L'ALGEBRA LINEARE

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

LE MATRICI: L'INVERSA

A **matrice <u>quadrata</u> di ordine** ***n***

$$\Downarrow$$

Si definisce *inversa* di *A* una matrice A^{-1}

quadrata di ordine *n* tale che risulti:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

LE MATRICI: L'INVERSA

A matrice quadrata di ordine n

$\Downarrow$

l’inversa di A esiste se e solo se

$$\boxed{\det A \neq 0}$$

L’INVERSA DI *A* È UNICA!!!

LE MATRICI:

IL CALCOLO DELL'INVERSA

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot \left(A^*\right)^t$$

A* **è la matrice dei complementi algebrici**

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det A = -1 \neq 0$$

$$\Downarrow$$

esiste l'inversa di *A*

calcoliamo la matrice dei complementi algebrici *A** di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$c_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ **è il complemento algebrico di $a_{11} = 1$**

$c_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ **è il complemento algebrico di $a_{12} = 0$**

$c_{13} = (-1)^{i+j} \cdot m_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **è il complemento algebrico di $a_{13} = 0$**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **è il complemento algebrico di $a_{21} = 1$**

$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **è il complemento algebrico di $a_{22} = 1$**

$c_{23} = (-1)^{i+j} \cdot m_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ **è il complemento algebrico di $a_{23} = 2$**

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$c_{31}=(-1)^{i+j}\cdot m_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=0$ **è il complemento algebrico di $a_{31}=0$**

$c_{32}=(-1)^{i+j}\cdot m_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-2$ **è il complemento algebrico di $a_{32}=1$**

$c_{33}=(-1)^{i+j}\cdot m_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$ **è il complemento algebrico di $a_{33}=1$**

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A^*)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot (A^*)^T$$

$$\Downarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Verifica!!!

L'inversa trovata è quella giusta se sono soddisfatte <u>contemporaneamente</u> le seguenti identità:

$$AA^{-1} = I_n \quad \underline{\text{ed}} \quad A^{-1}A = I_n$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1+1-2 & -1+2 & 2-2 \\ 1-1 & -1+1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-1 & -1+2 & -2+2 \\ -1+1 & 1-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Esempio 2

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

sviluppando rispetto alla prima colonna

$$detA_4 = +3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3(-4) = -12 \neq 0$$

esiste l'inversa di *A*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \cdot (A^*)^T$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -12 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & 0 \\ -3 & 9 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$(A^*)^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^*\right)^t = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -12$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 9 \\ 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$