CAPITOLO VI

LIMITI DI FUNZIONI

1. CONCETTO DI LIMITE

Esula dallo scopo di questo libro la trattazione della teoria sui *limiti.* Tuttavia, pensando di fare cosa gradita allo studente, che deve possedere questa nozione come *background*, riteniamo più utile presentare, come richiamo, le interpretazioni grafiche di tale concetto.

Sia data, a tal proposito, una funzione reale $y = f(x)$ definita su un insieme $E \subseteq \Re$ e sia x_0, appartenente o no all'insieme, un punto di accumulazione di E.

In generale quando si pensa al concetto di *limite* si fa riferimento alla scrittura

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

In realtà può aversi una casistica più ampia potendo sia x che $f(x)$ tendere ad un elemento dell'insieme $\{x_0$ ovvero ℓ, $-\infty$, $+\infty$, $\infty\}$, dove con ∞ si indica tutta la retta reale $(-\infty, +\infty)$.

Così si potrebbero presentare ben sedici casi con scritture quali:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \ell \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

che si possono racchiudere nella seguente espressione

$$\lim_{x \to \begin{cases} x_0 \\ \pm\infty \\ \infty \end{cases}} f(x) = \begin{cases} \ell \\ \pm\infty \\ \infty \end{cases}$$

A volte, però, il limite non esiste ed allora occorre studiare il comportamento in un sottoinsieme di un intorno completo di x_0 avendosi casi come i seguenti:

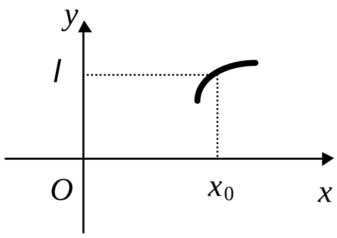
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ su\ E}} f(x)$$

essendo E un sottoinsieme di $\Re$ ed x_0 un suo punto di accumulazione; la situazione tende a complicarsi maggiormente in termini di casistica.

Siano x_0 ed ℓ due numeri reali finiti. Elenchiamo qui di seguito i vari casi possibili:

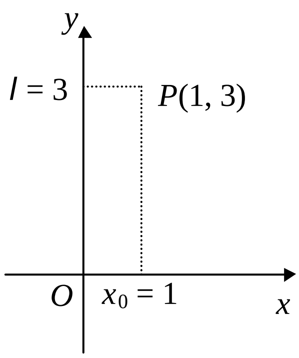
1) *limite finito quando x tende ad un numero finito*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$



ESEMPIO

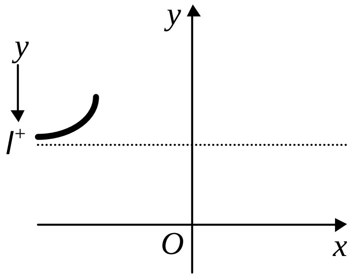
$\lim_{x \to 1} (x^3 + 2) = 3$



il limite è rappresentato proprio dal punto P

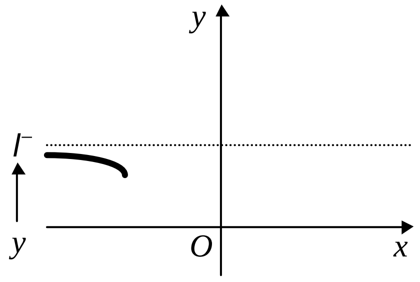
2) *limite finito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti quattro casi*

a)



$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^+$$

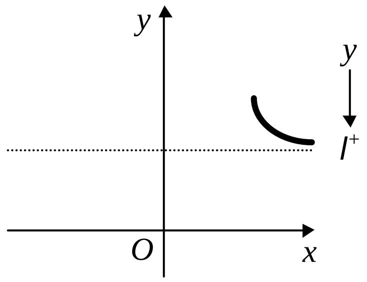
b)



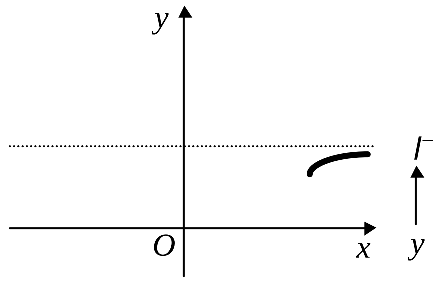
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell^-$$

Notasi che scrivere formalmente ℓ^+ ed ℓ^- fornisce un'informazione aggiuntiva sulla tendenza dall'alto e dal basso della nostra funzione $f(x)$ verso la retta $y = \ell$.

c) *d*)



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell^-$$

ESEMPI *b*) + *c*)

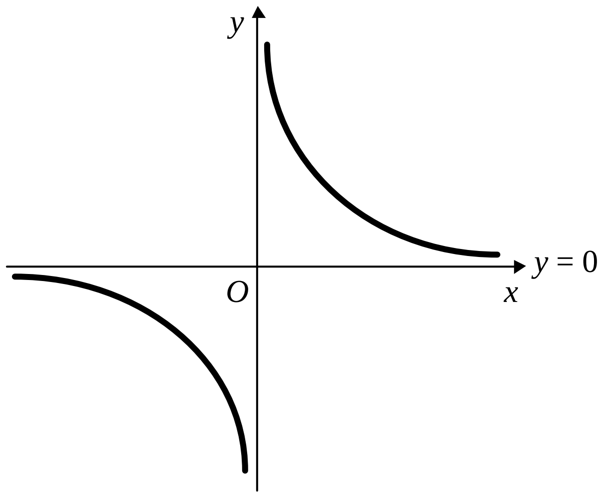
La funzione

$$y = \frac{1}{x}$$

è definita su tutta la retta reale tranne che nel punto $x = 0$ (cfr. capitolo precedente).

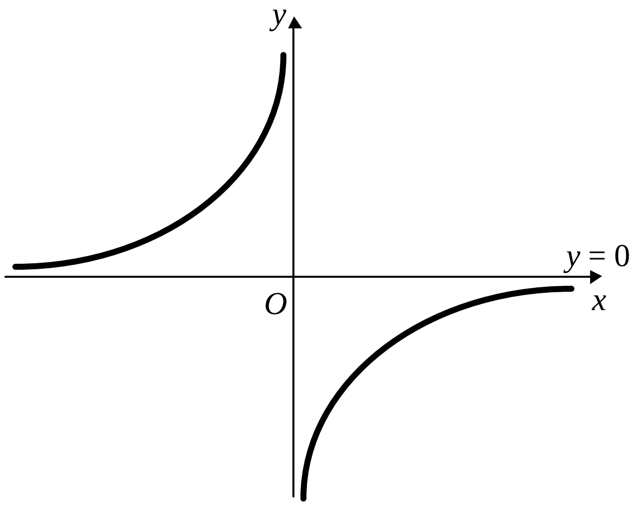
Segue allora che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$



a) + *d*)

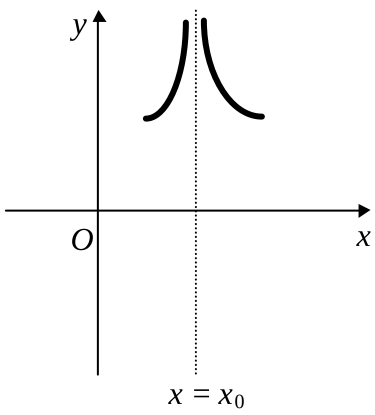
$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0^- \qquad e \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0^+$$

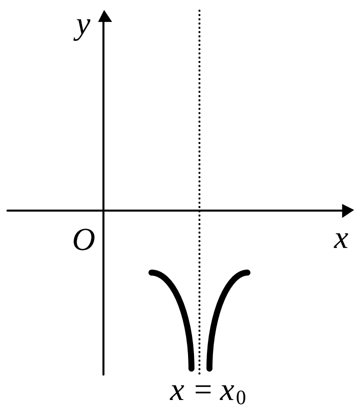


3) *limite infinito quando x tende ad un numero finito comprendente i seguenti due casi*

a) limite destro e sinistro coincidenti

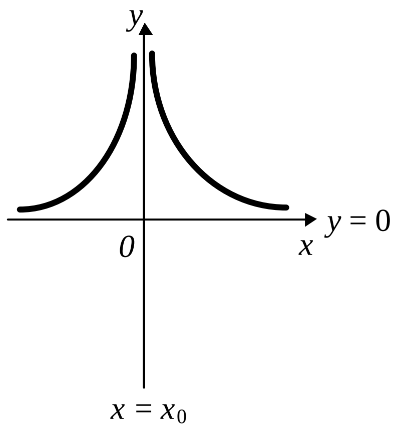
$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = -\infty$$

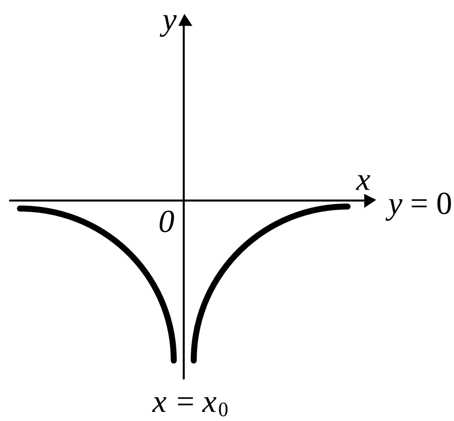




ESEMPIO

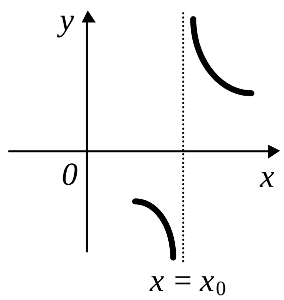
$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{1}{x^2} = +\infty \qquad o \qquad \lim_{x \to 0^{\pm}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$$





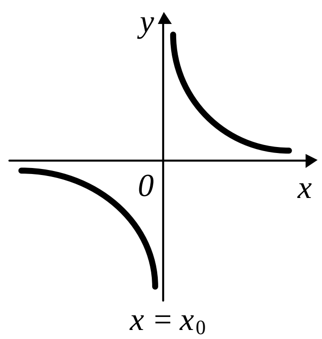
b) limite destro e sinistro differenti

b_1) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$

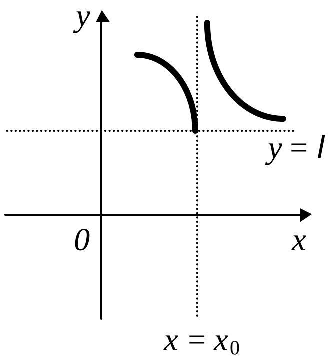


ESEMPIO

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

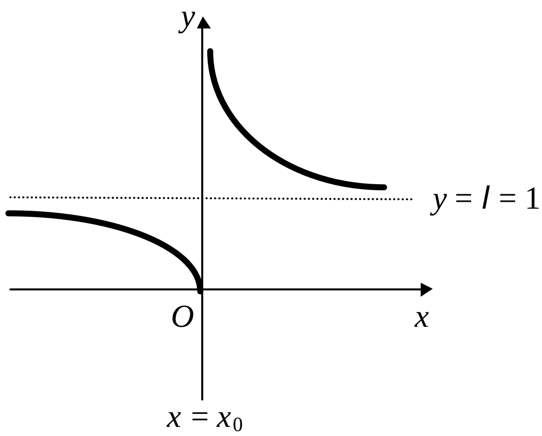


$b_2)\ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$



ESEMPIO

$\lim_{x \to 0^+} a^{\frac{1}{x}} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} a^{\frac{1}{x}} = 0$ $a > 1$ $x \neq 0$

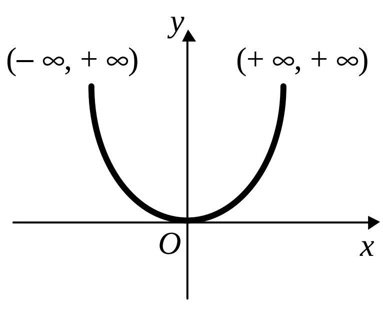


N.B

$\lim_{x \to \pm\infty} a^{\frac{1}{x}} = 1^{\pm}$

4) *limite infinito quando x tende ad infinito comprendente i seguenti quattro casi*

$a)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

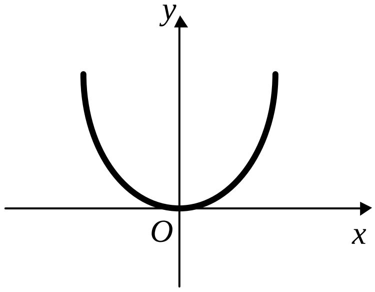


ESEMPIO

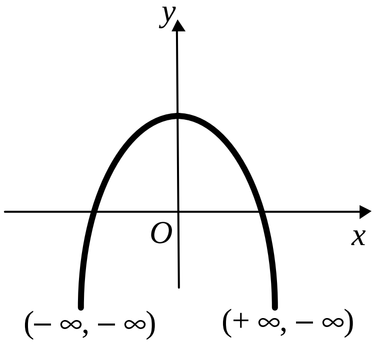
$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

o più in generale

$\lim_{x \to +\infty} x^{2n} = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} x^{2n} = +\infty$



b) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

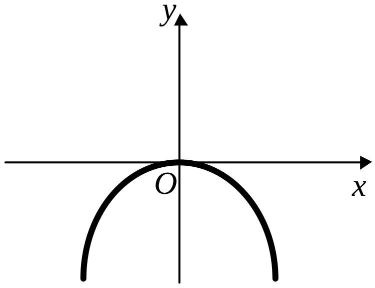


ESEMPIO

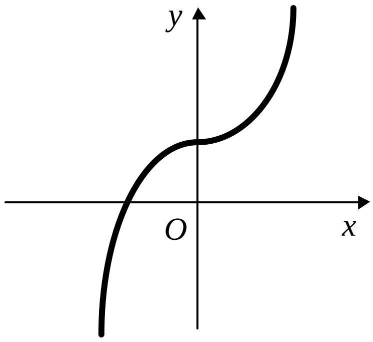
$\lim_{x \to +\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} \left(-x^2\right) = -\infty$

o più in generale

$\lim_{x \to +\infty} \left(-x^{2n}\right) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} \left(-x^{2n}\right) = -\infty$



$c)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

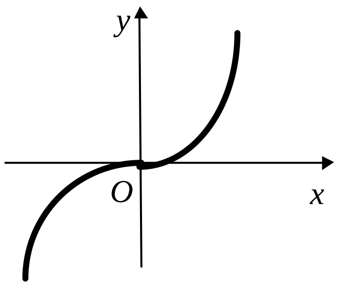


ESEMPIO

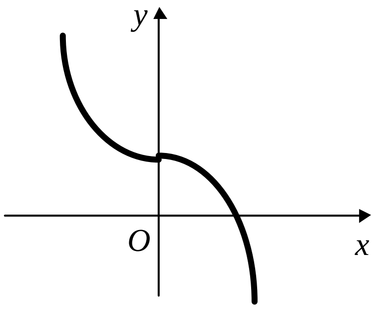
$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

o più in generale

$\lim_{x \to +\infty} x^{2n+1} = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} x^{2n+1} = -\infty$

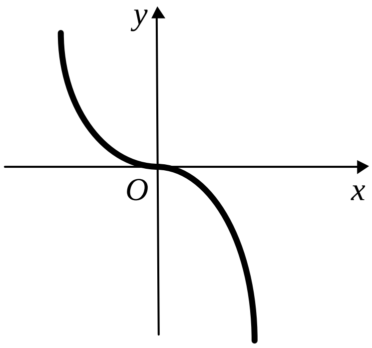


$d)\ \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$



ESEMPIO

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(-x^3\right) = -\infty$ $\qquad$ *e* $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(-x^3\right) = +\infty$



ESEMPIO

Sia

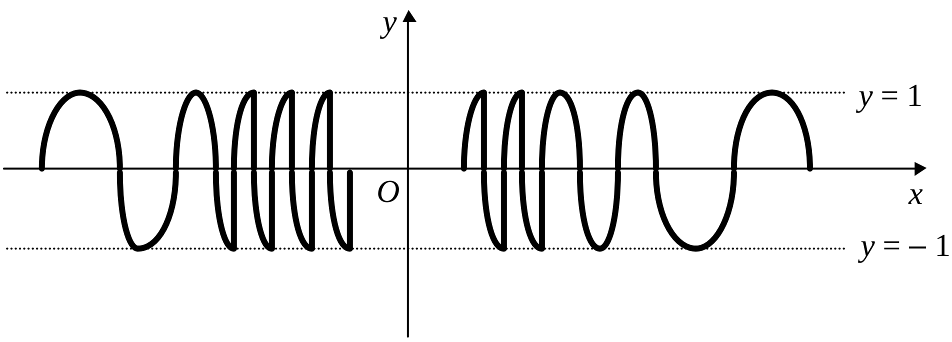
$$f(x) = sin\ \frac{1}{x}$$

Si dimostra che $\lim\limits_{x \to 0} \left(sin\ \frac{1}{x} \right)$ non esiste o meglio oscilla tra -1 e $+1$. Si consideri allora l'insieme

$$E = \left\{ x \in \Re : \ x = \frac{1}{n\pi} \ con\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ su\ E}} \left(sin\ \frac{1}{x} \right) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathbb{N}}} \left(sin\ n\pi \right) = 0$$



In ogni intorno di zero la curva compie infinite oscillazioni che vanno via via infittendosi a mano a mano che ci si avvicina a zero.

2. TEOREMI SUI LIMITI

In questo paragrafo ci proponiamo di enunciare i più importanti teoremi che regolano le operazioni sui limiti di funzione.

Teorema dell'unicità del limite: il limite di una funzione, se esiste, è unico.

Teorema della permanenza del segno: se, al tendere di x ad x_0, la funzione $y = f(x)$ tende al limite $\ell \neq 0$, esiste un intorno di x_0 in cui, escluso tutt'al più x_0, la funzione assume lo stesso segno del suo limite.

3. OPERAZIONI SUI LIMITI

Limite della somma (o differenza) di due (o più) funzioni.

Primo caso

Date due funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_1 \pm \ell_2$$

posto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

Quindi il limite della somma di due o più funzioni è uguale alla somma dei limiti delle singole funzioni.

<u>ESEMPIO</u>

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \qquad e \qquad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Si ha:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 6$$

da cui

$$\lim_{x \to 2} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to 2} f(x) \pm \lim_{x \to 2} g(x) = 0 \pm 6 = \pm 6$$

Secondo caso

Ci si pone adesso il problema se il teorema di cui sopra continui a valere anche quando la x tenda a valori infiniti. La risposta a tale quesito è affermativa.

ESEMPIO

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 \qquad e \qquad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Si ha:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad e \qquad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

da cui

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to \infty} f(x) \pm \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty \pm \infty$$

Terzo caso

Ci si pone ora nel caso generale in cui il valore del limite può essere anche infinito e si afferma che la regola, indipendentemente da dove tende x, vale secondo i risultati riportati nella seguente

TABELLA DELLA SOMMA

$+$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$
ℓ	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**
$-\infty$	$-\infty$	**?**	$-\infty$

$\ell,\ \ell' > 0$

? indica che il teorema generale della somma in questi casi (uno $+\infty$ e l'altro $-\infty$) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso indeterminato o di indecisione*.

ESEMPIO

Siano

$f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 1$ *e* $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 3$

Risulta:

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$

da cui

$\lim_{x \to -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty - \infty$

che, come è evidente dalla tabella, è un caso di indecisione.

Limite del prodotto di due (o più) funzioni.

Date due (o più) funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$ definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_1 \ell_2$$

posto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

cioè il limite del prodotto di due (o più) funzioni è uguale al prodotto dei limiti delle singole funzioni.

ESEMPIO

Siano

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$ *e* $g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

Risulta:

$\lim_{x \to 2} f(x) = -1$ *e* $\lim_{x \to 2} g(x) = 6$

da cui

$\lim_{x \to 2} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) \lim_{x \to 2} g(x) = (-1) \cdot 6 = -6$

Quanto sopra detto si può riassumere nella seguente

TABELLA DEL PRODOTTO

$\bullet$	0	$+\ell'$	$-\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
0	0	0	0	**?**	**?**
$+\ell$	0	$\ell\ell'$	$-\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$-\ell$	0	$-\ell\ell'$	$\ell\ell'$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	**?**	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	**?**	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\ell,\ \ell' > 0$

? indica che il teorema generale del prodotto in questi casi (uno 0 e l'altro $+\infty$ o $-\infty$) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso di indecisione o di indeterminazione*.

ESEMPIO

Siano

$$f(x) = x^3 - x \qquad e \qquad g(x) = \frac{2x^3+3}{3x^2}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$

Segue che:

$$\lim_{x\to 0} \left[f(x)g(x) \right] = 0 \cdot (+\infty)$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

Limite del quoziente di due funzioni

Date due funzioni $y = f(x)$ ed $y = g(x)$, con $g(x) \neq 0$, definite rispettivamente sugli insiemi F e G ed indicato con x_0 un punto di accumulazione, appartenente o no all'insieme $F \cap G$, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

posto

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad e \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2 \neq 0$$

cioè il limite del quoziente di due funzioni è uguale al rapporto tra i limiti delle singole funzioni considerate.

<u>ESEMPIO</u>

Siano

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5 \qquad e \qquad g(x) = x^4 - 3x^2 + 2$$

Risulta:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -1 \qquad e \qquad \lim_{x \to 2} g(x) = 6$$

Segue che:

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = -\frac{1}{6}$$

Quanto sopra enunciato si può riassumere nella seguente

TABELLA DEL QUOZIENTE

$\div$	0	$+\ell'$	$-\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
0	**?**	0	0	0	0
$+\ell$	$+\infty$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$-\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$-\ell$	$-\infty$	$-\frac{\ell}{\ell'}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**?**	**?**
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**?**	**?**

? indica che il teorema generale del quoziente in questi casi (entrambi 0 oppure entrambi ∞) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso di indecisione o di indeterminazione*.

ESEMPI

1) Siano

$f(x) = x^3 + x - 2 \qquad e \qquad g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Risulta:

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x \to 1} g(x) = 0$

Segue che:

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{0}{0}$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

2) Siano

$f(x) = x^3 + x \qquad e \qquad g(x) = x^4 - 3x^2 + 1$

Risulta:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Segue che:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{+\infty}{+\infty}$$

che, come è facile verificare confrontando la tabella, è una forma di indecisione.

Limite della potenza di una funzione

Se, al tendere di x ad x_0, la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero finito $\ell \neq 0$, indicando con n un intero qualsiasi, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^n = \ell^n$$

cioè il limite di una potenza è uguale alla potenza del limite.

ESEMPIO

Siano

$f(x) = \left(3x^2 - 5x\right)$ $\quad e \quad$ $n = 3$

Risulta:

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ $\quad e \quad$ $\lim_{x \to 2} [f(x)]^3 = 2^3 = 8$

Quanto detto si può riassumere nella seguente

TABELLA DELL'ELEVAMENTO A POTENZA

$\lim_{x \to \begin{cases} x_0 \\ \pm\infty \\ \infty \end{cases}} f(x)$	$\lim_{x \to \begin{cases} x_0 \\ \pm\infty \\ \infty \end{cases}} g(x)$	$\lim_{x \to \begin{cases} x_0 \\ \pm\infty \\ \infty \end{cases}} [f(x)]^{g(x)}$
ℓ	ℓ'	$\ell^{\ell'}$
0	0	**?**
ℓ	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$
ℓ	$-\infty$	0
$-\infty$	ℓ'	$\begin{cases} +\infty & \text{se } \ell' \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } \ell' \text{ è dispari} \end{cases}$
$\pm\infty$	0	**?**
1	$\pm\infty$	**?**
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

? indica che il teorema generale della potenza in questi casi (uno 1 e l'altro $\pm\infty$ oppure entrambi 0 oppure uno $\pm\infty$ e l'altro 0) non porta a conclusione. Si suole esprimere tale circostanza dicendo che si è in un *caso di indecisione o di indeterminazione*.

ESEMPI

1) Siano

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right) \qquad e \qquad g(x) = x^2$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

da cui si ha

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^{g(x)} = 1^{+\infty}$$

che è una forma indeterminata.

2) Siano

$$f(x) = \left(3x^3+2x^2+x\right) \qquad e \qquad g(x) = x$$

Risulta:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \qquad e \qquad \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

da cui segue

$$\lim_{x\to 0} [f(x)]^{g(x)} = 0^0$$

che è un'altra forma di indecisione.

3) Siano

$$f(x) = \left(3x^2+2\right) \qquad e \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad e \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x)]^{g(x)} = (+\infty)^0$$

che è ancora un caso di indecisione.

Limite della radice n-esima di una funzione

Se, al tendere di x ad x_0, la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero ℓ (finito o infinito), indicando con n un intero positivo, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

con la sola ipotesi restrittiva che x_0, punto di accumulazione dell'insieme di definizione della y, deve essere anche un punto di accumulazione dell'insieme di definizione della $\sqrt[n]{f(x)}$. Quindi il limite della radice n-esima di una data funzione è uguale alla radice n-esima del limite della funzione stessa.

Osservazione: la tabella della radice si può ricavare da quella dell'elevamento a potenza ricordando che

$$\sqrt[n]{[f(x)]^m} = [f(x)]^{\frac{m}{n}}$$

con m, n interi positivi.

ESEMPI

1) Sia

$f(x) = 3x^2 - 2x$ *e* $n = 3$

Allora

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \to 2} \sqrt[3]{3x^2 - 2x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

2) Sia

$f(x) = 3x^2 - 2x$ *e* $n = 3$

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{3x^2 - 2x} = +\infty$$

3) Sia

$f(x) = 3x^3 - 2x$ *e* $n = 3$

Allora

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{3x^3 - 2x} = -\infty$$

Limite di funzioni trascendenti composte

𝔸) Se, al tendere di x ad x_0, la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero ℓ (finito o infinito), indicando con a un intero positivo diverso da 1, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} a^{f(x)} = a^{\ell}$$

<u>ESEMPIO</u>

Sia

$a = 2$ *e* $f(x) = 3x^2 - 5x$

Quindi

$$\lim_{x \to 2} a^{f(x)} = \lim_{x \to 2} 2^{\left(3x^2 - 5x\right)} = 2^{\lim\limits_{x \to 2} \left(3x^2 - 5x\right)} = 2^2 = 4$$

𝔹) Se, al tendere di x ad x_0, la funzione $y = f(x)$ tende ad un numero $\ell > 0$, indicando con a un intero positivo diverso da 1, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \log_a f(x) = \log_a \ell$$

<u>ESEMPIO</u>

Sia

$f(x) = 3x^2 - x$ *e* $a = 10$

Allora

$$\lim_{x \to 2} \log_a f(x) = \lim_{x \to 2} \log_{10} \left(3x^2 - x\right) = \log_{10} \left[\lim_{x \to 2} \left(3x^2 - x\right)\right] = \log_{10} 10 = 1$$

Analizziamo adesso più da vicino quelle che abbiamo già definito come

FORME INDETERMINATE O DI INDECISIONE

1) $\boxed{+\infty - \infty}$ ***e*** $\boxed{-\infty + \infty}$

In questo caso è sufficiente calcolare il limite del solo termine di grado massimo.

ESEMPI

$a)\ f(x) = -3x^3 + 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(-3x^3\right) = +\infty$

$b)\ f(x) = 3x^3 - 5x + 4 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(3x^3\right) = -\infty$

$c)\ f(x) = 3x^2 - 5x + 2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(3x^2\right) = +\infty$

$d)\ f(x) = 2x^5 - x - 7 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2x^5\right) = +\infty$

2) $\boxed{0 \times \infty}$

In tal caso si elimina l'indeterminazione mediante una semplice operazione di scomposizione in fattori.

ESEMPIO

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 \qquad e \qquad g(x) = \frac{x+3}{x^2 - x} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x \to 1} \left(x^2 - 4x + 3\right) \lim_{x \to 1} \left(\frac{x+3}{x^2 - x}\right) = 0 \times \infty$$

Scomponendo si ottiene:

$$f(x) = (x-1)(x-3) \qquad e \qquad g(x) = \frac{x+3}{x(x-1)} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1} \left[f(x)g(x)\right] = \lim_{x \to 1} \left[(x-1)(x-3)\frac{x+3}{x(x-1)}\right] = \lim_{x \to 1} \left[(x-3)\frac{x+3}{x}\right] = -8$$

3) $$\boxed{\frac{0}{0}}$$

In questo caso si procede utilizzando il solito metodo della scomposizione in fattori oppure, se ciò non è possibile, la *regola di De L'Hopital* (cfr. capitolo sulle derivate).

ESEMPIO

$f(x) = x^2 + 3x$ $\qquad e \qquad$ $g(x) = x^3 - x$ $\qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 0}\left(x^2 + 3x\right)}{\lim_{x\to 0}\left(x^3 - x\right)} = \frac{0}{0}$$

Scomponendo si ha:

$f(x) = x\left(x+3\right)$ $\qquad e \qquad$ $g(x) = x\left(x^2 - 1\right)$ $\qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(x+3\right)}{x\left(x^2-1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x^2-1} = -3$$

4) $$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$$

Per tale forma di indecisione occorre distinguere i seguenti tre casi:

a) il numeratore ed il denominatore hanno lo stesso grado; il limite è finito ed è uguale al rapporto tra i coefficienti dei termini di grado massimo

b) il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore; il limite è infinito ($\pm\infty$ a seconda dei casi)

g) il grado del numeratore è minore di quello del denominatore; il limite è finito e vale sempre zero, indipendentemente dal caso in cui ci si trova

ESEMPI

a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4$ $\qquad e \qquad$ $g(x) = 2x^3 + 5$ $\qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3 + 3x^2 - 4}{2x^3 + 5} = \frac{4}{2} = 2$$

$b)\ f(x) = x^3 + 3x + 5 \qquad e \qquad g(x) = 2x^2 + 7 \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x + 5}{2x^2 + 7} = +\infty$$

$c)\ f(x) = 3x + 2 \qquad e \qquad g(x) = x^2 - 5x + 7 \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 2}{x^2 - 5x + 7} = 0$$

5) $\boxed{0^0}$

Tale forma indeterminata ricorre nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $[f(x)]^{g(x)}$. Per eliminare l'indeterminazione, quindi, si utilizza l'identità logaritmica $a = e^{\log a}$ che ci consente di scrivere:

$$[f(x)]^{g(x)} = e^{g(x)\ \log f(x)}$$

<u>ESEMPIO</u>

$f(x) = x \qquad e \qquad g(x) = x \qquad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 0^+} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \log x} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} (x \log x)}$$

Risulta:

$$\lim_{x \to 0^+} (x \log x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \right) = 0 \qquad \text{(cfr. capitolo sulle derivate)}$$

Dunque:

$$\lim_{x \to 0^+} [f(x)]^{g(x)} = e^0 = 1$$

6) $\boxed{1^{\infty}}$

Anche questa forma di indecisione si presenta nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $\left[f(x)\right]^{g(x)}$. Si procede, pertanto, come al punto **5)**.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+2x+1} \qquad e \qquad g(x) = x \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x\,\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\,\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)\right]}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\,\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log\left(\frac{x^2+3}{x^2+2x+1}\right)}{\frac{1}{x}}\right] = 0 \qquad \text{(cfr. capitolo sulle derivate)}$$

Dunque:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^0 = 1$$

7) $\boxed{\infty^0}$

Come le precedenti anche tale forma di indeterminazione ricorre nel calcolo dei limiti di funzioni del tipo $\left[f(x)\right]^{g(x)}$. Pertanto si procede come ai punti **5)** e **6)**.

ESEMPIO

$$f(x) = x^2+5x+3 \qquad e \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+5x+3\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\,\log\left(x^2+5x+3\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\,\log\left(x^2+5x+3\right)\right]}$$

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\,\log\left(x^2+5x+3\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log\left(x^2+5x+3\right)}{x}\right] = 0$$

Dunque:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\right]^{g(x)} = e^0 = 1$$

Osservazione: per le funzioni trascendenti del tipo a^x $(a > 1)$, x^n $(n > 0)$, $\log_a x$ $(a > 1)$ vale la seguente *gerarchia* tra gli infiniti:

esponenziale-elevamento a potenza-logaritmica

cioè una funzione esponenziale tende all'infinito più velocemente rispetto ad una potenza che, a sua volta, tende all'infinito più velocemente rispetto ad una funzione logaritmica.

ESEMPI

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2} \cong \lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{x^3} \cong \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^3} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\log x}{4^x} \cong \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{4^x} = 0$

Riportiamo ora qui di seguito alcuni

LIMITI NOTEVOLI

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ dove con e si indica il numero di *Neper*, compreso tra 2 e 3

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

ESERCIZI PROPOSTI

Calcolare i seguenti limiti immediati (1-38) *dopo aver analizzato gli esempi a*)-*i*):

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-3x+5\right) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 - \lim\limits_{x\to 1} 3x + \lim\limits_{x\to 1} 5 = 1^2 - 3\cdot 1 + 5 = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x\right)\left(x+1\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-5x\right)\lim\limits_{x\to 2}\left(x+1\right) = 2\cdot 3 = 6$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4-x^2}{3+x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3}\left(4-x^2\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(3+x\right)} = -\dfrac{5}{6}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3+2x^2-x-2} = \dfrac{1+3+3+1}{1+2-1-2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x^2-3\right)^4 = \left(-3\right)^4 = 81$

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2-2x+3\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^2\right) = +\infty$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3-x^2+x+1\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(x^3\right) = \pm\infty$

h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{x}-2}{\dfrac{2}{x}-1} = \dfrac{0-0-2}{0-1} = \dfrac{-2}{-1} = 2$

i) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{6}}\dfrac{sin2x}{tg3x} = \dfrac{sin\dfrac{p}{3}}{tg\dfrac{p}{2}} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{tg\dfrac{p}{2}} = 0$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^2-2x+2\right)$; $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^3-x^2+2\right)$ [3; 0]

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-7x+10\right)$; $\lim\limits_{x\to a}\left(x^2+ax+a^2\right)$ [0; $3\,a^2$]

3) $\lim\limits_{x\to 4}\left(2x+\sqrt{x}-1\right)$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3-2x+5\right)$ [9; 9]

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-1}{2x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-6}{x+2}$ [2; 0]

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x+2}{3x}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+2x}{x+3}$ $\left[1;\ -\dfrac{1}{2}\right]$

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6}{x^3-9}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x-1}{5x}$	[2; 1]
7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x-6}{5x}$;	$\lim\limits_{x\to \pm\infty}\dfrac{1}{x+1}$	[0; 0]
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x-1}$;	$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x+2}{x-2}$	$\left[-2;\ -\dfrac{5}{3}\right]$
9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-3}{2x}$;	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x-x^2}{1-x^2}$	$[0; \infty]$
10) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+4}{3x-6}$:	$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$	$\left[\dfrac{1}{6};\ 2\sqrt[4]{2}\right]$
11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{x}$	$\left[0;\ \dfrac{\sqrt{2}+2}{2}\right]$
12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-4}{x^2-1}$;	$\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2+3}{x^2-3}$	$[-\infty; +\infty]$
13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x-1}{x-3}$;	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$	$[+\infty; 0]$
14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3+3x}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}}$	[0; 2]
15) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{4}}\left(\sin x-\cos x\right)$;	$\lim\limits_{x\to \frac{p}{4}}\left(\sin x+\cos x\right)$	$\left[0;\ \sqrt{2}\right]$
16) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x-3}+\sqrt{x+5}\right)$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+\cos x}{\cos x}$	[4; 3]
17) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\sqrt{2-2x}-\sqrt{10+x}\right)$;	$\lim\limits_{x\to 2p}\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$	$\left[-1;\ \dfrac{1}{2}\right]$
18) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}}{2x}$;	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$	$\left[\dfrac{3}{4};\ \dfrac{10}{3}\right]$
19) $\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to p}\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$	$[0; -1]$
20) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{p}{2}\right)^+} tgx$;	$\lim\limits_{x\to \left(\frac{p}{2}\right)^-} tgx$	$[+\infty; -\infty]$
21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx+5}{x+1}$;	$\lim\limits_{x\to \left(\frac{p}{2}\right)^+}\left(x+tgx\right)$	$[5; +\infty]$

22) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{3}} \left(sin2x-\cos x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{6}} \left(\cos 4x+sinx\right)$	$\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ 0\right]$
23) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{3}} \frac{\sqrt{3}\,sinx-2\cos x}{x}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \frac{3sinx+1}{\cos x}$	$\left[\frac{3}{2p};\ +\infty\right]$
24) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{sinx-\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to-\infty} \left(3^x+2\,e^x\right)$	$[i;\ 0]$
25) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}} e^{sinx-\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(2\,e^x+\log x\right)$	$[1;\ \infty]$
26) $\lim\limits_{x\to p} \ln(sinx)$;	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \left(3x+tgx\right)$	$[-\infty;\ +\infty]$
27) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(4^{-x}+5\,e^{-x}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$	$[\infty;\ 1]$
28) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{2+\log x}-2\,e^x\right)$;	$\lim\limits_{x\to 2} e^{\ln x}$	$[-\infty;\ 2]$
29) $\lim\limits_{x\to e} \ln x$;	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \frac{3+2\cos x}{5tgx}$	$[1;\ 0]$
30) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\cos x}{\sqrt{2+x}}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \ln\frac{x}{\cos x}$	$[0;\ -\infty]$
31) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(3+5x)}{4\log x}$;	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \log(sinx)$	$[0;\ 0]$
32) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3+\log 2x}{\log(2+3x)}$;	$\lim\limits_{x\to a} \frac{\log x}{\log(x-a)}$	$[-\infty;\ 0]$
33) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-x+3}{\log\frac{x}{2}}$;	$\lim\limits_{x\to 2} x^{\log\left(x^2-3\right)}$	$[\infty;\ 1]$
34) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1+e^x}$;	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\log x}$	$[-\infty;\ 0]$
35) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\log x\right)$;	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\log(1-x)}{2^x}$	$[+\infty;\ -\infty]$
36) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(sin\frac{1}{\log x}\right)$;	$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\log sinx\right)$	$[0;\ -\infty]$
37) $\lim\limits_{x\to 2} \log_2(3-x)$;	$\lim\limits_{x\to -2^+} \log(x+2)$	$[0;\ -\infty]$

38) $\lim_{x\to 1} \dfrac{2+\log x}{1+2\log x}$; $\lim_{x\to 1} \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ [2; 0]

Calcolare i seguenti limiti di funzioni razionali fratte che si presentano sotto la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ (1-35):

a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{x^3-27} = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-4)(x-3)}{(x-3)(x^2+3x+9)} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-4}{x^2+3x+9} = -\dfrac{1}{27}$

b) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x-2} = +\infty$

c) $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x+2} = \lim_{x\to -2} \dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2} = \lim_{x\to -2} (x^2-2x+4) = 12$

d) $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^3-64} = \lim_{x\to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x^3-64)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{x}+2)} =$

$= \lim_{x\to 4} \dfrac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{1}{192}$

e) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+3}} = \lim_{x\to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+3})}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x+3})} = \lim_{x\to -3} \dfrac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+3})}{x+3} =$

$= \lim_{x\to -3} \left[(x-3)(\sqrt{x+3})\right] = 0$

f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{sinx}{tgx} = \lim_{x\to 0} \dfrac{sinx}{\dfrac{sinx}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \dfrac{sinx\ \cos x}{sinx} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1$

g) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = \lim_{x\to a} \dfrac{\dfrac{(\sqrt{x-a})(\sqrt{x-a})}{\sqrt{x-a}}}{\dfrac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim_{x\to a} \dfrac{\dfrac{x-a}{\sqrt{x-a}}}{\dfrac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}} = \lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x-a}} = \infty$

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2-1}$ [+ ∞; 1]

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x^2-2ax+a^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x^2+2}{x^3-4x+3}$ [+ ∞; 2]

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x^4-3x^3-4x^2+12x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-18}{3x-9}$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ 4\right]$

4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3-16}{2-x}$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{a^3-x^3}$ $\left[-24;\ -\dfrac{2}{3a}\right]$

5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^4-2x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to m}\dfrac{x^3-m^3}{5x^2-4mx-m^2}$ $\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{m}{2}\right]$

6) $\lim\limits_{m\to 1}\dfrac{m^2+5m-6}{m^2+m-2}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+8x+15}$ $\left[\dfrac{7}{3};\ 10\right]$

7) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4x+4}$ [+ ∞; 0]

8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-3)^2-4}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{27-x^3}$ $\left[\dfrac{2}{5};\ -\dfrac{2}{9}\right]$

9) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+7x-2}{x^3-2x^2+2x-4}$; $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{b-x}{x^3+bx^2-b^2x-b^3}$ $\left[-\dfrac{1}{6};\ -\dfrac{1}{4b^2}\right]$

10) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-2x^3-4x^2+10x-5}{x^4-3x^3-4x^2+13x-7}$ $\left[\dfrac{3}{5};\ \dfrac{4}{7}\right]$

11) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+7x+2}{3x^2+2x-1}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+7x^2-9x-63}{x^4-6x^2-27}$ $\left[\dfrac{3}{4};\ \dfrac{1}{3}\right]$

12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^3-6x^2+9x-4}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3+2x^2-x-2}$ $\left[-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right]$

13) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{2x^2-3x-9}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ $\left[\dfrac{8}{9};\ \dfrac{3}{2}\right]$

14) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^3+7x^2-4x-6}$ $\left[15;\ -\dfrac{1}{19}\right]$

15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2-2x}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+2x^2-4x-8}{x^3+3x^2-4}$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{4}{3}\right]$

16) $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}} \dfrac{5x^2 - 9x - 2}{10x^2 - 13x - 3}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3x}{2} + 1}{x^4 - 7x^2 + 8x - 4}$ $\left[\dfrac{11}{17};\ \dfrac{1}{24}\right]$

17) $\lim\limits_{x \to \frac{3}{2}} \dfrac{3 - 2x}{4x^2 - 8x + 3}$; $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{3x^3 + 6x^2 - x - 2}$ $\left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{11}\right]$

18) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^4 + 16x^2 - 19x + 5}{2x^2 - 5x + 2}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x^3 - 13x^2 + 2x + 3}{x^3 - 10x + 3}$ $\left[-\dfrac{1}{3};\ \dfrac{32}{17}\right]$

19) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 6x + 5}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 2x - 3}$ $\left[0;\ \dfrac{5}{4}\right]$

20) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 3x + 2}$; $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 + 5x - 3}$ $\left[5;\ \dfrac{5}{7}\right]$

21) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x + 1}$ $\left[\dfrac{1}{2};\ -\infty\right]$

22) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2 - 1}$ $\left[\dfrac{1}{5};\ \dfrac{3}{2}\right]$

23) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x + 9}$ $[0;\ +\infty]$

24) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{2x^3 - x^2 - 4x + 3}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$ $\left[\dfrac{3}{5};\ \dfrac{3}{4}\right]$

25) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$ $\left[\dfrac{3}{2};\ 0\right]$

26) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 10x + 21}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ $\left[\dfrac{1}{2};\ -\infty\right]$

27) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ $[3;\ 4]$

28) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{5x^2 + 2x - 7}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^4 - 1}$ $\left[+\infty;\ \dfrac{3}{4}\right]$

29) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$; $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ $\left[\dfrac{14}{3};\ 7\right]$

30) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{1 - x} - 2}$; $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 1} - \sqrt{2}}{\sqrt{x + 8} - 3}$ $\left[-\infty;\ \dfrac{3}{\sqrt{2}}\right]$

31) $\lim_{x\to a} \dfrac{2\sqrt{x}-2\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$; $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{-x+6}-2}{x-2}$ $\left[0;\ -\dfrac{1}{4}\right]$

32) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$; $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}+x-7}{\sqrt{x-4}}$ $\left[\dfrac{1}{3};\ 0\right]$

33) $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}$; $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2x-1}}$ $[-\infty;\ 0]$

34) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x-2}}$; $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-3}$ $[0;\ +\infty]$

35) $\lim_{x\to 0^+} \left[\log\left(\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}\right)\right]$; $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-e^x}{1-e^x}$ $[-\infty;\ 1]$

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni razionali fratte che si presentano sotto la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$ (1-15):

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x+4}{5x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{3x}{x}+\dfrac{4}{x}}{\dfrac{5x}{x}-\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\dfrac{4}{x}}{5-\dfrac{1}{x}} = \frac{3+0}{5-0} = \frac{3}{5}$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5x+3}{3x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^2}-\dfrac{5x}{x^2}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{3x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}} = \frac{2-0+0}{0-0} = \infty$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-5}{3x^3-2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2x^2}{x^3}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{3x^3}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{x}-\dfrac{5}{x^3}}{3-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{0-0}{3-0+0} = 0$$

$$d)\ \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}{3\sqrt{2x}+\sqrt[4]{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}+2x^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt{2}\,x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}+2\,\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}}{3\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+2x^{-\frac{1}{6}}}{3\sqrt{2}+x^{-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x^{\frac{1}{6}}}}{3\sqrt{2}+\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{\sqrt[6]{x}}}{3\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}} = \frac{1+0}{3\sqrt{2}+0} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$e)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{\frac{1}{x-2}+\sqrt{\frac{1}{x^2-4}}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3-8}}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{\sqrt{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x^2+2x+4}}} = \lim_{x\to 2}\frac{\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}}}{\frac{1}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x^2+2x+4}}} =$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x-2}\,\sqrt{x+2}}\right)\left(\sqrt{x-2}\,\sqrt{x^2+2x+4}\right)\right] = \lim_{x\to 2}\left[\left(\frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}}\right)\left(\sqrt{x^2+2x+4}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2+2}+1}{\sqrt{2+2}}\right)\left(\sqrt{4+4+4}\right) = \frac{3\sqrt{12}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$f)\ \lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{tgx}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{p}{2}}\frac{\frac{sinx}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{p}{2}}\left[\left(\frac{sinx}{\cos x}\right)(\cos x)\right] = \lim_{x\to\frac{p}{2}} sinx = 1$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{5x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{5x-4}$	$\left[\dfrac{1}{5};\ \dfrac{3}{5}\right]$
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{4x-3}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-x^2}{3x^2-5x}$	$\left[\dfrac{1}{4};\ -\dfrac{1}{3}\right]$
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-1}{4x+2}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{3x^2-5x}$	$[\infty;\ 0]$
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-6x+2}{3x^2+5x+1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+6}{6x-1}$	$\left[\dfrac{4}{3};\ \infty\right]$
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+6}{2x^2-3x+2}$	$[\infty;\ 2]$

6) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-4x+1}{3+7x^2+2x}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{1+3x}{3+2x+4x^2}$ $\qquad \left[\dfrac{3}{7};\ 0\right]$

7) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-x+5}{2x^2+4x+1}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+2x+5}{2x^3-3x^2+9}$ $\qquad \left[\dfrac{3}{2};\ 0\right]$

8) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^5+4x^3+9}{x^3-2x+5}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^3-4x^2+9}{4x^3+x-2}$ $\qquad [\infty;\ 2]$

9) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x^2-4}}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-1}{x-2x^2}$ $\qquad \left[4;\ -\dfrac{5}{2}\right]$

10) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^2+5}}$; $\qquad \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}-3}{\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}+8}$ $\qquad \left[0;\ \dfrac{1}{4}\right]$

11) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^2+x+5}{x^7-2x^3+4}$; $\qquad \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{5x^3+4x+3}}$ $\qquad \left[0;\ \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}}\right]$

12) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x-1+3x^2}{2x^2-3x+4}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{2+\sqrt{x}}$ $\qquad \left[\dfrac{3}{2};\ 1\right]$

13) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{9x-6}{4x+3}}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{25x+2}{49x-1}}$ $\qquad \left[\dfrac{3}{2};\ \dfrac{5}{7}\right]$

14) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{3x-1}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{\sqrt{3+x^2}}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{3};\ 2\right]$

15) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}$; $\qquad \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+2x^2}}$ $\qquad \left[\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{2}\right]$

Calcolare i limiti delle seguenti funzioni che si presentano sotto la forma indeterminata $+\infty-\infty$ (1-13):

$$a)\ \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-2-\sqrt{x^2-2x-3}\right)\left(x-2+\sqrt{x^2-2x-3}\right)}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4-x^2+2x+3}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-2x+7}{x-2+\sqrt{x^2-2x-3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2x}{x}+\frac{7}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}} = \frac{-2+0}{1-0+\sqrt{1-0-0}} = -\frac{2}{1+1} = -1$$

$$c)\ \lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x\,(x+3)}-\sqrt{x^2-2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x\,(x+3)}-\sqrt{x^2-2}\right]\left[\sqrt{x\,(x+3)}+\sqrt{x^2-2}\right]}{\sqrt{x\,(x+3)}+\sqrt{x^2-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x\,(x+3)-\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x\,(x+3)}+\sqrt{x^2-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

$$d)\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{(x-1)\,(x+1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x+1-x-2}{(x-1)\,(x+1)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x^2-1}\right) = -\infty$$

$$e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos^2 x}-\frac{1}{1-\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-1-\cos x}{(1-\cos x)\,(1+\cos x)}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\cos x}{1-\cos^2 x}\right) = -\infty$$

$$f)\ \lim_{x\to p}\left(\frac{1}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{sinx}\right) = \lim_{x\to p}\frac{sinx+\cos x\,(1+\cos x)}{sinx\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to p}\frac{sinx+\cos x+\cos^2 x}{sinx\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to p}\frac{sinx+\cos x+1-sin^2 x}{sinx\,(1+\cos x)} = \lim_{x\to p}\frac{sinx\,(1-sinx)+(1+\cos x)}{sinx\,(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to p}\left[\frac{sinx\,(1-sinx)}{sinx\,(1+\cos x)}+\frac{1+\cos x}{sinx\,(1+\cos x)}\right] = \lim_{x\to p}\left(\frac{1-sinx}{1+\cos x}+\frac{1}{sinx}\right) = \frac{1-0}{1-1}+\frac{1}{0} = \infty$$

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-x+3\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-x+4+\sqrt{x+2}\right)$	$[-\infty;-\infty]$
2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)$	$\left[-\frac{5}{2};\ 0\right]$
3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x-\sqrt{4x^2+x}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-6x+9}-x\right)$	$\left[-\frac{1}{4};\ -3\right]$
4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x-8}-2x-1\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(4x+1-\sqrt{16x^2+8x-2}\right)$	$\left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+3-\sqrt{2(x-1)(2x-3)}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sqrt{2}\,x-\sqrt{8x^2+2x+1}\right)$	$\left[\frac{11}{1};\ -\frac{\sqrt{2}}{4}\right]$
6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-16}+2-x\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(2x+3-\sqrt{4x^2+12x+1}\right)$	$[1;\ 0]$
7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+1}-x^2+1\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[2x^2-\sqrt{\left(2x^2+\frac{1}{2}\right)^2}\right]$	$\left[1;\ -\frac{1}{2}\right]$
8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{3(x-1)(x-2)}-\sqrt{3x^2-20}\right]$	$\left[0;\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$
9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2}\right)$	$\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+5x+4}\right)$	$\left[0;\ -\frac{3}{2}\right]$
11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2-3x+7}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right)$	$[3;\ 0]$
12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-4}-\sqrt{x^4+3}\right)$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\log(25x+3)-\log(5x+2)\right]$	$[0;\ \log 5]$
13) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\log\left(x^2+5x-6\right)-\log\left(x^2-1\right)\right]$;	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\log x-\log sin2x\right]$	$\left[0;\ \log\frac{1}{2}\right]$

Calcolare i limiti delle funzioni che si presentano sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ (1-7):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left[(x-2)\,\dfrac{1}{x^3-8}\right] = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x^2+2x+4} = \dfrac{1}{12}$

$$b)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}\ \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{x}}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{x}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left[(x+sinx)\ \frac{1}{2x\ \cos x}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x+sinx}{2x\ \cos x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{2x\ \cos x}+\frac{sinx}{2x\ \cos x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2\ \cos x}+\frac{1}{2\ \cos x}\ \frac{sinx}{x}\right) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

1) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(x-3)\ \sqrt{\dfrac{1}{x^2-9}}\right];$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ \sqrt{\dfrac{1}{x^2-5x}}\right)$	$\left[0;\ \dfrac{1}{2}\right]$
2) $\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\ \sqrt{\dfrac{1}{2x^2+3x+1}}\right];$	$\lim\limits_{x\to -1}\left[(x+1)\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)\right]$	$\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ 2\right]$
3) $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x^3-1)\ \dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right];$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}}\ \sqrt{x^2+2}\right)$	$[6;\ 1]$
4) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}}[(1-sinx)\ tgx]$	$\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\ \dfrac{1}{tgx}\right]$	$[0;\ 0]$
5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\ \dfrac{\cos^2 x}{sin^2x}\right);$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(3\ tgx\ \dfrac{1}{x}\right)$	$[0;\ 3]$
6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(tg2x\ \dfrac{1}{tgx}\right);$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\ \dfrac{1}{sin^2x}\right)$	$[2;\ 0]$
7) $\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\left[(1-tgx)\ tg2x\right];$	$\lim\limits_{x\to\frac{p}{4}}\left(\dfrac{1}{sinx-\cos x}\ \cos 2x\right)$	$\left[1;\ -\sqrt{2}\right]$

Calcolare i seguenti limiti di funzioni trigonometriche ricordando che $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$:

1)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	$[n;\ 3]$
2)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin hx}$	$\left[2;\ \dfrac{k}{h}\right]$
3)	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x-a)}{x^2-a^2}$;	$\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\sin(x-p)}{x-p}$	$\left[\dfrac{1}{2a};\ 1\right]$
4)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{tg x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 4x}$	$\left[1;\ \dfrac{5}{4}\right]$
5)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg x}{x}$;	$\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{\cos^2 x}{x+\dfrac{p}{2}}$	$[1;\ 0]$
6)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{tg 2x}$	$\left[5;\ \dfrac{5}{2}\right]$
7)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$	$\left[\dfrac{1}{2};\ -\dfrac{1}{2}\right]$
8)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\cos x-1}$	$[2;\ -2]$
9)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg 5x}{tg^2 x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-tg x}{x^3}$	$\left[\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right]$
10)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3-3\cos^3 x}{2\sin^2 x}$	$\left[0;\ \dfrac{9}{4}\right]$
11)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{2x\cos px}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$	$\left[\dfrac{p}{2};\ \infty\right]$
12)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cos x-2\sin x}{4\sin x+2x\cos x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4\sin x+3x-x^2}{5\sin x-x}$	$\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{7}{4}\right]$
13)	$\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$	$\left[\infty;\ \sqrt{2}\right]$
14)	$\lim\limits_{x\to \frac{p}{2}}\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{\sin^2 x}$	$\left[\infty;\ \dfrac{1}{2}\right]$
15)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x-2x\cos x-2x^2-5x^3}{4\sin x+3x\cos x+x^2-x^3}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3-\cos x)(1-\cos x)}{x\sin x}$	$\left[\dfrac{1}{7};\ 1\right]$

Dire a quali forme di indecisione conducono i seguenti limiti e quindi calcolarli:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a-\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}$; $\qquad \lim\limits_{x\to -b} \dfrac{x+b}{x+\sqrt{2x^2-b^2}}$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{2a};\ -1\right]$

2) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{x}}{3-x}$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{a}}{2a};\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right]$

3) $\lim\limits_{x\to -b} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{b}}{x+b}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+x}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt[3]{b}}{b};\ -\dfrac{1}{2}\right]$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3}\right)$ $\qquad [-4;\ 0]$

5) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{b^2x}-\sqrt[3]{b^2}}{x-1}$ $\qquad \left[-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{\sqrt[3]{b^2}}{3}\right]$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[2x-\sqrt{2\left(2x^2+x\right)}\right]$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+\sqrt[3]{x^3-1}}{3x+2}$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{3}\right]$

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{3x+2-\sqrt{25x^2-x+4}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)$ $\qquad [-1;\ 1]$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-x+1}-3x\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad [-\infty;\ 0]$

9) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-x-\sqrt{2}+2}{x^2-4}$ $\qquad \left[\dfrac{5}{2};\ \dfrac{1-2\sqrt{2}}{8\sqrt{2}}\right]$

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+1}-\sqrt{9x^2+3x-1}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{2};\ 1\right]$

11) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2x-1}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \left[(x-2)\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}\right]$ $\qquad \left[-\dfrac{5}{2};\ 0\right]$

12) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x+2}-\sqrt{x^2+4x+5}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$ $\qquad [0;\ 0]$

13) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(3x+1-\sqrt{9x^2+6x+2}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x-6}}$ $\qquad [0;\ 0]$

14) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{16x^2+8x-2}-4x-1\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1+x}}$ $\qquad [0;\ 0]$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$ $\qquad \left[0;\ \dfrac{5}{2}\right]$

16) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{5x-1}}{4-x^2}$ $\qquad \left[+\infty;\ \dfrac{5}{24}\right]$

17) $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\log\left(x^2-1\right)-\log\left(x^2-x+1\right)\right]$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^3-8}{x}$ $\qquad [0;\ 12]$

18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+6x+2}}{x}$ $\qquad \left[1;\ -\sqrt{2}\right]$

19) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{4}\right]$

20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1}\right)$ $\qquad \left[\dfrac{1}{4};\ 0\right]$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2}}$ $\qquad \left[\dfrac{3}{2};\ 2\right]$

22) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$ $\qquad \left[\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ \dfrac{1}{4}\right]$

23) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ $\qquad \left[\dfrac{1}{3};\ \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}\right]$

24) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$; $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5e^x-6e^{-x}}{4e^x+3e^{-x}}$ $\qquad \left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{4}\right]$

25) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x+4e^{-x}}{2e^x-6e^{-x}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\log x-5}{3\log x+2}$ $\qquad \left[-\dfrac{2}{3};\ \dfrac{4}{3}\right]$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\log\sqrt{3x^2-5}-\log\sqrt{4x^2+3}\right)$; $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\log(3x+1)-\log(2x-1)\right]$ $\qquad \left[\log\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ \log\dfrac{3}{2}\right]$

27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x+x}{x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{tg x}$ $\qquad [2;\ 2]$

28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg x}{1-\cos x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ $\qquad [\infty;\ 2]$

29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin x}{2x\cos x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\frac{p}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$ $\qquad \left[1;\ -\sqrt{2}\right]$

30) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\cos x\,(1-\cos x)}{\sin^2 x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} \dfrac{1-\sin x}{\cos x}$ $\qquad [1;\ 0]$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,sinx + 4x\ \cos x}{5\,sinx + 2x\ \cos x}$; $\qquad \lim\limits_{x\to \frac{p}{2}} \dfrac{1 - sin^3 x}{\cos^2 x}$ $\qquad \left[1;\ \dfrac{3}{2}\right]$

32) $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1 + \cos^3 x}{2\ \cos^2 \dfrac{x}{2}}$; $\qquad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tgx}{tg^3 x - tg3x}$ $\qquad \left[3;\ -\dfrac{1}{3}\right]$