LA MATEMATICA FINANZIARIA

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

IL PRESTITO

Un **prestito *S*** o **mutuo**

è la concessione di un capitale da parte di un soggetto *A*, detto *creditore* o *mutuante*, a un soggetto *B*, detto *debitore* o *mutuatario*, il quale si impegna a restituire il capitale e a pagare gli interessi nei tempi convenuti. In genere, si opera in regime di capitalizzazione semplice nel caso in cui la durata del prestito *S* sia inferiore ad un anno e, in regime di capitalizzazione composta, negli altri casi.

IL PRESTITO

Il valore attuale delle quote di capitale che devono essere ancora pagate prende il nome di **nuda proprietà**; il valore attuale delle quote di interesse che devono essere ancora versate si chiama **usufrutto**. Ogni prestito deve essere rimborsato e, a seconda delle regole su cui si basa il rimborso, si può avere un rimborso globale o graduale.

IL RIMBORSO GLOBALE

Si parla di **rimborso globale**

quando il capitale viene restituito interamente alla

scadenza del periodo convenuto

- il rimborso globale sia del capitale che degli interessi
- il rimborso globale del capitale e periodico degli interessi

IL RIMBORSO GLOBALE

Il rimborso globale sia del capitale che degli interessi

per determinare l'importo che deve essere restituito

si deve calcolare il montante del capitale prestato

$$M = C\left(1 + i \cdot t\right)$$

capitalizzazione semplice

$$M = C\left(1 + i\right)^t$$

capitalizzazione composta

IL RIMBORSO GLOBALE

Il rimborso globale del capitale e periodico degli interessi

per determinare l'ammontare degli interessi

$$I = C \cdot i$$

tasso annuo

$$I = C \cdot \frac{i}{k}$$

tasso periodale

L'AMMORTAMENTO

Si parla di **ammortamento** o **rimborso graduale**

quando si rimborsa il capitale in più quote

(in genere si parla di mutuo ipotecario)

Il debitore versa periodicamente delle rate, dette **rate di ammortamento**, formate da:

- una **quota interesse** *I*
- da una **quota capitale** *C*

L'AMMORTAMENTO

Risulta importante evidenziare i seguenti aspetti:

- il **debito** si estingue solo con il pagamento delle quote capitale, ovvero la somma di tutte le quote capitale deve essere uguale al prestito S;
- il **debito estinto** al tempo k è la somma delle sole quote capitale delle prime k rate;
- il **debito residuo** è la differenza tra l'intero capitale prestato e il debito già estinto.

L'AMMORTAMENTO

Un'osservazione particolare va fatta sulla **quota interesse**:

- nella prima rata gli interessi vengono calcolati sull'intero capitale prestato;
- nella seconda rata, e in quelle successive, gli interessi si calcolano sul debito residuo.

↓

La quota interesse diminuisce al crescere del numero di rate pagate.

L'AMMORTAMENTO

Per il principio di equivalenza finanziaria

⇓

il valore attuale delle rate pagate dal debitore deve essere finanziariamente equivalente alla somma prestata dal creditore

L'AMMORTAMENTO

ESEMPIO

Supponiamo di aver ricevuto un prestito *S* di €10000,00 che conveniamo di estinguere in 4 anni, suddividendolo nelle seguenti quattro quote capitale al tasso concordato del 5% annuo:

$$\boxed{\begin{aligned} C_1 &= €2000 \\ C_2 &= €3000 \\ C_3 &= €2500 \\ C_4 &= €2500 \end{aligned}}$$

L'AMMORTAMENTO

Per il calcolo delle rate prepariamo la seguente tabella indicando la quota capitale, la quota interesse, la rata annua, il debito estinto e il debito residuo:

periodo k	**quota capitale** C_k	**quota interessi** I_k	**rata annua** R_k	**debito estinto** E_k	**debito residuo** D_k
0	------	------	------	------	10000
1	2000	500	2500	2000	8000
2	3000	400	3400	5000	5000
3	2500	250	2750	7500	2500
4	2500	125	2625	10000	------

L'AMMORTAMENTO

Spieghiamo adesso come è stato costruito il precedente piano di ammortamento:

- **Tempo 0:** alla concessione del prestito, nessuna rata è stata pagata e il debito residuo è di €10000,00.
- **Tempo 1:** dopo un anno, la prima rata è formata dalla quota capitale di €2000,00 e dalla quota interesse calcolata su €10000,00, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} I = 1000 \cdot 0,05 = 500,00€ \\ R = 2500,00€ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E = €2000,00 \\ D = €8000,00 \end{array}$$

- **Tempo 2:** dopo due anni, la seconda rata è formata dalla quota capitale di €3000,00 e dalla quota interesse calcolata su €8000,00, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} I = 8000 \cdot 0,05 = 400,00€ \\ R = 3400,00€ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} E = €5000,00 \\ D = €5000,00 \end{array}$$

L'AMMORTAMENTO

- **Tempo 3:** dopo tre anni, la terza rata è formata dalla quota capitale di €2500,00 e dalla quota interesse calcolata su €5000,00, cioè:

$$I = C \cdot \frac{i}{k}$$

- **Tempo 4:** dopo quattro anni, la quarta rata è formata dalla quota capitale di €2500,00 e dalla quota interesse calcolata su €2500,00, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} I = 2500 \cdot 0,05 = 125,00€ \\ R = 2625,00€ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} E = €10000,00 \\ D = €0,00 \end{array}$$

L'AMMORTAMENTO

⇒

Il piano è finanziariamente equo in quanto risulta:

$$2500(1+0,05)^{-1}+3400(1+0,05)^{-2}+2750(1+0,05)^{-3}+2625(1+0,05)^{-4}=10000,00€$$

L'AMMORTAMENTO

È un procedimento o schema che ti permette di rimborsare un prestito iniziale *S* tramite il versamento di importi in rate decrescenti temporalmente

Rata = quota interesse + quota capitale

somma che devi corrispondere a titolo di interessi sul debito residuo

parte della rata che va a ripagare la somma presa a prestito, ovvero la somma di tutte le quote capitale è pari al prestito

L'AMMORTAMENTO

L'**interesse** *I* è pari al prodotto del tasso *i* per il prestito, nel primo anno, e al prodotto di *i* per il prestito cui vanno sottratte le quote capitale già ripagate, per gli anni successivi

Il **debito estinto** *E*, alla *k*-esima rata, è pari alla somma delle prime *k* rate

L'AMMORTAMENTO

somma presa a prestito – quote capitale versate = **debito residuo**

ciò che rimane da rimborsare a chi ha erogato il prestito

la somma delle quote capitale da restituire

al momento dell'accensione del mutuo è pari alla somma presa a prestito

diminuisce, nel corso del tempo, per le quote capitale che si restituiranno

l'ultimo anno deve essere uguale a zero

L'AMMORTAMENTO

**Esistono diverse tipologie di ammortamento
a seconda di come viene calcolata la rata.
Le due più importanti, oggetto del nostro studio, sono:**

PROGRESSIVO O FRANCESE
quando un debito viene rimborsato in modo graduale con il pagamento periodico di *n* rate costanti, ognuna delle quali contiene una quota capitale e una quota interessi

UNIFORME O ITALIANO
quando un prestito viene rimborsato in modo graduale con il pagamento periodico di *n* rate in cui la quota capitale rimane costante

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Tale tipologia di ammortamento viene utilizzata quando si accede a un mutuo presso una banca, ad esempio per l'acquisto di una casa o per il pagamento a rate di un'auto. Il debitore, pertanto, sa esattamente quante rate deve pagare e qual è l'importo fisso. In tali rate, che supporremo sempre posticipate, dal momento che gli interessi si pagano alla fine del periodo di competenza, è specificato comunque il valore delle quote capitale e delle quote interesse; queste ultime, con varie modalità, sono oneri deducibili nelle dichiarazioni dei redditi.

valore attuale

rata annua posticipata necessaria ad estinguere un debito di €1,00 in *n* anni

$$\boxed{R = V \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = V \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}}$$

rata

N.B.
La rata costante se è costante il tasso di interesse

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

ESEMPIO

Otteniamo da una banca un mutuo di €20000,00, al tasso annuo del 4%, da rimborsare con **ammortamento progressivo** in 5 anni. Quale sarà la costante annua che dovremo pagare?

$V = 20000,00€$
$i_a = 4\% = 0,04$
$n = 5\ anni$

$$\boxed{20000 = R \cdot a_{\overline{5|}0,04} = R \cdot \frac{1-(1+i)^{-5}}{i}}$$

rata costante da pagare per 5 anni per estinguere il debito

$$R = \frac{20000}{a_{\overline{5|}0,04}} = 4492,54€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Per stendere il piano di ammortamento, quindi, dobbiamo costruire una tabella, osservando che:

- la prima quota interesse è calcolata sull'intero debito, ovvero:

$$I_1 = V \cdot i = 20000 \cdot 0,04 = 800,00€$$

- la prima quota capitale è data da:

$$C_1 = R - I_1 = 4492,54 - 800 = 3692,54€$$

- dopo aver pagato la prima rata, il debito residuo è:

$$D_1 = V - C_1 = 20000 - 3692,54 = 16307,46€ \; \left[D_0 = V = 20000\right]$$

- il debito estinto, invece, è pari alla prima quota capitale, ovvero si ha:

$$E_1 = C_1 = 3692,54€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Iterando il ragionamento, si ha:

- la seconda quota interesse è calcolata sul debito residuo, dopo aver pagato la prima rata, ovvero:

$$I_2 = D_1 \cdot i = 16307,46 \cdot 0,04 = 652,30€$$

- la seconda quota capitale è data da:

$$C_2 = R - I_2 = 4492,54 - 652,30 = 3840,24€$$

- dopo aver pagato la seconda rata, il debito residuo è:

$$D_2 = D_1 - C_2 = 16307,46 - 3840,24 = 12467,22€$$

- il debito estinto, invece, è dato da:

$$E_2 = E_1 + C_2 = 3692,54 + 3840,24 = 7532,78€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Continuando, si ha:

$$I_3 = D_2 \cdot i = 12467,22 \cdot 0,04 = 498,69€$$

$$C_3 = R - I_3 = 4492,54 - 498,69 = 3993,85€$$

$$D_3 = D_2 - C_3 = 12467,22 - 3993,85 = 8473,37€$$

$$E_3 = E_2 + C_3 = 7532,78 + 3993,85 = 11526,63€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Continuando, si ha:

$$I_4 = D_3 \cdot i = 8473,37 \cdot 0,04 = 338,93€$$

$$C_4 = R - I_4 = 4492,54 - 338,93 = 4153,61€$$

$$D_4 = D_3 - C_4 = 8473,37 - 4153,61 = 4319,76€$$

$$E_4 = E_3 + C_4 = 11526,63 + 4153,61 = 15680,24€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Continuando, si ha:

$$I_5 = D_4 \cdot i = 4319,76 \cdot 0,04 = 172,79€$$

$$C_5 = R - I_5 = 4492,54 - 172,79 = 4319,75€$$

$$D_5 = D_4 - C_5 = 4319,76 - 4319,75 = 0,01€$$

$$E_5 = E_4 + C_5 = 15680,24 + 4319,75 = 19999,99€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Dunque, il piano di ammortamento completo è fornito dalla seguente tabella:

anni *n*	**rata** *R*	**quota interessi** I_k	**quota capitale** C_k	**debito estinto** E_k	**debito residuo** D_k
0	------	------	------	------	20000
1	4492,54	800	3692,54	3692,54	16307,46
2	4492,54	652,30	3840,24	7532,78	12467,22
3	4492,54	498,69	3993,85	11526,63	8473,37
4	4492,54	338,93	4153,61	15680,24	4319,76
5	4492,54	172,79	4319,75	19999,99	0,01

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

Ne segue, pertanto, che le quote capitale crescono secondo una progressione geometrica di ragione $1+i$.

Basti verificare come, nell'esempio precedente, il rapporto tra due quote capitale successive sia costante e pari proprio a 1,04, ovvero si ha:

$$\frac{4319,75}{4153,61}=1,04;\frac{4153,61}{3993,85}=1,04;......$$

$$\Downarrow$$

Il nome di ammortamento progressivo deriva, quindi, proprio da suddetta proprietà.

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

La composizione della *k*-esima rata si determina sfruttando la proprietà evidenziata, ovvero seguendo la procedura di seguito riportata:

- si trova la rata costante:

$$R = V \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = V \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

- si trova la prima quota interesse:

$$I_1 = V \cdot i$$

- si trova la prima quota capitale come differenza tra la rata e la quota interesse:

$$C_1 = R - I_1$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

- si trova la *k*-esima quota capitale sfruttando le progressioni:

$$C_k = C_1 (1+i)^{k-1}$$

- si trova la *k*-esima quota interesse per differenza:

$$I_k = R - C_k$$

- si trova il debito residuo, ovvero quello che bisogna ancora pagare alla banca, dopo il pagamento della *k*-esima rata come valore attuale delle restanti rate:

$$D_k = R \cdot a_{\overline{n-k}|i}$$

- si trova il debito estinto, ovvero quello che ho già rimborsato alla banca, per differenza:

$$E_k = V - D_k$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

ESEMPIO

Un debito di €15000,00 è rimborsabile in 10 anni, con **ammortamento progressivo**, al tasso del 5% annuo. Trovare la composizione della quinta rata e la situazione del debito dopo il pagamento della settima rata.

$$n = 10$$

$$R = V \cdot \frac{1}{a_{\overline{n}|i}} = V \cdot \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} = 15000 \cdot \frac{0,05}{1-(1+0,05)^{-10}} = 1942,57€$$

$$I_1 = V \cdot i = 15000 \cdot 0,05 = 750€$$

$$C_1 = R - I_1 = 1942,57 - 750 = 1192,57€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

$k = 5$

$$C_5 = C_1(1+i)^{k-1} = 1192,57(1+0,05)^{5-1} = 1192,57(1+0,05)^4 = 1449,58€$$

$$I_5 = R - C_5 = 1942,57 - 1449,58 = 492,99€$$

anno **5**	**rata** R_5	**quota interesse** I_5	**quota capitale** C_5
5	1942,57	492,99	1449,58

L'AMMORTAMENTO FRANCESE

$n = 10, k = 7$

$\Rightarrow$

$$D_7 = R \cdot a_{\overline{n-k|}i} = R \cdot a_{\overline{10-7|}0,05} = R \cdot a_{\overline{3|}0,05} = 1942,57 \cdot \frac{1-(1+0,05)^{-3}}{0,05} = 5290,10€$$

$$E_7 = V - D_7 = 15000 - 5290,10 = 9709,90€$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

Tale tipologia di ammortamento viene utilizzata, per la sua semplicità concettuale rispetto al metodo francese, soprattutto nell'apertura di credito con garanzia ipotecaria. Prevedendo una rata molto elevata all'inizio, che tende però a regredire con il passare del tempo, può rivelarsi vantaggioso per chi gode di una situazione reddituale tale da sopportarla e molto meno per chi, invece, non la possiede e quindi potrebbe trovarsi in difficoltà all'inizio.

Nell'ammortamento italiano, però, il capitale viene abbattuto rapidamente, prerogativa questa che comporta un vantaggio estremamente prezioso, andando a determinare un totale di interessi più contenuto rispetto a quello che si verrebbe a formare optando per altre tipologie di ammortamento. Ed è proprio la progressione con cui si riduce sempre di più il capitale residuo, rata dopo rata, a comportare il calcolo del valore relativo alla quota interessi su una cifra sempre minore.

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

ESEMPIO

Dobbiamo rimborsare, con **ammortamento uniforme**, un prestito *S* di €12000,00, al tasso annuo del 5%, in 6 rate annue posticipate.

ammontare del prestito

$$S = 12000,00€$$
$$i_a = 5\% = 0,05$$
$$n = 6$$

$$\boxed{C = \frac{12000}{6} = 2000€}$$

quota capitale

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

Per stendere il piano di ammortamento, quindi, dobbiamo costruire una tabella, osservando che:

- nella prima rata, *I* viene calcolato sull'ammontare dell'intero prestito, ovvero:

$$I_1 = 12000 \cdot 0,05 = 600,00€$$

- nella seconda rata, *I* viene calcolato sul primo debito residuo, ovvero su €10000:

$$I_2 = 10000 \cdot 0,05 = 500,00€$$

- nella terza rata, *I* viene calcolato sul secondo debito residuo, ovvero su €8000 :

$$I_3 = 8000 \cdot 0,05 = 400,00€$$

- nella quarta rata, *I* viene calcolato sul terzo debito residuo, ovvero su €6000 :

$$I_4 = 6000 \cdot 0,05 = 300,00€$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

Continuando in questo modo, possiamo stendere il piano di ammortamento come nella seguente tabella:

anni n	**rata** R	**quota interessi** I_k	**quota capitale** C_k	**debito estinto** E_k	**debito residuo** D_k
0	------	------	------	------	12000
1	2600	600	2000	2000	10000
2	2500	500	2000	4000	8000
3	2400	400	2000	6000	6000
4	2300	300	2000	8000	4000
5	2200	200	2000	10000	2000
6	2100	100	2000	12000	------

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

Ne segue, pertanto, che le quote interesse diminuiscono sempre della stessa quantità perché ad ogni rata successiva vengono calcolate su una somma che diminuisce in modo costante.

Basti verificare come, nell'esempio precedente, le rate diminuiscono sempre di €100, formando, così, una progressione aritmetica di ragione –100:

$$600; 500; 400; 300; 200; 100$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

La composizione della *k*-esima quota interesse si determina sfruttando le regole delle progressioni aritmetiche e determinando l'elemento di posto *k* a partire da quello di posto 1, ovvero seguendo la procedura di seguito riportata:

- si trova la quota capitale:

ammontare del prestito

$$C = \frac{S}{n}$$

- si trova la prima quota interesse:

$$I_1 = S \cdot i$$

- si trovano le successive quote interesse che formano una progressione aritmetica di ragione:

$$-C \cdot i$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

- si trova la k-esima quota interesse sfruttando le progressioni:

$$I_k = I_1 + (k-1)(-C \cdot i)$$

da cui, sostituendo a I_1 e a C le rispettive espressioni, si ha:

$$I_k = S \cdot i - (k-1) \cdot \frac{S}{n} \cdot i = S \cdot i \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = S \cdot i \cdot \frac{n-k+1}{n}$$

- si trova il debito residuo in progressione aritmetica di ragione $-C$

- si trova il debito estinto in progressione aritmetica di ragione C

- si trova la rate che è variabile:

$$R_k = C + I_k$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

ESEMPIO

Determiniamo la variazione costante della quota interesse in un **ammortamento uniforme** di un prestito *S* di €32000 in 4 anni al tasso annuo del 4,4%. Costruiamo poi il piano di ammortamento.

$$n = 4$$

$$C = \frac{S}{n} = \frac{32000}{4} = 8000€$$

$$I_1 = S \cdot i = 32000 \cdot 0,044 = 352€$$

Le successive quote diminuiscono di $C \cdot i$, cioè di:

$$8000 \cdot 0,044 = 352€$$

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

anni n	rata R	quota interessi I_k	quota capitale C_k	debito estinto E_k	debito residuo D_k
0	------	------	------	------	32000
1	9408	1408	8000	8000	24000
2	9056	1056	8000	16000	16000
3	8704	704	8000	24000	8000
4	8352	352	8000	32000	

L'AMMORTAMENTO ITALIANO

ESEMPIO

Calcoliamo la composizione della sesta rata di un debito di €50000 contratto al tasso annuo del 4,5% e restituibile con **ammortamento uniforme** in 10 rate.

$$n = 10$$

$$C = \frac{S}{n} = \frac{50000}{10} = 5000€$$

$$I_6 = S \cdot i \cdot \frac{n-k+1}{n} = 50000 \cdot 0,045 \cdot \frac{10-6+1}{10} = 1125€$$

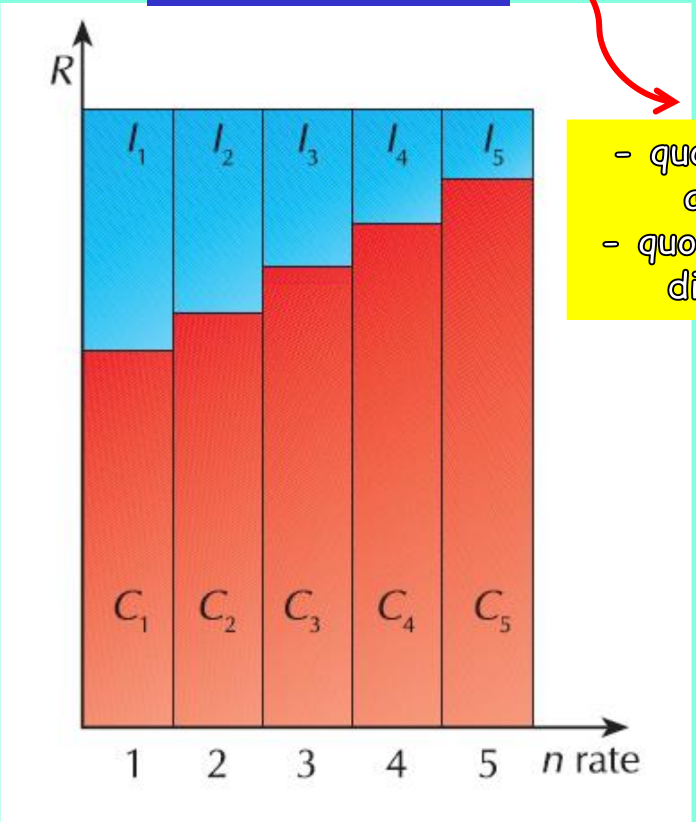
$$R_6 = C + I_k = C + I_6 = 5000 + 1125 = 6125€$$

L'AMMORTAMENTO FRANCESE E ITALIANO

ammortamento francese

- rate costanti
- quota capitale variabile
- quota interesse variabile

ammortamento italiano



- quota capitale aumenta
- quota interesse diminuisce

- quota capitale costante
- quota interesse variabile
- rate variabili

- quota interesse aumenta
- rata diminuisce