

L'ALGEBRA LINEARE

Daniela Tondini
dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo



LE MATRICI: L'INVERSA

A matrice quadrata di ordine n



Si definisce *inversa* di A una matrice A^{-1}
quadrata di ordine n tale che risulti:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

LE MATRICI: L'INVERSA

A matrice quadrata di ordine n



l'inversa di A esiste se e solo se

$$\det A \neq 0$$

L'INVERSA DI A È UNICA!!!

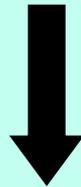
LE MATRICI: IL CALCOLO DELL'INVERSA

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^t$$

A^* è la matrice dei complementi algebrici

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{det}A = -1 \neq 0$$



esiste l'inversa di A

calcoliamo la matrice dei complementi algebrici A^* di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

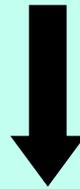


$$c_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{11} = 1$$

$$c_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{12} = 0$$

$$c_{13} = (-1)^{i+j} \cdot m_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{13} = 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{21} = 1$$

$$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{22} = 1$$

$$c_{23} = (-1)^{i+j} \cdot m_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{23} = 2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



$$c_{31} = (-1)^{i+j} \cdot m_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{31} = 0$$

$$c_{32} = (-1)^{i+j} \cdot m_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{32} = 1$$

$$c_{33} = (-1)^{i+j} \cdot m_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è il complemento algebrico di } a_{33} = 1$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica!!!

L'inversa trovata è quella giusta se sono soddisfatte contemporaneamente le seguenti identità:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+1-2 & -1+2 & 2-2 \\ 1-1 & -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & -1+2 & -2+2 \\ -1+1 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Esempio 2

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$



**sviluppando rispetto
alla prima colonna**

$$\det A_4 = +3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(-4) = -12 \neq 0$$



esiste l'inversa di A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad A^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & 0 \\ -3 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -12$$



$$A^{-1} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$