LO STUDIO DI FUNZIONI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

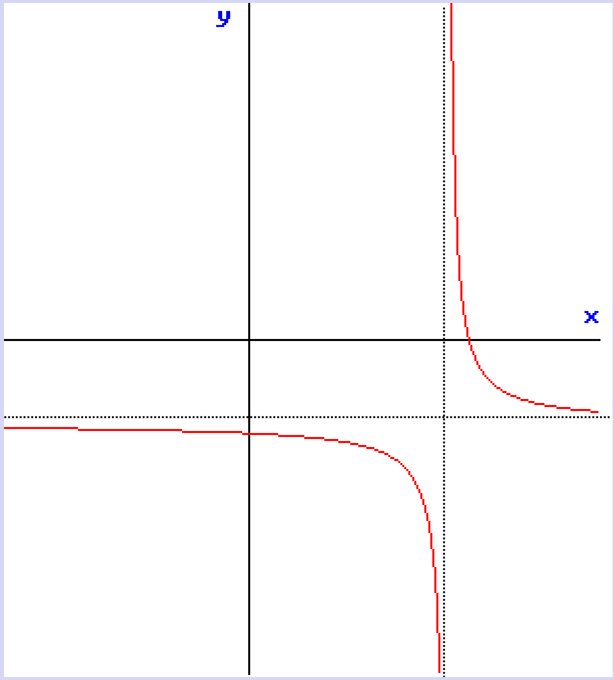
CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

RAZIONALI FRATTE

n* = *m

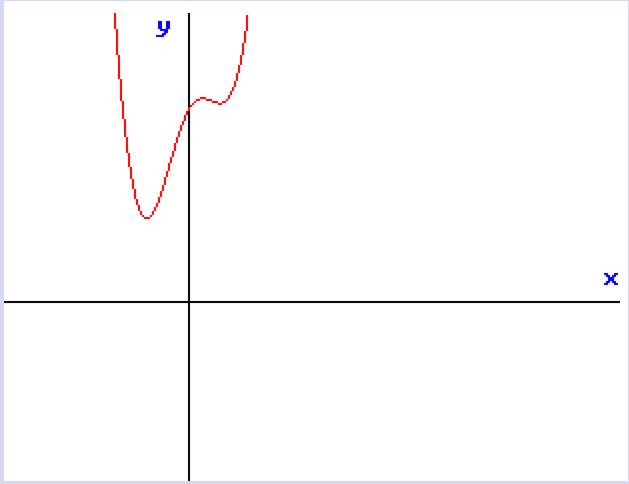
$$y = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{5-x}{2x-9}$$



RAZIONALI FRATTE

n > m

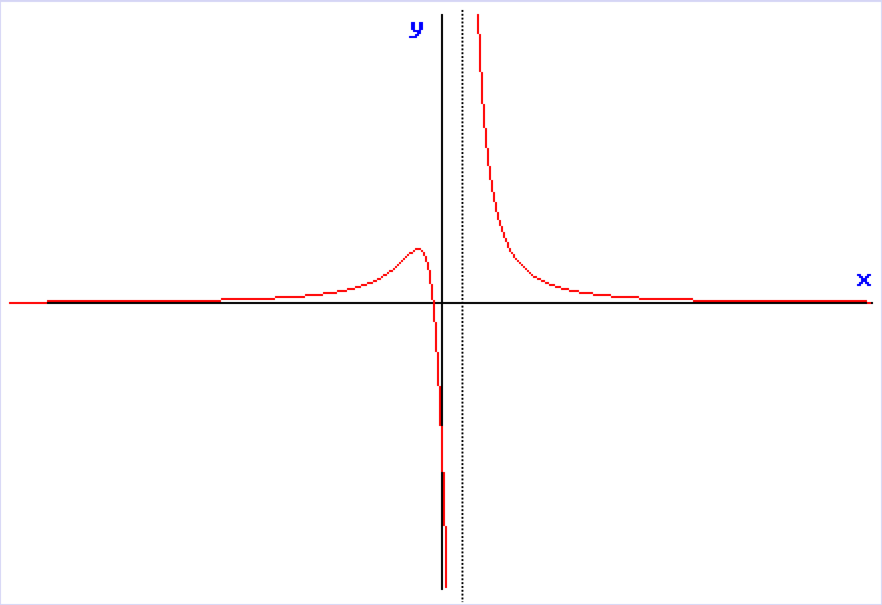
$$y=\frac{P_4(x)}{Q_2(x)}=\frac{4x^4-3x^2+2x+4}{x^2+3}$$



RAZIONALI FRATTE

n* < *m

$$y = \frac{P_1(x)}{Q_3(x)} = \frac{5x+2}{x^3 - x^2 + x - 1}$$



Esempio 1

$n = m$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 2 \right\}$$

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty \right\}$$

$$\Downarrow$$

$x = -2$, $x = +2$

***asintoti verticali* (A.V.)**

In generale:

Ogni funzione razionale fratta
è definita solo se
il suo denominatore è diverso da zero

⬇

I valori per i quali il
denominatore della funzione data si annulla
rappresentano i suoi *asintoti verticali*

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0,0) \equiv O$$

intersezione con l'asse *y*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x^2}{x^2 - 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B = (0,0) \equiv A \equiv O$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff \frac{x^2}{x^2 - 4} > 0 \iff \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textit{sempre} \text{ (è un quadrato!)} \\ x < -2,\ x > +2 \end{cases}$$

	-2	$+2$	
+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + +	
+ + + + +	- - - - - - -	+ + + + +	
+	-	+	
$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$	

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$\Downarrow$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, -2 < x < +2, +2 < x < +\infty \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = ???$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = ???$$

In generale:

$P_1(x)$ **polinomio di grado *n***

$P_2(x)$ **polinomio di grado *m***

$$y = \frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[P_1(x) \right]}{\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[P_2(x) \right]} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0} & se\ n = m \\ 0 & se\ n < m \\ \infty & se\ n > m \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{1} \right) = 1$$

la funzione data ha un *asintoto orizzontale* in *y* = +1

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +1$$

$$x \to -\infty \Rightarrow y \to +1$$

$$y=\frac{x^2}{x^2-4}$$

$\Downarrow$

5) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{D\left[f(x)\right]g(x)-f(x)D\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

$\Downarrow$

$$D\left[\frac{x^2}{x^2-4}\right]=\frac{D\left[\left(x^2\right)\right]\cdot\left(x^2-4\right)-\left(x^2\right)\cdot D\left[\left(x^2-4\right)\right]}{\left[\left(x^2-4\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{2x\cdot\left(x^2-4\right)-x^2\cdot(2x)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff \frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2} > 0 \iff \begin{cases} -8x > 0 \\ \left(x^2-4\right)^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0 \\ \textit{sempre} \end{cases}$$

	0	
+ + + + +		- - - - - - -
$\boldsymbol{y' > 0}$		$\boldsymbol{y' < 0}$
	M	

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$\Downarrow$$

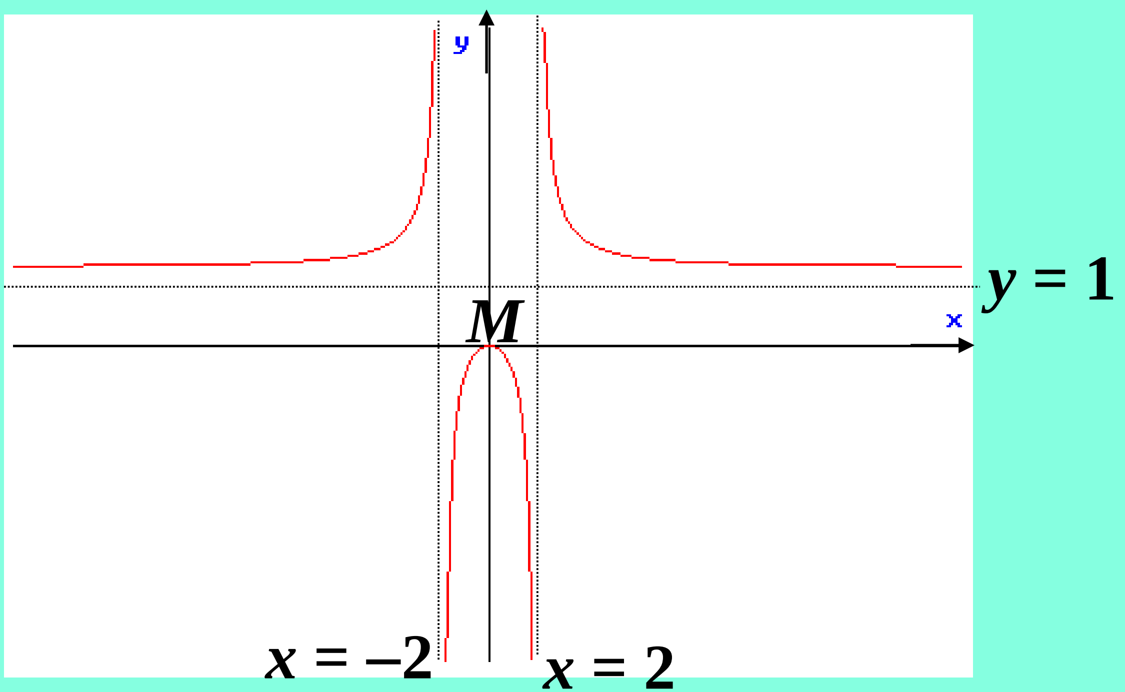
$x = 0$ è un *massimo* per la funzione

$$\Downarrow$$

$O = (0, 0)$ è un *punto di massimo* per la funzione

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 2

n > m

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \right\}$$

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty \right\}$$

$$\Downarrow$$

***x* = 0**

***asintoto verticale* (A.V.)**

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - 4}{x} \end{cases}$$

non ci sono intersezioni con l'asse *y*
(la funzione in *x* = 0 ammette A.V.!)

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = \dfrac{x^2 - 4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-2, 0) \\ C = (+2, 0) \end{cases}$$

intersezioni con l'asse *x*

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff \frac{x^2 - 4}{x} > 0 \iff \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < -2,\ x > +2 \\ x > 0 \end{cases}$$

	-2		0		$+2$	
+ + + + +		- - -		- - - -		+ + + + +
- - - - - - - -		- - -		+ + +		+ + + + +
-		+		-		+
$y < 0$		$y > 0$		$y < 0$		$y > 0$

$$y=\frac{x^2-4}{x}$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E.=\left\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x<0,0<x<+\infty\right\}$$

n > m

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1}\right)=\lim_{x\to+\infty}(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1}\right)=\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

$\Downarrow$

la funzione data non ha *asintoti orizzontali*

$\Downarrow$

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$$
$$x \to -\infty \Rightarrow y \to -\infty$$

$\Downarrow$

la funzione data ha *asintoti obliqui*???

Asintoto Obliquo

$$y = mx + q$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] \qquad q = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) = 1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4}{x} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-4-x^2}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-4}{x}\right) = -4\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Asintoto Obliquo

$$y = mx + q$$

$$\Big\downarrow \; \begin{matrix} m = 1 \\ q = 0 \end{matrix}$$

$$y = x$$

***asintoto obliquo* per la funzione data**

$$\Big\downarrow$$

l'*asintoto obliquo* della funzione data
è proprio la bisettrice del I e III quadrante

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

$$\Downarrow$$

5) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\frac{x^2-4}{x}\right] = \frac{D\left[\left(x^2-4\right)\right]\cdot(x) - \left(x^2-4\right)\cdot D[x]}{[x]^2} =$$

$$= \frac{2x\cdot(x) - \left(x^2-4\right)\cdot(1)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2+4}{x^2}$$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff \frac{x^2+4}{x^2} > 0 \iff \begin{cases} x^2 + 4 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \textit{sempre} \text{ (somma di quadrati!)} \\ \textit{sempre} \text{ (è un quadrato!)} \end{cases}$$

\+ + + + + + + + + +

\+ + + + + + + + + +

\+

$y' > 0$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

$$\Downarrow$$

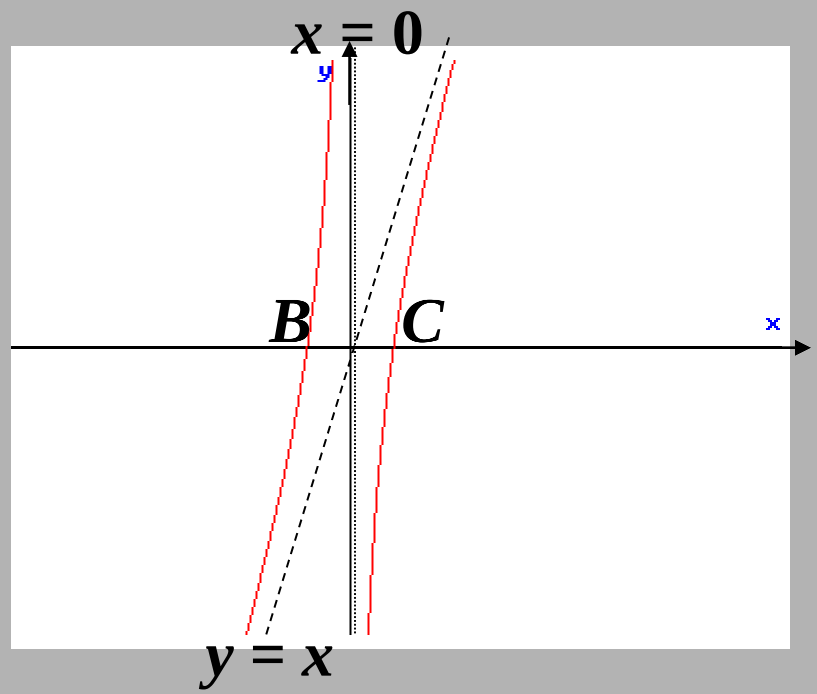
la funzione non ha né *massimi* né *minimi*

$$\Downarrow$$

la funzione è sempre *crescente*

$$y = \frac{x^2 - 4}{x}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 3

$$n < m$$

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \neq 0 \right\}$$

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

($x^2 + 1 \neq 0$ **sempre in quanto somma di quadrati!)**

non esistono *asintoti verticali* (A.V.)

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow A=(0,0)\equiv O$$

intersezione con l'asse *y*

$$\begin{cases} y=0 \\ 0=\dfrac{x}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow B=(0,0)\equiv A\equiv O$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff \frac{x}{x^2+1} > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ sempre \end{cases}$$

	0	
- - - - - - -		+ + + + +
+ + + + + +		+ + + + +
-		+
$y < 0$		$y > 0$

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E.=\left\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x<+\infty\right\}=\mathbb{R}$$

n* < *m

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Downarrow$$

la funzione data ha un *asintoto orizzontale* in *y* = 0

$$\Downarrow$$

$$x \to +\infty \Rightarrow y \to 0$$
$$x \to -\infty \Rightarrow y \to 0$$

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\Downarrow$$

5) Calcolo della derivata prima

$$D\left[\frac{x}{x^2+1}\right]=\frac{D\left[(x)\right]\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot D\left[\left(x^2+1\right)\right]}{\left[\left(x^2+1\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{(1)\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

$$\Downarrow$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y'>0 \iff \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}>0 \iff \begin{cases}-x^2+1>0\\ \left(x^2+1\right)^2>0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-1<0\\ \textit{sempre} \text{ (è un quadrato!)}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-1<x<+1\\ \textit{sempre}\end{cases}$$

	-1		1	
- - - -		+ + + +		- - - -
+ + +		+ + + + +		+ + +
-		+		-
$y'<0$		$y'>0$		$y'<0$
↘	*m*	↗	*M*	↘

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$\Downarrow$$

x = –1 è un *minimo* per la funzione

x = +1 è un *massimo* per la funzione

$$\Downarrow$$

$$x = -1 \;\Rightarrow\; y = \frac{-1}{(-1)^2+1} \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$x = +1 \;\Rightarrow\; y = \frac{+1}{(+1)^2+1} \;\Rightarrow\; y = +\frac{1}{2} = +0,5$$

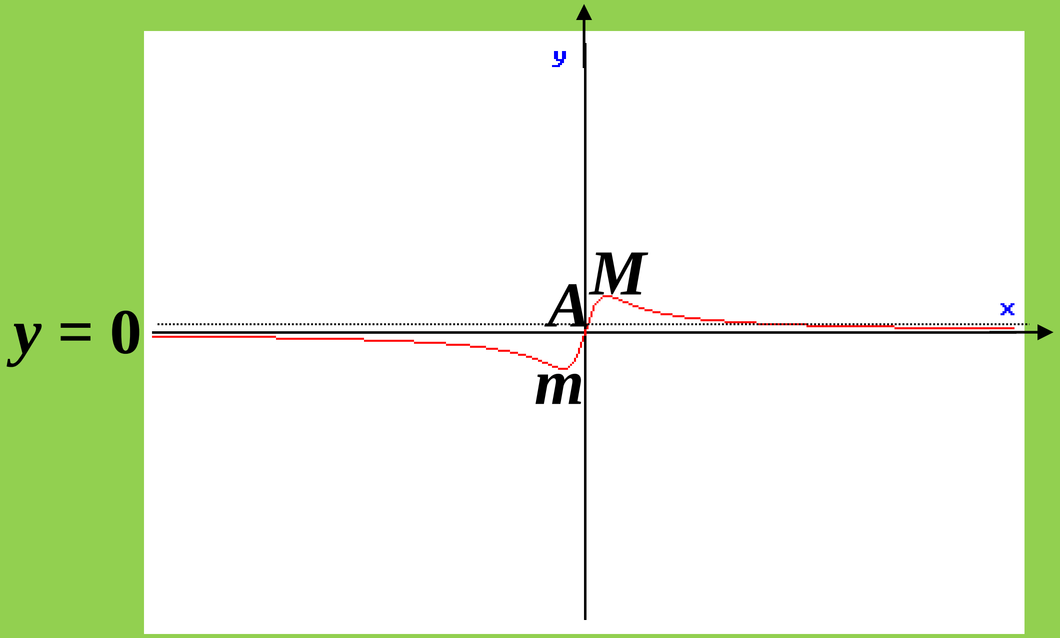
$$\Downarrow$$

$$m = \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \qquad M = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

punto di minimo ***punto di massimo***

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

7) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni razionali fratte sono definite nei punti in cui il denominatore non si annulla: in corrispondenza di tali punti la funzione presenta *asintoti verticali*

Per determinare i punti di intersezione della funzione con l'asse delle *x* basta eguagliare a zero il suo numeratore

Per studiare il segno della derivata prima della funzione è sufficiente studiare il segno del numeratore della derivata prima (il suo denominatore sarà sempre un quadrato proprio per la formula generale della derivata di un quoziente)