Funzioni pari, dispari, convesse, concave

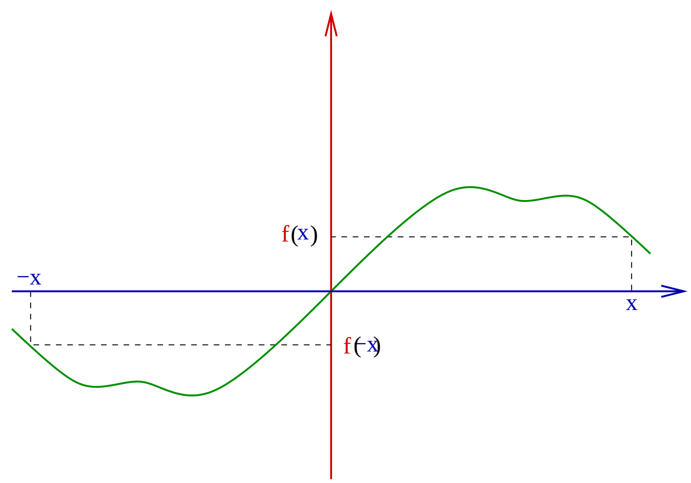
Per semplicità daremo dapprima le definizioni per *funzioni definite su tutto* $\mathbb{R}$. Poi accenneremo al caso di funzioni definite solo su un intervallo $[a, b]$

Definizione di funzione dispari

Definizione Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è **dispari** se

(1) $$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -f(-x). \qquad \square$$

Notiamo che il grafico di una funzione dispari risulterà essere *simmetrico rispetto all'***origine**. Inoltre avremo *sempre* $f(0) = 0$.



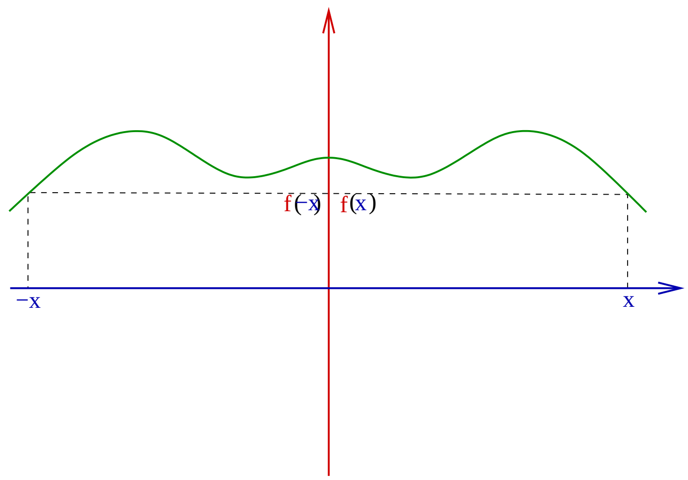
È chiaro che questa definizione può essere estesa immediatamente al caso di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$, quando si abbia $a = -b$ (con $b > 0$, ovviamente).

Definizione di funzione pari

Definizione Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è **pari** se

(2) $$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x). \qquad \square$$

Notiamo che il grafico di una funzione pari risulterà essere *simmetrico rispetto all'asse verticale* È chiaro che la definizione può essere estesa immediatamente al



caso di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$, quando si abbia $a = -b$ (sempre con $b > 0$).

Notiamo che, se restringiamo la nostra attenzione a funzioni che siano *derivabili in tutto* $\mathbb{R}$ allora derivando la (1) rispetto a x abbiamo

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f'(-x).$$

(cioè: la derivata di una funzione dispari è una funzione pari), mentre derivando la (2) rispetto a x abbiamo

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -f'(-x).$$

(cioè: la derivata di una funzione pari è una funzione dispari).

Definizione di funzione convessa

Definizione Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è **convessa** se per ogni coppia di punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ del suo grafico si ha che *il segmento congiungente i due punti sta tutto sopra* la porzione di grafico compresa tra $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Questo può essere espresso dalla formula

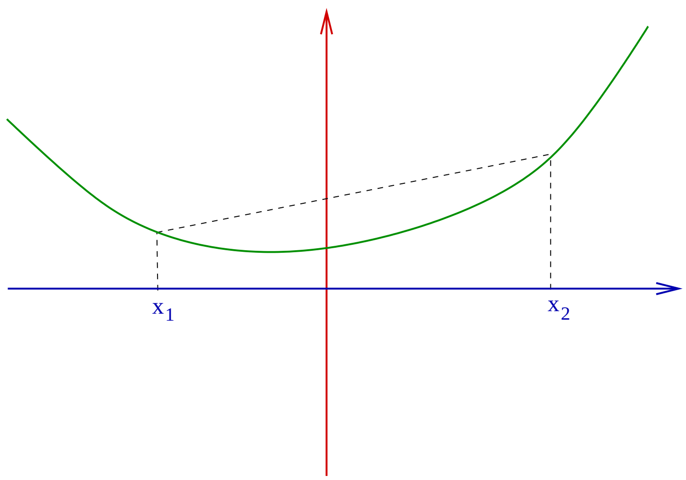
$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\ \forall\, x_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in\ [0,1] \quad (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \geq f((1-t)x_0 + tx_1). \qquad \square$$

Notiamo che, quando t si varia tra 0 e 1 il valore $(1-t)x_0 + tx_1$ varia tra x_0 (per $t = 0$) e x_1 (per $t = 1$), mentre il valore di $(1-t)f(x_0) + tf(x_1)$ varia tra $f(x_0)$ (per $t = 0$) e $f(x_1)$ (per $t = 1$). In molti testi si introduce anche il concetto di funzione *strettamente convessa* per indicare che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\ \forall\, x_1 \in \mathbb{R}\ \forall\, t \in]0,1[\quad (1-t)f(x_0) + tf(x_1) > f((1-t)x_0 + tx_1);$$

(mucche: adesso t varia nell'*aperto* $]0,1[$ e si richiede che la corda sia *strettamente maggiore* del grafico. In altre parole, si esclude che il grafico della funzione contenga dei pezzi rettilinei)

Il grafico di una funzione convessa somiglierà ad una *bocca che ride*



È chiaro che anche questa definizione può essere estesa immediatamente al caso di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ (con $a < b$).

Con qualche calcolo si può anche verificare che, restringendo la nostra attenzione a funzioni *derivabili*, la derivata di una funzione convessa sarà *monotòna non decrescente*: intuitivamente, per ogni x_0 e x_1 con $x_0 < x_1$ consideriamo la differenza d tra la f e la corda: abbiamo che nell'intervallo $[x_0, x_1]$ la d è tutta ≤ 0 e quindi per il teorema di Fermat

(3) $$d'(x_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad d'(x_1) \geq 0.$$

Ma la pendenza della corda è la stessa in x_0 e in x_1: quindi dalla (3) deduciamo che

$$f'(x_0) \leq f'(x_1).$$

Visto che questo vale per ogni $x_0 < x_1$ la proprietà di monotonia è dimostrata. Restringendo poi la nostra attenzione a funzioni *derivabili due volte*, avremo che *la derivata seconda di una funzione convessa è* ≥ 0 (essendo la derivata di una funzione non decrescente).

Definizione di funzione concava

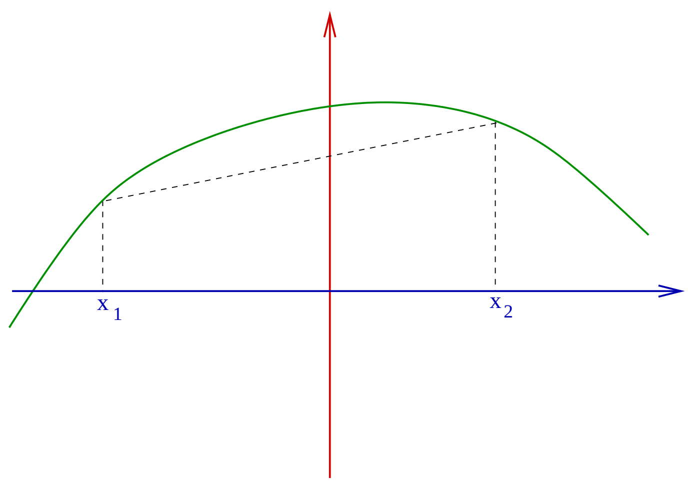
Definizione Sia f una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è **concava** se per ogni coppia di punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ del suo grafico si ha che *il segmento congiungente i due punti sta tutto sotto* la porzione di grafico compresa tra $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. Questo può essere espresso dalla formula

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\; \forall\, x_1 \in \mathbb{R}\; \forall\, t \in\; [0,1] \quad (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \leq f((1-t)x_0 + tx_1). \qquad \square$$

In molti testi si introduce anche il concetto di funzione *strettamente concava* per indicare che

$$\forall\, x_0 \in \mathbb{R}\; \forall\, x_1 \in \mathbb{R}\; \forall\, t \in]0,1[\quad (1-t)f(x_0) + tf(x_1) < f((1-t)x_0 + tx_1).$$

Notiamo che avremmo potuto dire *f è concava se $-f$ è convessa.* Notiamo anche che il grafico di una funzione convessa somiglierà ad una *bocca che piange.*



È chiaro che anche questa definizione può essere estesa immediatamente al caso di una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ (con $a < b$).

Notiamo infine che (per quanto visto sopra) per funzioni concave derivabili avremo che la derivata risulta monotona non crescente, e per funzioni concave derivabili due volte la derivata seconda risulta ≤ 0