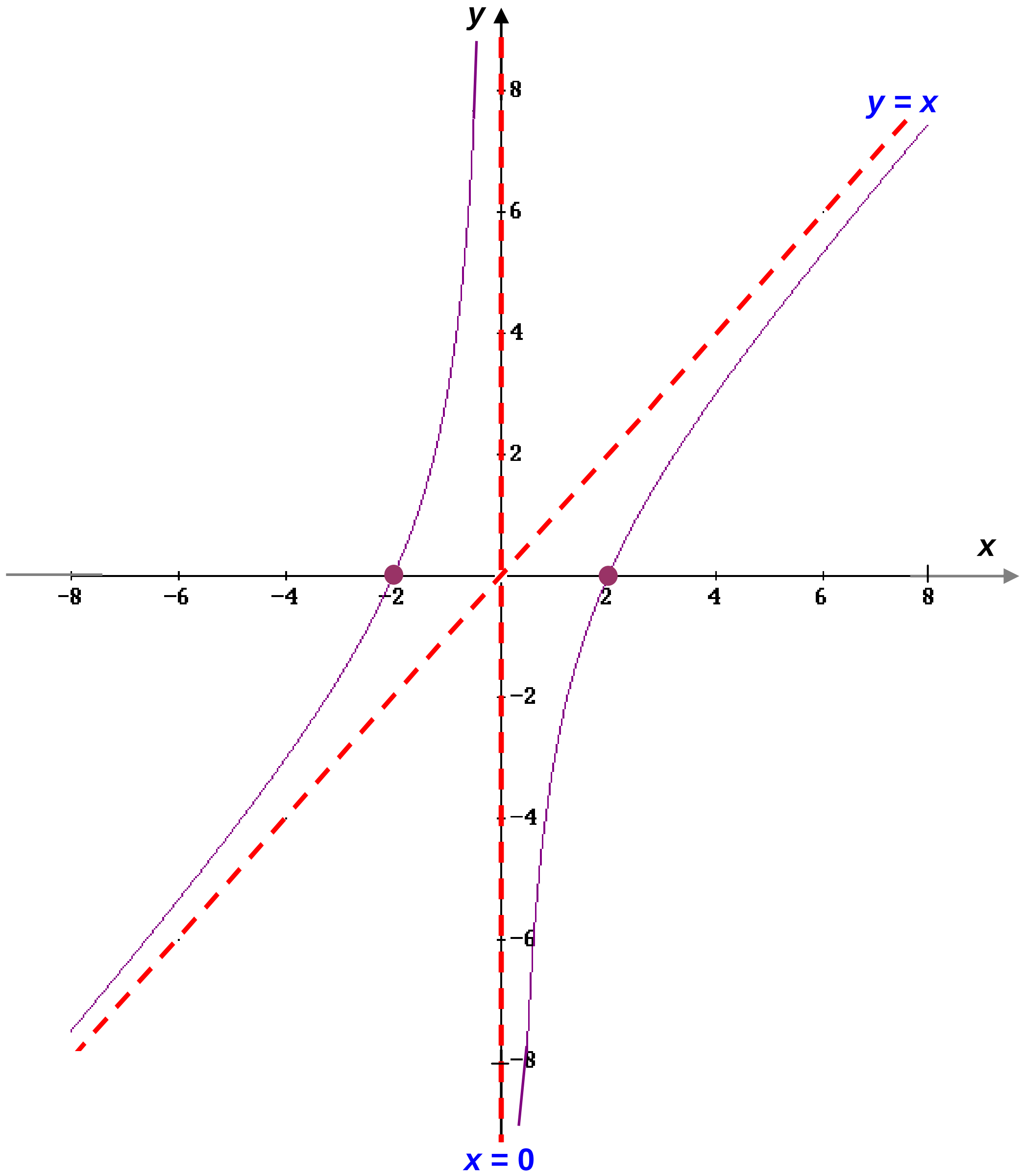
$$\frac{x^2+4}{x^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2+4>0 \\ x^2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \ (\textit{è la somma di due quadrati}) \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Crescenza

Ne segue che la funzione è sempre crescente: non esistono, cioè, né massimi né minimi.

Il Grafico.



$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

Campo di Esistenza.

$\boxed{C.E.}$ = $\{x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \neq 0\}$ = $\boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}}$

La funzione non ha quindi asintoti verticali.

Intersezioni con gli Assi.

Si ha:

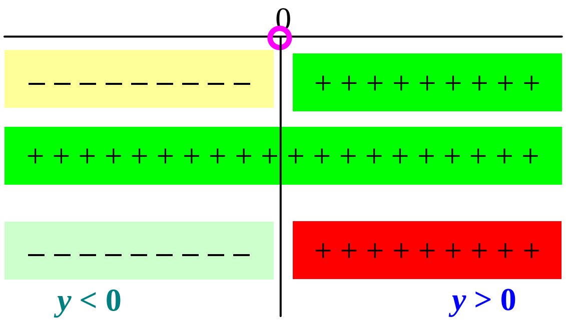
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,\, 0)}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (0,\, 0) = A}$$ è l'intersezione della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

Si ha:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Quindi:

$y > 0$ per $x > 0$

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

In questo caso, poiché il grado del numeratore (pari ad 1) è minore di quello del denominatore (pari ad 2), si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} y} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x}{x^2+1} \right) = \boxed{0}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$, cioè l'asse delle x, rappresenta un *Asintoto Orizzontali* per la funzione.

$\boxed{A.O.: y = 0}$

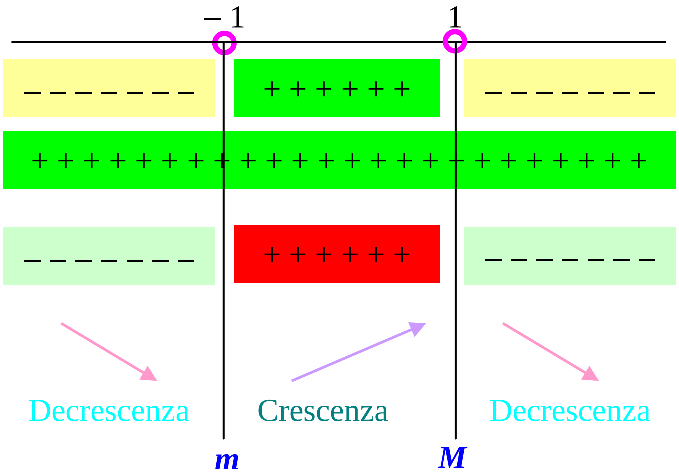
Studio del Segno della Derivata Prima.

Si ottiene:

$$D\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

da cui:

$$\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \Rightarrow \begin{cases}-x^2+1>0\\ \left(x^2+1\right)^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1<0\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1<x<+1\\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$$



$$x=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{(-1)^2+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}=-0,5$$

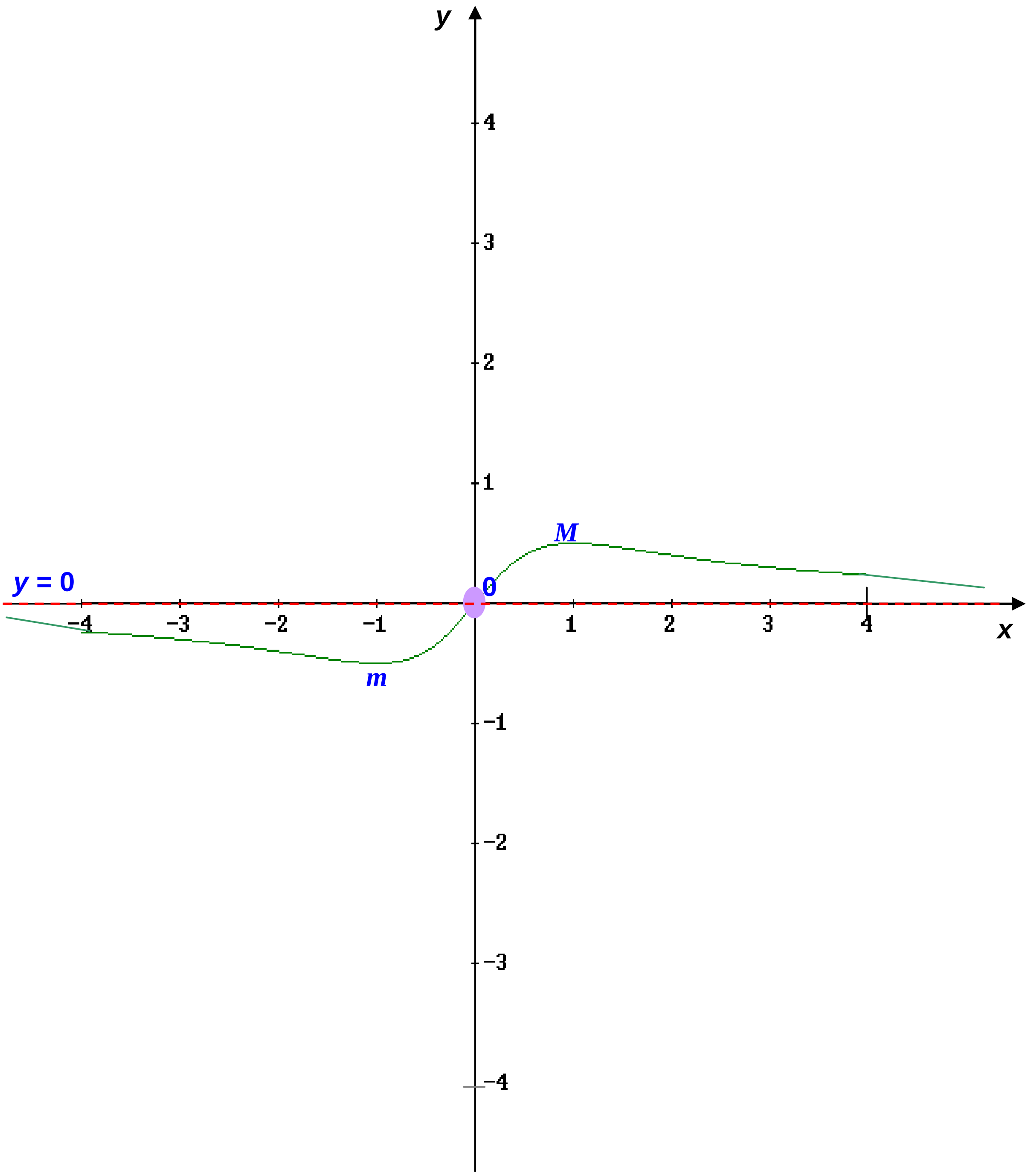
$$x=+1 \Rightarrow y=\frac{1}{(1)^2+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=0,5$$

Dunque:

$\boxed{m=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)}$ è il *punto di minimo*.

$\boxed{M=\left(1,\frac{1}{2}\right)}$ è il *punto di Massimo*.

Il Grafico.



ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni razionali fratte:

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

$$y=1+\frac{1}{x^2}$$

$$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$y=\frac{x^2-7x+10}{x-1}$$

$$y=\frac{x-1}{x+1}$$

$$y=\frac{3x+1}{x-1}$$

$$y=\frac{3-2x}{x}$$

$$y=\frac{x}{x^2-1}$$

$$y=\frac{x+4}{x-3}$$

$$y=\frac{x}{x^2-4}$$

$$y=\frac{1-2x}{x+2}$$

$$y=\frac{x^2-25}{x+1}$$

$$y=\frac{x^2-x-4}{x-1}$$

$$y=\frac{x^2+2x+25}{(1+x)^2}$$

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

$$y=\frac{x^2-x-4}{x-1}$$

$$y=\frac{3x-1}{2x+1}$$

$$y=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}$$

$$y=\frac{1+x}{x^2}$$

$$y=\frac{x^3}{1-x^2}$$

$$y=\frac{x^2-10x+21}{2x-15}$$
$$y=\frac{x^2-4x+4}{x^2-1}$$
$$y=\frac{x}{1+x^3}$$
$$y=\frac{x^3}{1+x^3}$$
$$y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}$$
$$y=\frac{x^2-25}{x-1}$$
$$y=\frac{x^3}{x^2-1}$$
$$y=\frac{x^2-1}{2x^2}$$
$$y=\frac{x}{3x^2-1}$$
$$y=\frac{x^2+2}{x^2-x}$$
$$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$$
$$y=\frac{x}{x^3-1}$$
$$y=\frac{3x^2-7}{x^2-5x+6}$$
$$y=\frac{x^3-2}{x^2-4}$$
$$y=3x+\frac{1}{x^3}$$
$$y=\frac{4x}{x^2+1}$$
$$y=\frac{x^2-5x+4}{x-5}$$
$$y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$
$$y=\frac{12x^2-3x^3}{x^3-2x^2+x}$$
$$y=\frac{x^3}{x^2+3x+3}$$
$$y=\frac{x+1}{(x-1)(4x^2-1)}$$

$$y = x + \frac{2-3x}{x^2}$$

$$y = \frac{\left(x^2-4\right)^2}{\left(x-1\right)^3}$$

$$y = \frac{3x^2-4}{\left(x-2\right)^2\left(x+1\right)}$$

$$y = \frac{\left(x^2-1\right)^2}{x^3}$$