LO STUDIO DI FUNZIONI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

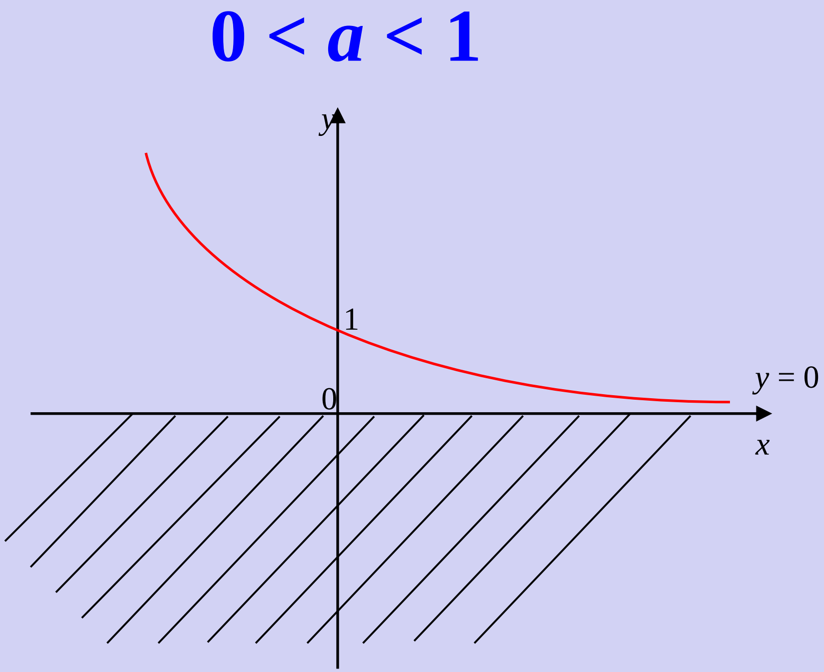
Facoltà di Scienze politiche

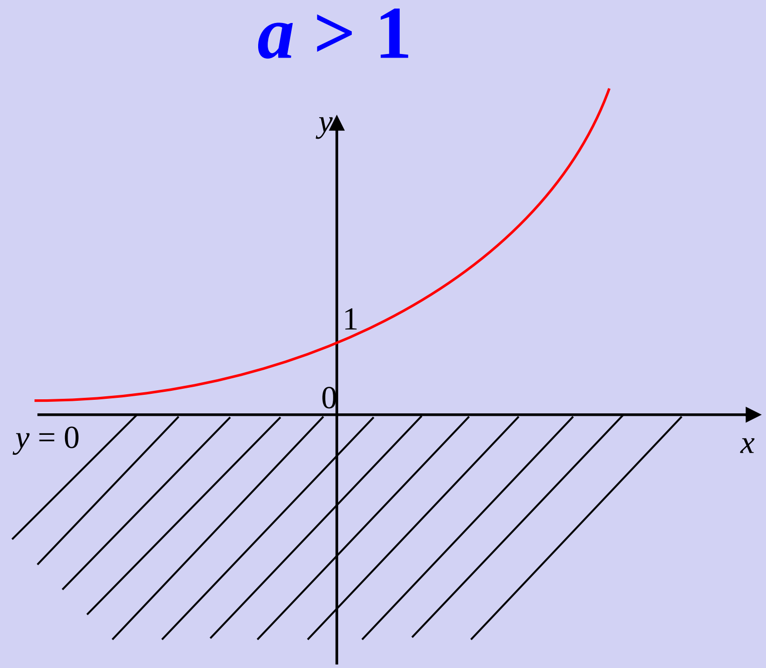
CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

ESPONENZIALI

$$y = a^x$$





Esempio 1

$$y = e^{x^2 - 1}$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

<u>L'esponenziale è definita su tutta la retta reale</u>

Il suo campo di esistenza coincide con quello del suo esponente che, nel caso specifico, è un polinomio definito su tutta la retta reale

$$y = e^{x^2-1}$$

$\Downarrow$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^2-1} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ **intersezione con l'asse *y*, ovvero con la retta *x* = 0**

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{x^2-1} \end{cases}$$ $\Rightarrow$ **intersezione con l'asse *x*, ovvero con la retta *y* = 0**

$$y = e^{x^2-1}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff e^{x^2-1} > 0$$

l'esponenziale è sempre positiva

+ + + + + + + + + + + + + + + +

$\boldsymbol{y > 0}$

$$y = e^{x^2-1}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \end{cases} \Rightarrow A = \left(0, \frac{1}{e}\right)$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{x^2-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$ **non esistono intersezioni con l'asse *x***

$$y = e^{x^2-1}$$

$$\Downarrow$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{x^2-1} \right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{x^2-1} \right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-1\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$y = e^{x^2-1}$$

5) Calcolo della derivata prima

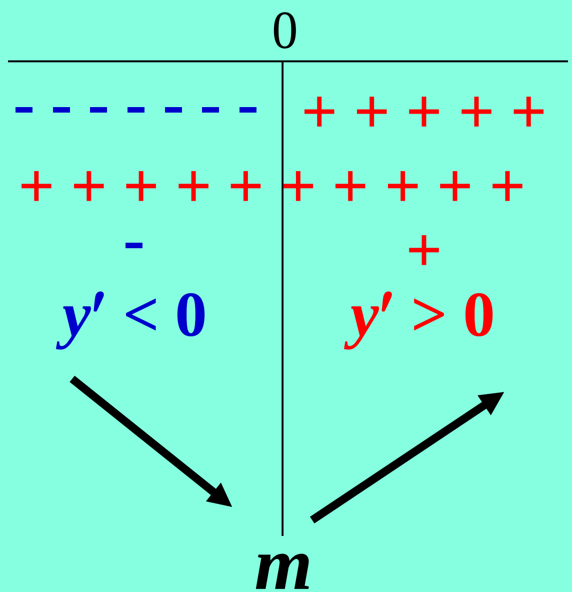
$$D\left[e^{f(x)}\right] = e^{f(x)} \cdot D\left[f(x)\right]$$

$$y' = D\left[e^{x^2-1}\right] = e^{x^2-1} \cdot D\left(x^2 - 1\right) = e^{x^2-1} \cdot (2x) = 2x \cdot e^{x^2-1}$$

$$y = e^{x^2-1}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff 2x \cdot e^{x^2-1} > 0 \iff \begin{cases} 2x > 0 \\ e^{x^2-1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ sempre \ (\text{è } un' esponenziale) \end{cases}$$



$$y = e^{x^2 - 1}$$

$$\Downarrow$$

$x = 0$ **è un *minimo* per la funzione**

$$\Downarrow$$

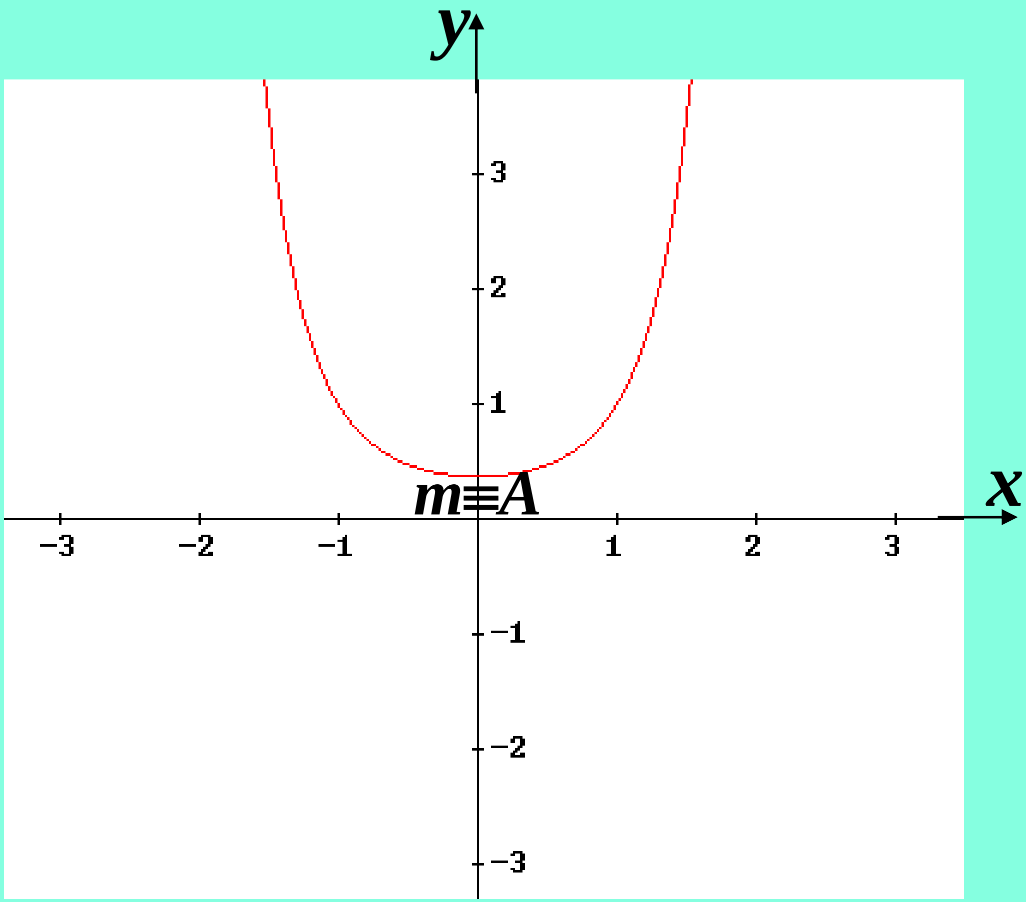
$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\Downarrow$$

$m = \left(0, \frac{1}{e}\right) \equiv A$ **è un *punto di minimo* per la funzione**

$$y = e^{x^2 - 1}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 2

$$y = e^{x^3+1}$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

<u>**L'esponenziale è definita su tutta la retta reale**</u>

$$\Downarrow$$

Il suo campo di esistenza coincide con quello del suo esponente che, nel caso specifico, è un polinomio definito su tutta la retta reale

$$y = e^{x^3+1}$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{x^3+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^1 = e \end{cases} \Rightarrow A = (0, e)$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{x^3+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$ **non esistono intersezioni con l'asse *x***

$$y = e^{x^3+1}$$

$\Downarrow$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff e^{x^3+1} > 0$$

$\Downarrow$ **l'esponenziale è sempre positiva**

\+ + + + + + + + + + + + + + + +

***y* > 0**

$$y = e^{x^3+1}$$

$$\Downarrow$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\} = \mathbb{R}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{x^3+1} \right) = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+1\right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \left(e^{x^3+1} \right) = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+1\right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 \Rightarrow$$ ***y* = 0 *A.O. sinistro***

$$y = e^{x^3+1}$$

$$\Downarrow$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[e^{x^3+1}\right] = e^{x^3+1} \cdot D\left(x^3+1\right) = e^{x^3+1} \cdot \left(3x^2\right) = 3x^2 \cdot e^{x^3+1}$$

$$y = e^{x^3+1}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff 3x^2 \cdot e^{x^3+1} > 0 \iff \begin{cases} 3x^2 > 0 \\ e^{x^3+1} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 > 0 \\ sempre \ (\text{è } un'esponenziale) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} sempre \ (\text{è } un \ quadrato) \\ sempre \end{cases}$$

\+ + + + + + + + + +

\+ + + + + + + + + +

\+

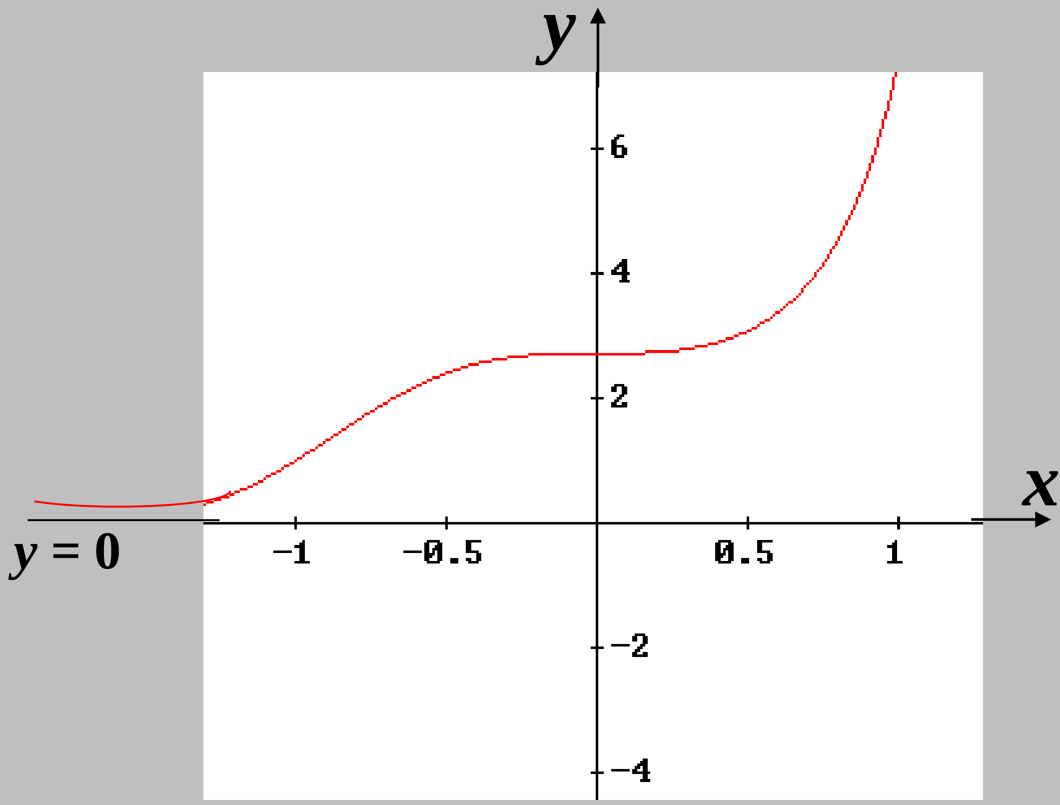
$y' > 0$

la funzione è sempre crescente

non ha né massimi né minimi

$$y = e^{x^3+1}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 3

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +\infty\}$$

x* = – 1 *A.V.

L’esponenziale è definita su tutta la retta reale: il suo campo di esistenza coincide con quello del suo esponente che, nel caso specifico, è una frazione per cui bisogna imporre il denominatore diverso da zero

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

$$\Downarrow$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1)$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x}{x+1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$ **non esistono intersezioni con l'asse *x***

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff e^{\frac{x}{x+1}} > 0$$

l'esponenziale è sempre positiva

+ + + + + + + + + + + + + + + +

$\boldsymbol{y > 0}$

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -1, -1 < x < +\infty\}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x}{x+1}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)} = e^1 = e$$

$\Rightarrow$ ***y* = *e* A.O. destro**

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{x}{x+1}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)} = e^1 = e$$

$\Rightarrow$ ***y* = *e* A.O. sinistro**

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[e^{\frac{x}{x+1}}\right] = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot D\left(\frac{x}{x+1}\right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{1\cdot(x+1) - x\cdot(1)}{(x+1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) = e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0 \\ e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (x+1)^2 > 0 \\ \textit{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \textit{sempre} \\ \textit{sempre (è un quadrato)} \\ \textit{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$

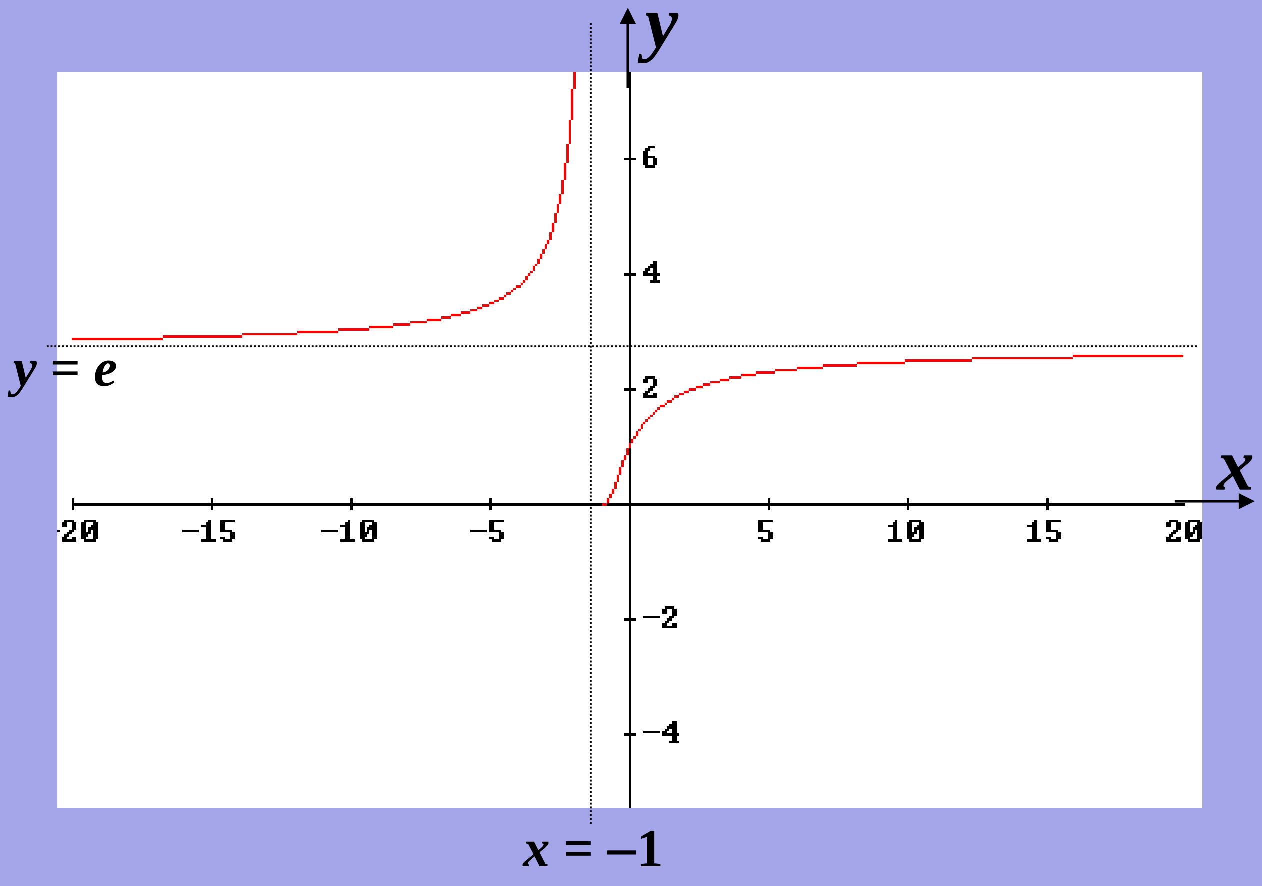
+ + + + + + + + + +
+ + + + + + + + + +
+ + + + + + + + + +
+

$y' > 0$

la funzione è sempre crescente
non ha né massimi né minimi

$$y = e^{\frac{x}{x+1}}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 4

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty\right\}$$

x* = 0 non è detto che sia *A.V.

L'esponenziale è definita su tutta la retta reale: il suo campo di esistenza coincide con quello del suo esponente che, nel caso specifico, è una frazione per cui bisogna imporre il denominatore diverso da zero

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

$$\Downarrow$$

2) Intersezioni con gli assi

In $x = 0$ la funzione non è definita:
non esistono, quindi, intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x-1}{x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{-1}{0}} = e^{-\infty} = \dfrac{1}{e^{\infty}} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0,0)$$

ma tale punto non esiste:
non ci sono, quindi, *A.V.*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x-1}{x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$

non esistono intersezioni con l'asse x

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

$\Downarrow$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff e^{\frac{x-1}{x^2}} > 0$$

$\Downarrow$ **l'esponenziale è sempre positiva**

+ + + + + + + + + + + + + + + +

$\boldsymbol{y > 0}$

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

$\Downarrow$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty \right\}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x^2}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x-1}{x^2} \right)} = e^0 = 1$$ $\Rightarrow$ ***y* = 1 *A.O. destro***

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x^2}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x-1}{x^2} \right)} = e^0 = 1$$ $\Rightarrow$ ***y* = 1 *A.O. sinistro***

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

verificiamo se la funzione interseca l'asintoto

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = e^{\frac{x-1}{x^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ e^{\frac{x-1}{x^2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow e^{\frac{x-1}{x^2}} = e^0 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$I = (1,1)$$

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[e^{\frac{x-1}{x^2}}\right] = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot D\left(\frac{x-1}{x^2}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{1 \cdot \left(x^2\right) - (x-1) \cdot (2x)}{\left(x^2\right)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{\left(x^2\right)^2}\right) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-x^2 + 2x}{\left(x^2\right)^2}\right)$$

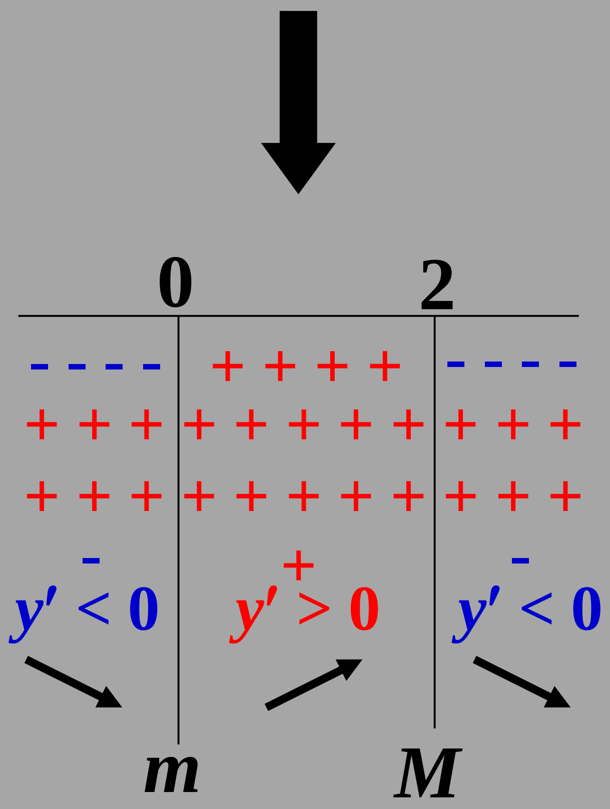
$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

$$\Downarrow$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-x^2 + 2x}{\left(x^2\right)^2} \right) > 0 \iff \begin{cases} \dfrac{-x^2 + 2x}{\left(x^2\right)^2} > 0 \\ e^{\frac{x-1}{x^2}} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x^2 + 2x > 0 \\ \left(x^2\right)^2 > 0 \\ sempre \ (\grave{e} \ un'esponenziale) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ sempre \ (\grave{e} \ un \ quadrato) \\ sempre \ (\grave{e} \ un'esponenziale) \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2) < 0 \\ sempre \\ sempre \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 2 \\ sempre \\ sempre \end{cases}$$



in x = 0 la funzione non è definita:
il minimo, cioè, non esiste

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

$$\Downarrow$$

$x = 2$ è un *Massimo* per la funzione

$$\Downarrow$$

$$x = 2 \;\Rightarrow\; y = e^{\frac{2-1}{(2)^2}} \;\Rightarrow\; y = e^{\frac{1}{4}} \cong 1,28$$

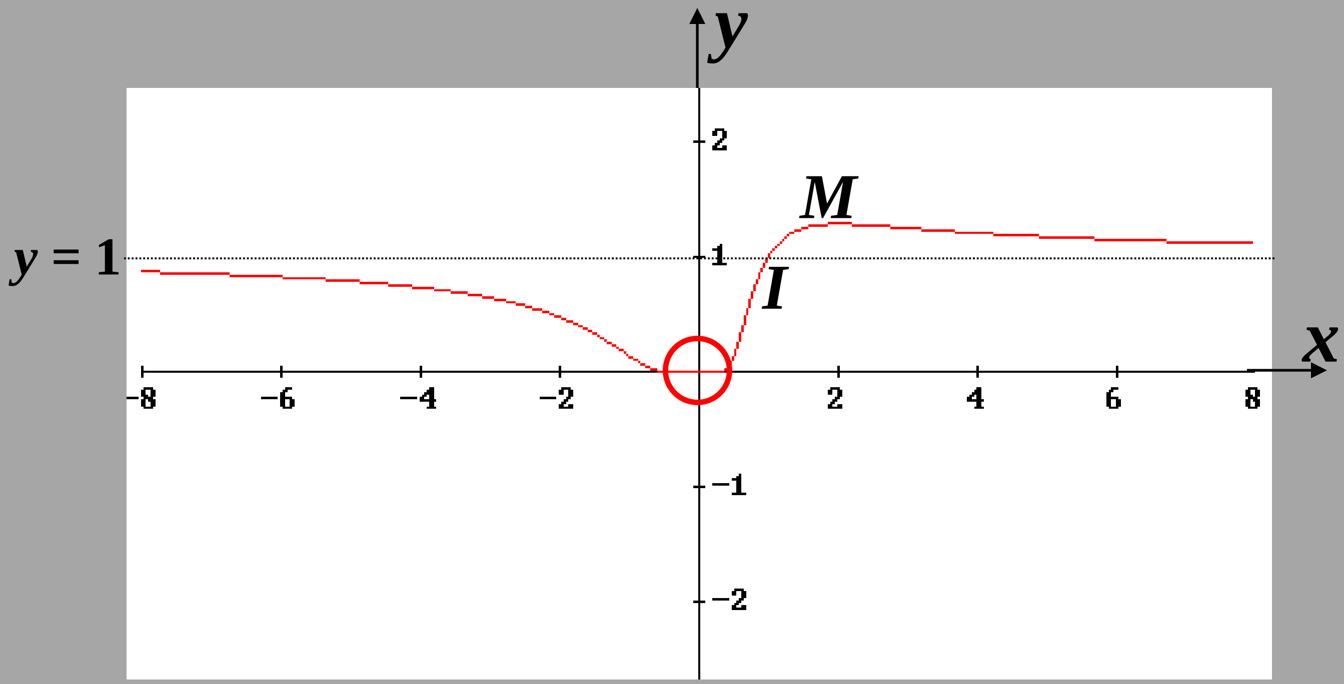
$$\Downarrow$$

$$M = \left(2, e^{\frac{1}{4}}\right)$$

punto di Massimo

$$y = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 5

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

1) **Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)**

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 1 < x < +\infty\}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = e^{\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty \end{cases}$$

x* = 1 *A.V.

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = e^{\frac{0}{-1}} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow A = (0,1)$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = e^{\frac{x^2}{x-1}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ mai \end{cases}$$ **non esistono intersezioni con l'asse *x***

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff e^{\frac{x^2}{x-1}} > 0$$

l'esponenziale è sempre positiva

$+ + + + + + + + + + + + + + + +$

$$\boldsymbol{y > 0}$$

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$\Downarrow$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 1, 1 < x < +\infty\}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(e^{\frac{x^2}{x-1}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{\frac{x^2}{x-1}} \right) = e^{\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \right)} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$ ***y* = 0 *A.O. sinistro***

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[e^{\frac{x^2}{x-1}}\right] = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot D\left(\frac{x^2}{x-1}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{(2x)\cdot(x-1)-\left(x^2\right)\cdot 1}{(x-1)^2}\right) =$$

$$= e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}\right) = e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)$$

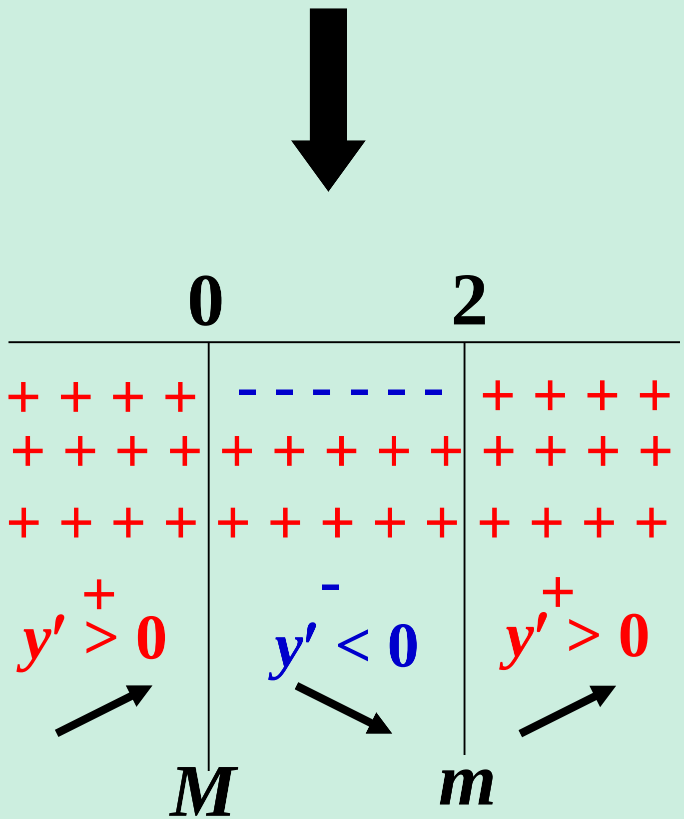
$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$\Downarrow$$

6) **Studio del segno della derivata prima**

$$y' > 0 \iff e^{\frac{x^2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} \right) > 0 \iff \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} > 0 \\ e^{\frac{x^2}{x-1}} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ (x-1)^2 > 0 \\ sempre\ (\grave{e}\ un'esponenziale) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x(x-2) > 0 \\ sempre\ (\grave{e}\ un\ quadrato) \\ sempre\ (\grave{e}\ un'esponenziale) \end{cases} \iff \begin{cases} x < 0, x > 2 \\ sempre \\ sempre \end{cases}$$



0
2
+ + + +
- - - - - -
+ + + +
+ + + + + + + + + + + + +
+ + + + + + + + + + + + +
+
$y' > 0$
-
$y' < 0$
+
$y' > 0$
M
m

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$\Downarrow$$

***x* = 0** **è un *Massimo* per la funzione**

***x* = 2** **è un *minimo* per la funzione**

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \ \Rightarrow \ y = 1$$

$$x = 2 \ \Rightarrow \ y = e^{\frac{(2)^2}{2-1}} \ \Rightarrow \ y = e^{\frac{4}{1}} = e^4 \cong 54,6$$

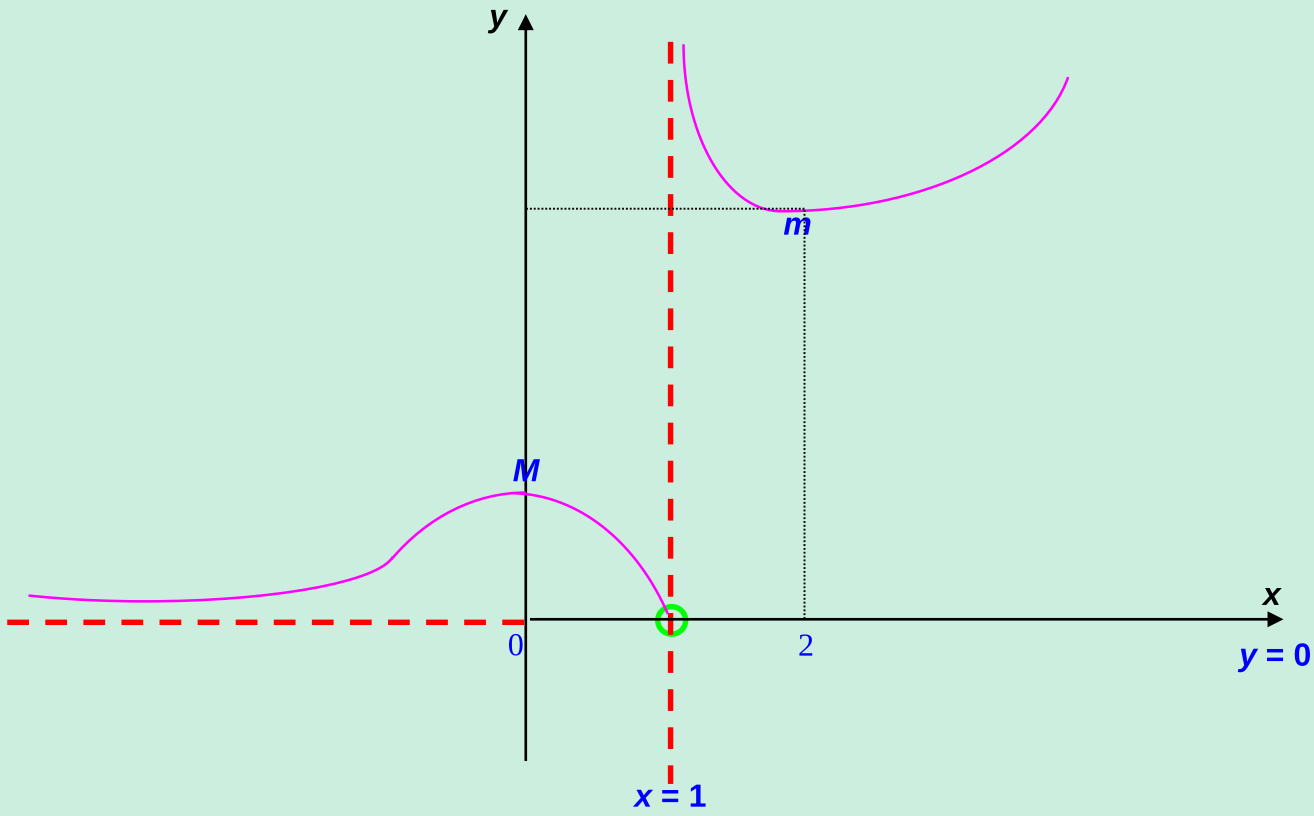
$$\Downarrow$$

$$M = (0,1) \equiv A \qquad\qquad m = \left(2, e^4\right)$$

punto di Massimo ***punto di minimo***

$$y = e^{\frac{x^2}{x-1}}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 6

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\}$$

Il polinomio x^2 è definito su tutta la retta reale
L'esponenziale è definita su tutta la retta reale

La funzione data è definita su tutta la retta reale

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

$$\Downarrow$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^2 e^{-x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cdot e^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0,0) \equiv O$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 e^{-x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x^2 = 0 \\ e^{-x+2} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x = 0 \\ mai \end{cases} \end{cases} \Rightarrow B = (0,0) \equiv A \equiv O$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

$$\Downarrow$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff x^2 e^{-x+2} > 0 \iff \begin{cases} x^2 > 0 \\ e^{-x+2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} sempre \ (\grave{e}\ un\ quadrato) \\ sempre \ (\grave{e}\ un'esponenziale) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

\+ + + + + + + + + + + + + + + +

\+ + + + + + + + + + + + + + + +

$$\boldsymbol{y > 0}$$

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty \right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 e^{-x+2} \right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 \right) e^{\lim\limits_{x \to -\infty} (-x+2)} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x+2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \right) e^{\lim\limits_{x \to +\infty} (-x+2)} = (+\infty)(0) = f.i.$$

Osservazione

Per $x \to \pm\infty$ le esponenziali tendono a zero più velocemente di tutte le potenze che, a loro volta, tendono a zero più velocemente delle logaritmiche

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \left(x^2 e^{-x+2} \right) = 0$$

***y* = 0 A.O. destro**

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

⬇

5) Calcolo della derivata prima

$$D\left[f(x)\cdot g(x)\right] = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

regola di derivazione di un prodotto

⬇

$$y' = D\left[x^2 e^{-x+2}\right] = D\left(x^2\right)\cdot e^{-x+2} + x^2\cdot D\left(e^{-x+2}\right) = 2x\cdot e^{-x+2} + x^2\cdot e^{-x+2}\cdot(-1) =$$

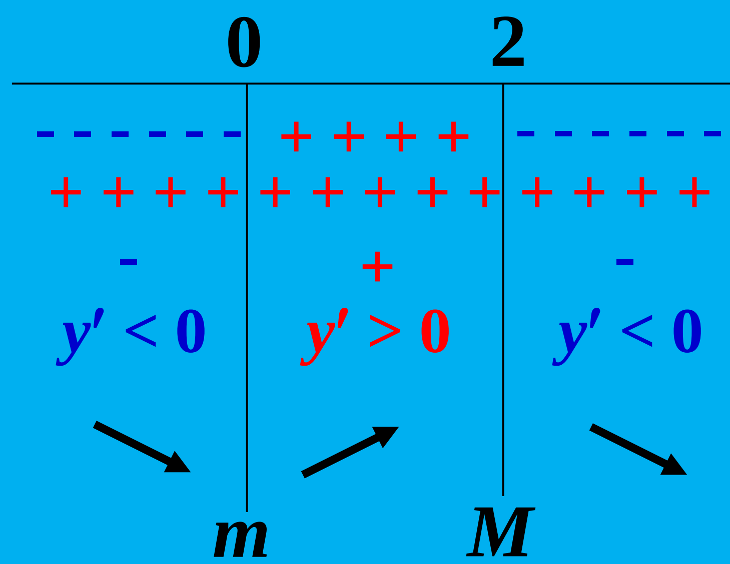
$$= e^{-x+2}\cdot\left(2x - x^2\right)$$

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff e^{-x+2} \cdot \left(2x - x^2\right) > 0 \iff \begin{cases} 2x - x^2 > 0 \\ e^{-x+2} > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 2x < 0 \\ sempre \ (\grave{e} \ un'esponenziale) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\left(x-2\right) < 0 \\ sempre \end{cases} \iff \begin{cases} 0 < x < 2 \\ sempre \end{cases}$$


0
2
- - - - - -
+ + + +
- - - - - -
+ + + + + + + + + + + + +
-
+
-
y' < 0
y' > 0
y' < 0
m
M

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

$$\Downarrow$$

***x* = 0 è un *minimo* per la funzione**

***x* = 2 è un *Massimo* per la funzione**

$$\Downarrow$$

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; m = (0,0) \equiv A \equiv O$$

$$x = 2 \;\Rightarrow\; y = 2^2 \cdot e^{-2+2} \;\Rightarrow\; y = 4 \cdot e^0 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$\Downarrow$$

$$M = (2,4)$$

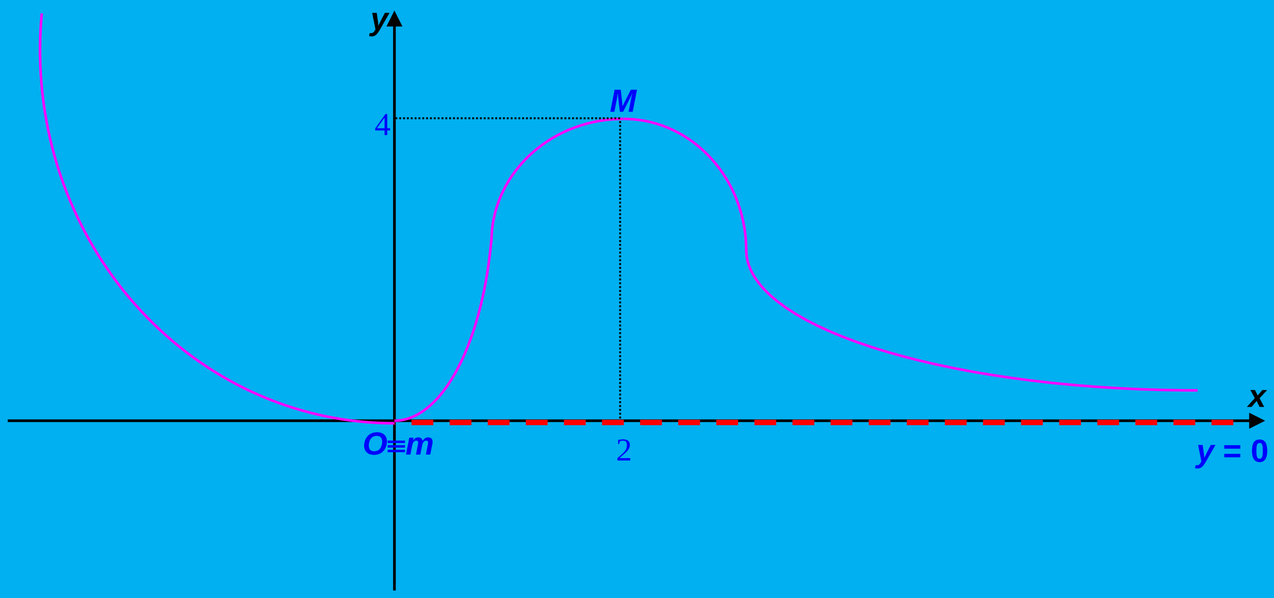
punto di Massimo

$$m = (0,0) \equiv O$$

punto di minimo

$$y = x^2 e^{-x+2}$$

7) Grafico della funzione



Esempio 7

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$

$$\Downarrow$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 0 < x < +\infty \right\}$$

L'esponenziale è definita su tutta la retta reale

$$\Downarrow$$

x* = 0 *A.V.

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$

$$\Downarrow$$

2) Intersezioni con gli assi

Non esistono intersezioni con l'asse *y*:
in *x* = 0, infatti, la funzione non è definita!!!

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x+1}{x} e^{-2x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} = 0 \\ e^{-2x} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x+1 = 0 \\ mai \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \begin{cases} x = -1 \\ mai \end{cases} \end{cases} \Rightarrow A = (-1, 0)$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} \cdot e^{-2x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x} > 0 \\ e^{-2x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \\ \textit{sempre (è un'esponenziale)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \\ \textit{sempre} \end{cases}$$

-1 $\qquad$ 0

- - - - - -	+ + + +	+ + + +
- - - - - -	- - - - - - -	+ + + +
+ + + + +	+ + + + +	+ + + +
+	-	+
$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$

$$y=\frac{x+1}{x}e^{-2x}$$

$\Downarrow$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E.=\left\{x\in\mathbb{R}:x\neq 0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}:-\infty<x<0,0<x<+\infty\right\}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}e^{-2x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)}=(1)\left(e^{+\infty}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}e^{-2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x)}=(1)\left(e^{-\infty}\right)=\frac{1}{e^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0$$

y* = 0 *A.O. destro

$$y=\frac{x+1}{x}e^{-2x}$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y'=D\left[\frac{x+1}{x}e^{-2x}\right]=D\left(\frac{x+1}{x}\right)\cdot e^{-2x}+\frac{x+1}{x}\cdot D\left(e^{-2x}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}e^{-2x}+\frac{x+1}{x}\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=$$

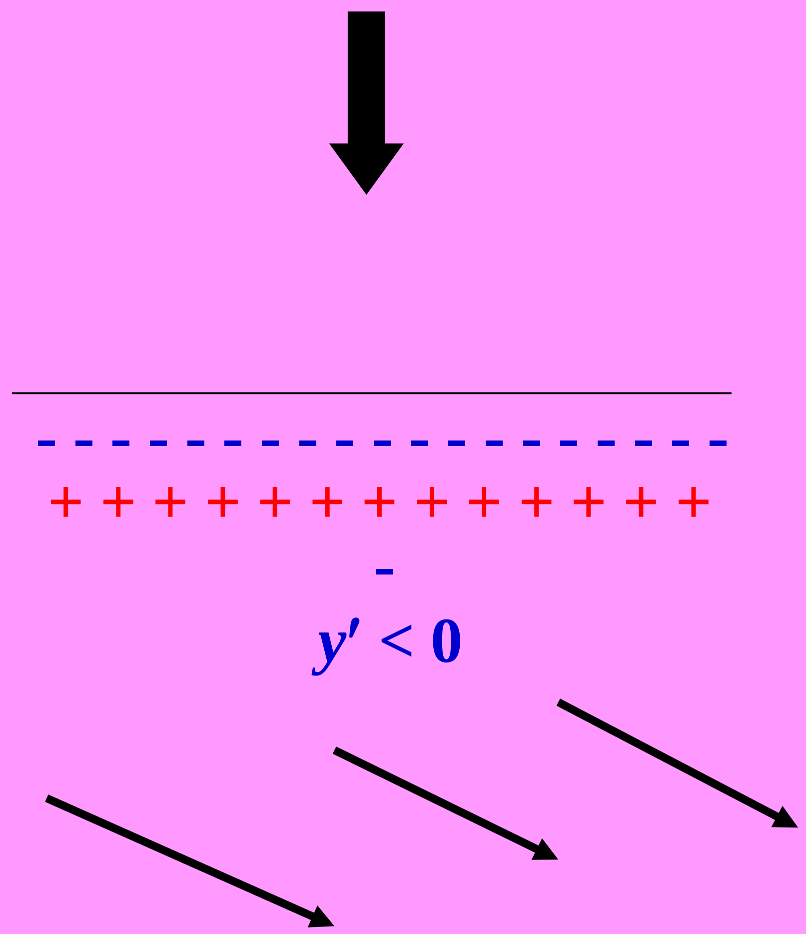
$$=\frac{x-x-1}{x^2}e^{-2x}-\frac{2x+2}{x}e^{-2x}=e^{-2x}\left(\frac{-1}{x^2}-\frac{2x+2}{x}\right)$$

$$y=\frac{x+1}{x}e^{-2x}$$

6) Studio del segno della derivata prima

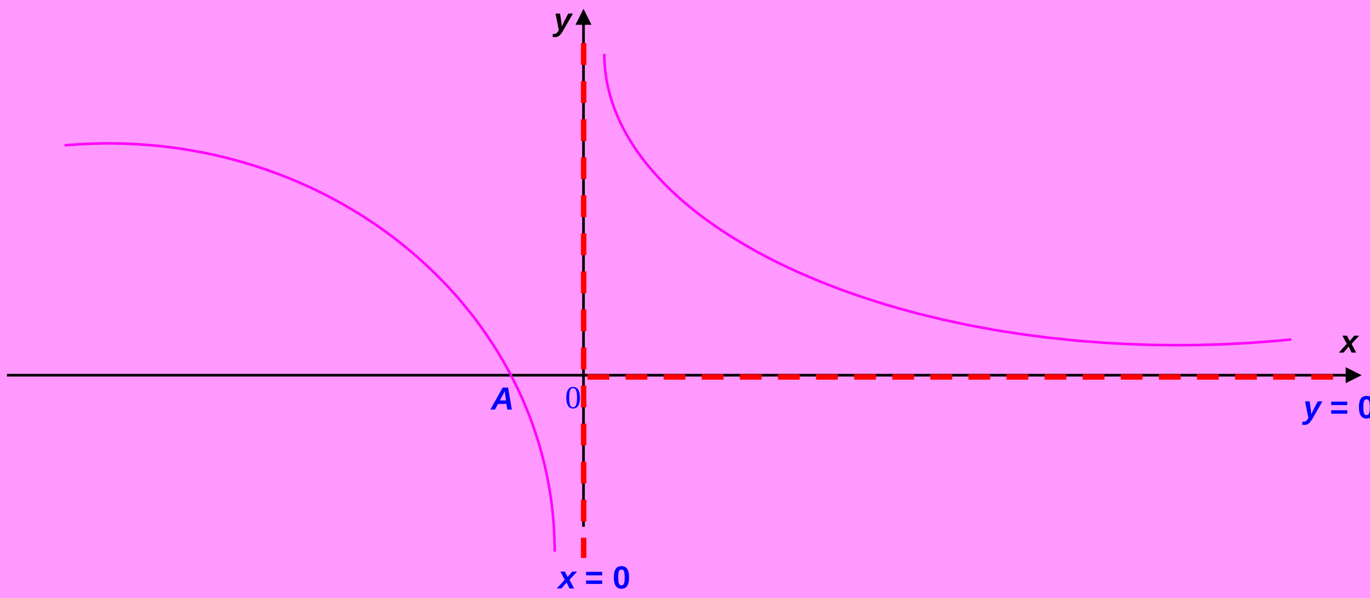
$$y'>0 \iff e^{-2x}\left(\frac{-1}{x^2}-\frac{2x+2}{x}\right)>0 \iff \begin{cases}\dfrac{-1-2x^2-2x}{x^2}>0\\ e^{-2x}>0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}2x^2+2x+1<0\\ sempre\ (\text{è } un'esponenziale)\end{cases} \iff \begin{cases}mai\ \left(\Delta<0\right)\\ sempre\end{cases}$$


- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
+ + + + + + + + + + + + +
-
$y' < 0$

$$y = \frac{x+1}{x} e^{-2x}$$

7) Grafico della funzione



Osservazioni!

Le funzioni esponenziali sono definite su tutta la retta reale

Le funzioni esponenziali sono sempre positive

Le funzioni esponenziali non presentano intersezioni con l'asse delle *x*

$0 < a < 1$	$a > 1$
$x \to +\infty \Rightarrow y \to 0^+$	$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$
$x \to -\infty \Rightarrow y \to +\infty$	$x \to -\infty \Rightarrow y \to 0^-$