8. Teoremi di base del calcolo differenziale

Una delle principali applicazioni delle derivate è nello studio dei massimi e minimi delle funzioni. Anzitutto una definizione precisa:

Definizione 1. Sia $f : I \to R$ una funzione definita su un intervallo I. Si dice che M è il *massimo* di f su I, e si scrive

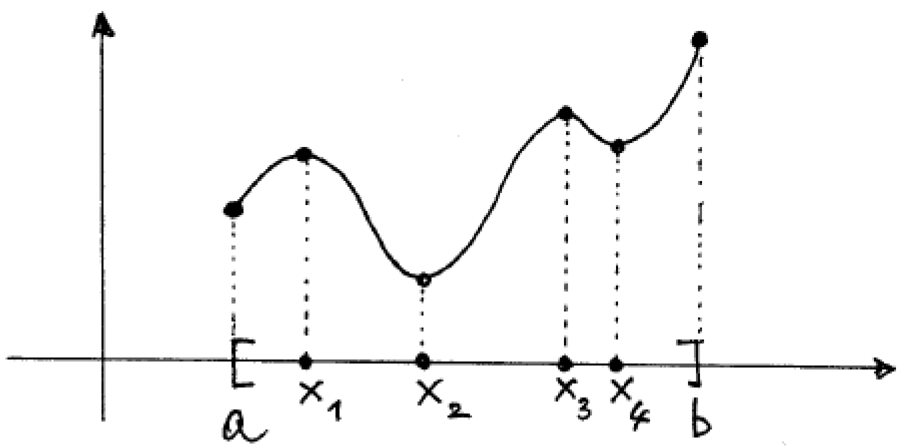
$$M = \max_I f$$

se esiste un punto $x_0 \in I$ in cui la funzione vale M e in nessun altro punto vale più di M:

$$f(x_0) = M \geq f(x) \quad \forall x \in I.$$

il punto x0 si dice allora *punto di massimo assoluto* di f su I.

Invece si dice che x0 è un punto di massimo relativo (o massimo locale) di f se esiste δ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per gli x tali che $|x - x_0| < \delta$ (ossia se f(x0) è maggiore dei valori di f nei punti vicini a x0).
Le definizioni di minimo, punto di minimo assoluto e relativo sono analoghe.



Dal grafico si evince che a, X_2 e X_4 sono punti di minimo relativo; X_1 , X_3 e b sono punti di massimo relativo; X_2 è un punto di minimo assoluto, b è un punto di massimo assoluto; X_1, X_2, X_3 , X_4 sono interni all'intervallo $[a, b]$.
Naturalmente un punto di massimo assoluto è anche un punto di massimo relativo, anche se il viceversa non è vero in generale.
Il risultato che mette in relazione massimi, minimi e derivate di f è il seguente. Ricordiamo che se [a; b] è un intervallo chiuso, un punto x0 si dice interno all'intervallo se a < x0 < b, mentre i due punti a e b sono gli estremi dell'intervallo.

Teorema 1. Sia $f : [a, b] \to R$ derivabile in un punto x0 interno all'intervallo [a; b]. Se x0 è punto di massimo (o di minimo) relativo di f, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso di un punto di massimo (l'altro caso è analogo). Allora se h è abbastanza piccolo si ha $f(x_0) \geq f(x_0 + h)$, e quindi la differenza

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$$

è negativa (per h abbastanza piccolo). Consideriamo ora il rapporto incrementale: se h > 0 si ha

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(+)} \leq 0$$

e quindi, applicando il teorema della permanenza del segno, otteniamo

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Se invece consideriamo gli h < 0, abbiamo

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(-)} \geq 0$$

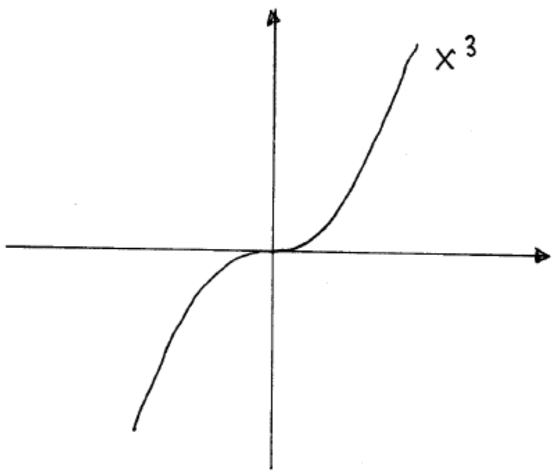
e quindi allo stesso modo

$$\lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

In conclusione

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

Osservazione 1. Il teorema precedente non garantisce che se la derivata si annulla allora c'è un massimo: per esempio la funzione $f(x) = x^3$ ha derivata uguale a zero nell'origine ma è sempre strettamente crescente.



Il teorema afferma una cosa diversa: se c'è un punto interno di massimo o minimo, allora lì la derivata deve annullarsi. Questo ci fornisce un modo per cercare dove sono i massimi e i minimi: infatti per una funzione derivabile essi possono trovarsi solo
1) agli estremi dell'intervallo, oppure
2) nei punti interni in cui la derivata si annulla.
Dopo aver trovato tutti i punti in cui la derivata si annulla, dobbiamo esaminarli uno per uno e capire se siano di punti di massimo o di minimo, oppure no; e non si deve dimenticare di studiare quello che succede agli estremi dell'intervallo.

Teorema 2 (Teorema di Weierstrass). Sia $f:[a,b]\to R$ una funzione continua. Allora esistono due punti $x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che, detto m il valore di f in x1 e M il valore di f in x2, si ha

$$m \leq f(x) \leq M \quad per\ tutti\ gli\ x \in [a,b]$$

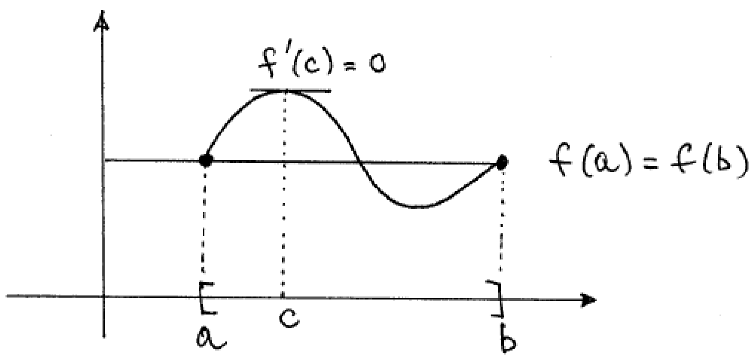
Senza dimostrazione

I due punti x1 e x2 trovati nel teorema precedente si chiamano il *punto di minimo assoluto* e di *massimo assoluto* di f su [a; b] rispettivamente; mentre m e M sono il *minimo assoluto* e il *massimo assoluto* di f su [a; b].
Dal Teorema di Weierstrass sappiamo che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato ha sempre un minimo m e un massimo M sull'intervallo.

Teoremi di base del calcolo

Ricordiamo che una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato verifica il Teorema di Weierstrass; quindi possiamo trovare sempre un punto in cui f assume un valore maggiore di tutti gli altri, e un punto in cui f assume un valore minore di tutti gli altri. Questi due punti di solito sono distinti; se coincidono allora la funzione deve essere piatta ossia una costante. Se aggiungiamo l'ipotesi che f sia derivabile otteniamo vari risultati interessanti:

Teorema 3. (Teorema di Rolle). Sia $f:[a,b]\to R$ una funzione continua su [a; b] e derivabile su $]a,b[$. Se f(a) = f(b) allora esiste un punto $c \in]a,b[$ in cui la derivata di annulla: $f'(c)=0$.



Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette massimo e minimo assoluto su [a; b]; sia x0 il punto di massimo e x1 il punto di minimo. Se uno di questi due punti è interno all'intervallo [a; b], allora sappiamo che in quel punto la derivata si annulla, e quindi la dimostrazione è finita.
Se invece nessuno di questi due punti è interno, essi cadono tutti e due agli estremi; ma il valore agli estremi di f è lo stesso, ne segue che f(a) = f(b) = f(x0) = f(x1) ossia massimo = minimo. Questo vuol dire che la funzione è costante, e quindi la derivata si annulla in tutti i punti.

Teorema 4 (Teorema di Cauchy). Siano $f, g : [a,b] \to R$ funzioni continue su [a; b] e derivabili su]a; b[. Allora esiste un punto $c \in \left]a,b\right[$ in cui

$$f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(x) = f(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g(x) \cdot [f(b) - f(a)].$$

La funzione F è continua su [a; b] e derivabile su]a; b[e la sua derivata è

$$F'(x) = f'(x) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(x) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Inoltre vediamo subito che

$$F(a) = F(b) = f(a)g(b) - f(b)g(a).$$

Quindi possiamo applicare il Teorema di Rolle ed otteniamo che esiste un punto $c \in \left]a,b\right[$ in cui $F'(c) = 0$, ossia

$$F'(c) = f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] - g'(c) \cdot [f(b) - f(a)] = 0$$

da cui la tesi.

Teorema 5 (Teorema di Lagrange o del valor medio). Sia $f : [a,b] \to R$ una funzione continua su [a; b] e derivabile su]a; b[. Allora esiste un punto $c \in \left]a,b\right[$ in cui

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

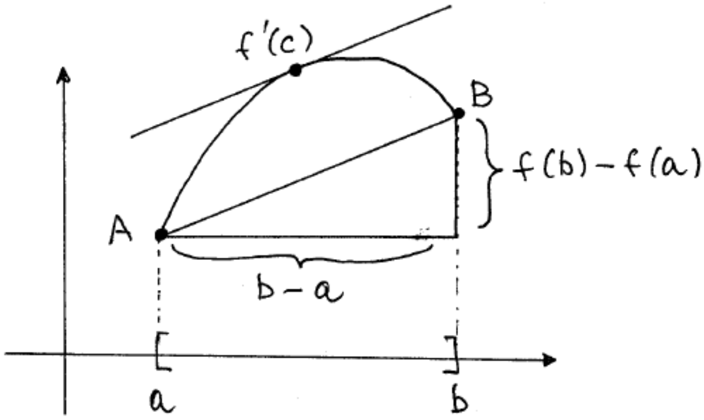
Dimostrazione. Basta applicare il teorema precedente ad f e alla funzione g(x) = x; le ipotesi sono soddisfatte, quindi per il teorema esiste un punto c in cui vale

$$f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)];$$

ma g(b) = b, g(a) = a, e chiaramente $g'(x) = (x)' = 1$ in ogni punto, quindi abbiamo ottenuto

$$f'(c) \cdot [b-a] = f(b) - f(a)$$

da cui la tesi.



Osservazione 2. Notiamo che $f'(c)$ si può interpretare come l'inclinazione (il coefficiente angolare) della tangente al grafico per x = c; invece il secondo membro è il rapporto incrementale fra i punti x = a e x = b, che esprime l'inclinazione della retta passante per i punti A = (a; f(a)) e B = (b; f(b)). Il Teorema di Lagrange afferma semplicemente che c'è un punto in cui la tangente al grafico ha la stessa inclinazione della retta passante per A e B.

Il Teorema di Lagrange ha alcune conseguenze della massima importanza:

Corollario 1. Sia $f:[a,b] \to R$ una funzione continua su [a; b] e derivabile su]a; b[. Allora

$$\textit{(i)}\ f\ \text{è crescente} \iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in]a,b[;$$
$$\textit{(ii)}\ f\ \text{è decrescente} \iff f'(x) \leq 0\ \forall x \in]a,b[.$$

<u>Dimostrazione</u>. Dimostreremo solo il caso (i), il secondo è completamente analogo.
Se f è crescente, il numeratore e il denominatore del rapporto incrementale hanno sempre lo stesso segno: quando h > 0

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(+)}{(+)} \geq 0$$

e quando h < 0

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(-)}{(-)} \geq 0.$$

Quindi anche il limite del rapporto incrementale cioè la derivata, deve essere sempre positivo. Viceversa, supponiamo che la derivata sia sempre positiva. Procedendo come nel corollario precedente, scegliamo due punti x1 < x2 qualunque interni all'intervallo, e applichiamo il Teorema di Lagrange su [x1; x2]: otteniamo che deve esistere un punto $c \in]a,b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Ora sappiamo che $f'(c) \geq 0$ per qualunque punto, e quindi

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

da cui, moltiplicando per $|x_2 - x_1| > 0$

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \implies f(x_2) \geq f(x_1).$$

Pertanto abbiamo dimostrato che presi due punti qualunque x1 e x2,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

cioè la funzione è crescente.