9. Il teorema di de l'Hopital

L'uso delle derivate permette in molti casi di calcolare con facilità dei limiti indeterminati. Il seguente risultato ad esempio si può utilizzare per calcolare i limiti della forma $\frac{0}{0}$

Teorema 1. (Teorema di de l'Hopital) Siano $f, g : [a,b] \to R$ due funzioni continue su $[a,b]$ e derivabili su $]a,b[$. Sia $x_0 \in]a,b[$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$, e sia $g'(x) \neq 0$ per $x \neq x_0$. Allora se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, esiste anche il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, e i due limiti coincidono

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

<u>Dimostrazione</u>. Applichiamo il Teorema di Cauchy alle due funzioni f e g sull'intervallo di estremi x0 e x; ne segue che esiste un punto z intermedio tale che

$$f'(z) \cdot [g(x) - g(x_0)] = g'(z) \cdot [f(x) - f(x_0)].$$

Dato che f(x0) = g(x0) = 0 la relazione si semplifica:

$$f'(z)g(x) = g'(z)f(x)$$

e dividendo per $g'(z) \neq 0$ otteniamo

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Se ora calcoliamo il limite per $x \to x_0$, e osserviamo che anche $z \to z_0$ in quanto è compreso fra x e x0, otteniamo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{z \to x_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

ossia la tesi.

Osservazione 4.4.2. Il teorema è valido in molti altri casi:

1) per i limiti indeterminati della forma $\frac{\infty}{\infty}$
2) per i limiti destri;
3) per i limiti sinistri;
4) per $x \to +\infty$ oppure $x \to -\infty$.

Osservazione 1
Verifichiamo il limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$$

Si tratta di un limite indeterminato $\frac{\infty}{\infty}$ Il limite del rapporto delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

e questo conclude il calcolo.

Il Teorema di de l'Hopital si può applicare anche al calcolo di limiti indeterminati della forma $0\cdot\infty$.
Ad esempio, per calcolare il

$$\lim_{x\to 0+} x \log x$$

possiamo scrivere

$$x \log x = \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$$

e in questo modo abbiamo scritto il limite nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; quindi derivando numeratore e denominatore

$$\frac{(\log x)'}{(\frac{1}{x})'} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -x$$

il limite diventa semplicemente

$$\lim_{x\to 0+} x \log x = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$