# 1. Teoria degli insiemi

**Introduzione**

Il concetto di insieme è un concetto primitivo: possiamo dire che un insieme è una collezione di elementi. Indicheremo gli insiemi con lettere maiuscole A,B, . . . e gli elementi di un insieme con lettere minuscole a, b, x, t, . . . . Per evitare paradossi logici, è bene parlare di insiemi solo dopo aver fissato un insieme “universo” X, che è l’ambiente dentro al quale lavoriamo, e considerarne i vari sottoinsiemi (cioè gli insiemi A contenuti in X). La scelta dell’ambiente X va fatta di volta in volta e sarà comunque chiara dal contesto. Come si descrive un insieme? Se esso è finito (ossia ha un numero finito di elementi), e questi elementi sono “pochi”, ciò può avvenire elencandoli; ad esempio, l'insieme che consiste dei numeri 2, 3, 4, 5, 6 e 7, si indica con parentesi graffe come

$$\{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$$

Se viceversa, l’insieme ha “molti” elementi, o ne ha addirittura una quantità infinita (si dice allora che l’insieme è infinito), esso si può descrivere individuando una proprietà p(x) che gli elementi x dell’universo X possono possedere o no, e che caratterizza l’insieme che interessa. Per esempio, l’insieme

A={1,2,3,4,6,12}

È altrettanto bene descritto dalla proprietà

P(x)=”x è divisore di 12”

la quale, all’interno dei numeri naturali (che in questo caso costituiscono il nostro universo), contraddistingue esattamente gli elementi dell’insieme A. Introduciamo alcuni simboli che useremo costantemente nel seguito.

• $x \in A$ significa: x appartiene ad A, ovvero x è un elemento di A.
• $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ significano: A è contenuto in B, ovvero B contiene A, ovvero ogni elemento di A è anche elemento di B, o anche A `e sottoinsieme di B.
• A = B significa: A coincide con B, ovvero A e B hanno gli stessi elementi, ovvero $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.
• $A \subset B$, $B \supset A$ significano: A è strettamente contenuto in B, ovvero A è sottoinsieme proprio di B, ovvero ogni elemento di A è elemento di B ma esiste almeno un elemento di B che non è elemento di A, ovvero
$A \subseteq B$ ma A non coincide con B.

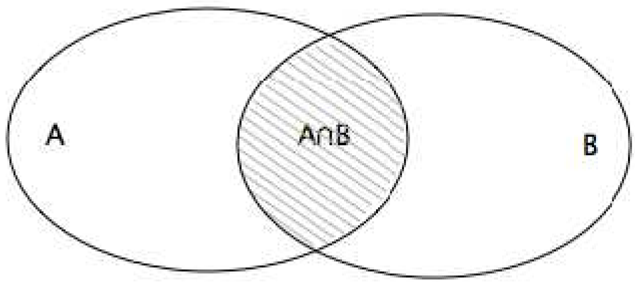
Per negare le proprietà precedenti si mette una sbarretta sul simbolo corrispondente:
ad esempio, $x \notin A$ significa che x non appartiene all’insieme A,
$A \neq B$ significa che gli insiemi A e B non hanno gli stessi elementi (e dunque vi è almeno un elemento che sta in A ma non in B, oppure che sta in B ma non in A), eccetera.

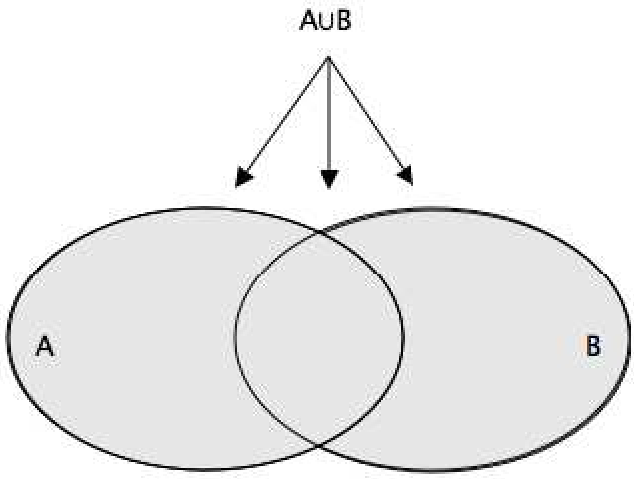
Sia X un insieme e siano A,B sottoinsiemi di X. Definiamo:

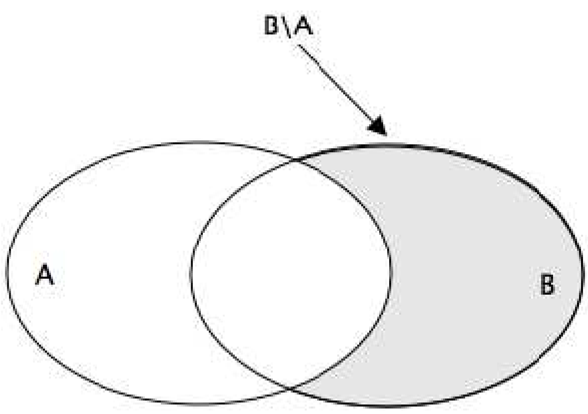
$A \cup B$ = unione di A e B, ossia l’insieme degli $x \in X$ che appartengono ad A oppure a B (oppure ad entrambi).
• $A \cap B$ = intersezione di A e B, ossia l’insieme degli $x \in X$ che appartengono sia ad A che a B.

• A\B = differenza fra A e B, ossia l’insieme degli $x \in X$ che appartengono ad A, ma non a B.
• Ac = X \ A = complementare di A in X, ossia l’insieme degli $x \in X$
che non appartengono ad A.
• $\emptyset$ = insieme vuoto, ossia l’unico insieme privo di elementi.

Si noti che $A \cup B = B \cup A$ e $A \cap B = B \cap A$, mentre in generale $A \setminus B \neq B \setminus A$. Se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi A e B si dicono disgiunti.




Consideriamo l’insieme A={ 2, 3, 4, 5, 6, 7 }. Il fatto che il numero 3 è un elemento di questo insieme si indica con $3 \in A$ ( "3 è elemento di *A*", oppure "3 appartiene ad *A*"). A volte si scrive anche $A \ni 3$. Il numero 9 non è elemento del nostro insieme, e ciò si indica con $9 \notin A$

Introduciamo ora alcuni insiemi importanti:

• N = insieme dei numeri naturali = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .}.
• N+= insieme dei numeri naturali diversi da 0 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .}.
• Z = insieme dei numeri interi = {0, 1,−1, 2,−2, 3,−3, 4,−4, . . .}.

• Q = insieme dei numeri razionali, cioè di tutte le frazioni $\frac{p}{q}$ con $p\in Z$, $q\in N^+$

• R = insieme dei numeri reali; esso contiene Q, ma anche numeri irrazionali come $\pi, e, \sqrt{2}$

Notiamo che valgono le inclusioni $N^+ \subset N \subset Z \subset Q \subset R$

La possibilità di descrivere un insieme x mediante la relativa proprietà p(x), è particolarmente utile quando è complicato o addirittura impossibile elencare gli elementi, come ad esempio per l'insieme dei numeri naturali N:

p(N) =”n è un numero intero positivo”

Nelle nostre formule useremo alcuni altri simboli che sono delle vere e proprie abbreviazioni stenografiche, e che andiamo ad elencare.

• Il simbolo $\forall$ significa “per ogni”: dunque dire che “$x\in B\ \forall x\in A$” equivale a dichiarare che ogni elemento di A sta anche in B, cioè che $A\subseteq B$.

• Il simbolo $\exists$ significa “esiste almeno un”: dunque affermare che “$\exists x\in A$ tale che $x\in B$” vuol dire che c'è almeno un elemento di A che sta anche in B, ossia che A \ B non è vuoto. i due simboli $\forall$, $\exists$ vengono detti “quantificatori esistenziali”.

• Il simbolo $\exists!$ significa “esiste un unico“: dunque la frase “$\exists! x\in A$ tale che $x\in B$” indica che c'è uno ed un solo elemento di A che sta in B, ossia che A \ B è costituito da un solo elemento.

• Il simbolo : significa “tale che”: dunque l'affermazione “$\exists! x\in A : x\in B$” ha lo stesso significato dell'enunciato del punto precedente.

• Il simbolo $\Rightarrow$ significa “implica”: quindi la frase $x\in A \Rightarrow x\in B$ vuol dire che se $x\in A$ allora $x\in B$, ossia $A\subseteq B$.

• Il simbolo $\Leftrightarrow$ significa “se e solo se”: si tratta della doppia implicazione, la quale ci dice che i due enunciati a confronto sono equivalenti. Ad esempio la frase $x\in A \Leftrightarrow x\in B$ indica che A = B.

Nel nostro corso non ci occuperemo di questioni di logica formale e non parleremo di predicati, proposizioni, variabili, tabelle di verità, eccetera; cercheremo di ragionare secondo il nostro buon senso, affinato dalle passate esperienze scolastiche.
Il formalismo è sicuramente importante, ma non evita la possibilità di errore. Ad esempio, l'affermazione "$\exists x \in A : x \in B$" è formalmente corretta, ma se ad esempio i due insiemi A e B sono definiti come:

$$A = \{n \in N : n \leq 5\} \qquad B = \{n \in N : n^2 > 25\}$$

l'affermazione sopra risulta essere errata.
Facciamo un esempio di negazione di un'affermazione. Si consideri l'affermazione

„$\forall x \in A \exists y \in B : x = y$"

Dobbiamo formulare l'esatto contrario dell'enunciato precedente:
dunque, a lume di naso, ci sarà almeno un $x \in A$ per il quale, comunque si scelga $y \in B$, sarà sempre $x \neq y$; ovvero,

„$\exists x \in A \forall y \in B : x \neq y$"

Si noti come i quantificatori $\forall$ e $\exists$ si siano scambiati di posto.

**Esercizi**

1. Sia $A \subset R$. Scrivere la negazione delle seguenti affermazioni:

(i) $\exists y \in \mathbb{R} : \ x < y \ \forall x \in A$,

(ii) $\forall x \in A \ \exists y \in A : x < y$,

(iii) $\exists y, z \in \mathbb{R} : \ y < x < z \ \forall x \in A$,

(iv) $\forall x \in A \ \exists y, z \in A : \ y < x < z$.

2. Elencare gli elementi di ciascuno dei seguenti insiemi:

$A = \left\{k \in \mathbb{Z} : \frac{1}{k} \in \mathbb{Z}\right\}$;

$B = \{k \in \mathbb{Z} : \exists h \in \mathbb{Z} : k = 6h\}$;

$C = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : m \leq 10, n = 6m\}$;

$D = \left\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+2} \in \mathbb{N}\right\}$;

$E = \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = 3^m\}$;

$F = \{n \in \mathbb{N} : n + m > 25 \ \forall m \in \mathbb{N}\}$.

3. Sono vere le seguenti affermazioni?

(i) $1 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$, (ii) $0 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$,

(iii) $-1 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$, (iv) $-2 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$.

**Gli insiemi e la loro descrizione**
Dalle considerazioni precedenti, un **insieme** può essere considerato come una collezione di oggetti ben definiti. Tali oggetti si chiamano **elementi** dell'insieme. L'area della matematica che studia le conseguenze di questa semplice idea si chiama **teoria degli insiemi.**

Gli elementi degli insiemi in genere sono oggetti matematici, ad esempio numeri.

Consideriamo **per esempio** l'insieme che consiste dei numeri 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Si indica con parentesi graffe come

$$\{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \} \qquad (1)$$

L'ordine in cui sono scritti gli elementi non ha nessuna importanza. Perciò l'insieme

$$\{ 4, 7, 2, 5, 6, 3 \} \qquad (2)$$

coincide con (1). Se vogliamo dargli un nome, ad esempio $A$, scriviamo

$$A = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}. \qquad (3)$$

Il fatto che il numero 3 è un elemento di questo insieme si indica con

$$3 \in A \qquad (4)$$

("3 è elemento di $A$", oppure "3 appartiene ad $A$"). A volte si scrive anche $A \ni 3$. Il numero 9 non è elemento del nostro insieme, e ciò si indica con

$$9 \notin A \qquad (5)$$

C'è un'altra notazione che si usa per formare (cioè definire) un insieme. Invece di elencare i suoi elementi, si può definire l'insieme $A$ come

$$A = \{ n \mid n \text{ è un numero intero maggiore di 1 e minore di 8}\} \qquad (6)$$

Troveremo spesso questa forma. Le sue parti si leggono così:

| | |
|---|---|
| $A =$ | "$A$ è |
| $\{ n$ | l'insieme di tutti gli $n$ |
| \| | per i quali vale |
| $n$ è un numero intero maggiore di 1 e minore di 8 } | "$n$ è un numero intero che è maggiore di 1 e minore di 8." |

Si tratta quindi di una serie di simboli ed enunciati che possono essere tradotti direttamente nel linguaggio comune e che ci dicono quali oggetti comprende l'insieme $A$. La chiave per la traduzione in forma linguistica è la riga verticale | , che va letta come "**per i quali vale**". Dopo questo simbolo sono elencate le **proprietà** che caratterizzano l'insieme. Si noti che non è importante quale simbolo si usa dopo la parentesi graffa. Inoltre la forma linguistica "**per i quali vale**" (il cui simbolo è "|") è equivalente alla forma "**tale che**" (il cui simbolo è "**:**") Invece di $n$ potremmo usare un qualsiasi altro simbolo, per esempio $x$:

$$\{ x \mid x \text{ è un numero intero maggiore di 1 e minore di 8} \}, \qquad (7)$$

quindi "l'insieme di tutti gli $x$, per i quali vale: $x$ è un numero intero che è maggiore di 1 e minore di 8" è ancora il nostro insieme $A$.

Tale possibilità di descrivere un insieme è particolarmente utile quando è complicato o addirittura impossibile elencare gli elementi, come ad esempio per l'insieme

$$N = \{ n \mid n \text{ è un numero intero positivo } \}, \qquad (8)$$

di tutti i numeri positivi interi che ha un numero infinito di elementi. Potremmo anche scrivere questo insieme come

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... \} \qquad (9)$$

dove i puntini stanno a indicare "tutti i rimanenti elementi". (I numeri interi positivi si chiamano anche **numeri naturali** e sono oggetti matematici importanti che incontreremo spesso).
Per l'insieme

$$X = \{ n \mid n \text{ è un numero intero positivo, per il quale la somma delle cifre è 3 oppure 7 } \} \qquad (10)$$

però un tale elenco sarebbe talmente complicato che il vantaggio della descrizione per mezzo di proprietà è evidente.
Gli insiemi $N$ ed $X$ contengono **un numero infinito di elementi**. Tali insiemi si dicono insiemi **infiniti**. Un insieme **finito** è invece un insieme che contiene solo **un numero finito di elementi** .
Per semplificare la notazione un insieme può anche essere indicato in modo seguente:

$$B = \{ x \in A \mid x \text{ è un numero pari } \}. \qquad (11)$$

Si legge "$B$ è l'insieme di tutti gli $x \in A$, per i quali vale: $x$ è un numero pari'. $B$ consiste di tutti gli elementi di $A$ che sono numeri pari. Se passiamo in rassegna gli elementi dell'insieme $A$ definito sopra, vediamo che solo 2, 4 e 6 sono numeri pari. Perciò l'insieme $B$ contiene esattamente questi tre elementi:

$$B = \{ 2, 4, 6 \}. \qquad (12)$$

Per dare altri esempi, scriviamo l'insieme dei numeri naturali dispari come

$$U = \{ x \in N \mid x \text{ è un numero naturale dispari } \} \qquad (13)$$

e definiamo un insieme

$$C = \{ 5, 6, 7, 8, 9 \}. \qquad (14)$$

Nei prossimi paragrafi utilizzeremo i sei insiemi $A$, $B$, $C$, $N$, $U$ ed $X$ per illustrare relazioni e operazioni fra insiemi.

**I sottoinsiemi**
Abbiamo visto alcuni esempi di insiemi e possiamo osservare adesso che fra insiemi possono valere determinate relazioni. Ad esempio tutti gli elementi di $A$ sono anche elementi di $N$. L'insieme $N$ è più ampio (potremmo dire "più grande") dell'insieme $A$. L'espressione matematica di questo fatto è: $A$ è **sottoinsieme** di (oppure è incluso in) $N$, e $N$ **include** $A$. Ciò si indica con

$$A \subseteq N \qquad \text{ovvero} \qquad N \supseteq A \qquad (15)$$

La relazione $A \subseteq N$ sta ad indicare che ogni elemento di $A$ è anche elemento di $N$. Formalmente possiamo scrivere

$$x \in A \Rightarrow x \in N \quad (16)$$

o anche più brevemente

$$x \in A \Rightarrow x \in N \qquad (17)$$

Ne segue fra l'altro come caso particolare che ogni insieme è sottoinsieme di se stesso: $A \subseteq A$, perché “ $x \in A$ implica (ovviamente) $x \in A$ ”.

Un altro esempio è $B \subseteq A$, perché l'insieme *B* definito sopra consiste per definizione degli elementi di *A* che soddisfano una determinata proprietà (e cioè essere numeri pari*)*. Le due relazioni $B \subseteq A$ e $A \subseteq N$ possono essere riassunte in forma $B \subseteq A \subseteq N$ .

Quando un insieme è sottoinsieme di un altro e i due insiemi sono distinti, si parla di un **sottoinsieme proprio**. Ad esempio *A* è un sottoinsieme proprio di *N*, poiché $A \neq N$ . (Infatti esiste - almeno - un elemento di *N*, che non è elemento di *A*).

Invece di $\subseteq$ e $\supseteq$ si usano a volte anche i simboli $\subset$ e $\supset$ .

**Attenzione**: I simboli $\subset$ e $\supset$ vengono spesso usati per sottoinsiemi o inclusioni *propri.* Purtroppo non c'è un uso omogeneo di questi simboli.

**Intersezione ed unione**

Due (o più) insiemi possono avere elementi in comune. L'insieme di tutti questi elementi comuni si chiama **insieme intersezione** (anche **intersezione**) e si indica con il simbolo $\cap$. Formiamo ad esempio l'intersezione dei due insiemi *A* (vedi sopra) ed *U* (vedi sopra). La definizione formale è

$$A \cap U = \{x \mid x \in A \; ed \; x \in U\} \qquad (18)$$

Quali numeri appartengono all'insieme *A* (sono cioè numeri interi maggiori di 1 e minori di 8) e sono dispari? Si tratta esattamente dei numeri 3, 5 e 7. Perciò

$$A \cap U = \{3,5,7\} \quad (19)$$

Un esempio per l'intersezione di tre insiemi è

$$A \cap U \cap X = \{x \mid x \in A \; ed \; x \in U \; ed \; x \in X\} \quad (20)$$

Ciascun elemento di questo insieme deve quindi possedere simultaneamente tre proprietà: E' elemento di *A* (cioè è maggiore di 1 e minore di 8), è dispari e la somma delle sue cifre è 3 oppure 7. Ciò si verifica solo per i numeri 3 e 7 , dunque

$$A \cap U \cap X = \{3,7\} \qquad (21).$$

A volte può essere necessario riunire gli elementi di due (o più) insiemi in un nuovo insieme più ampio. Questo insieme si chiama **insieme unione** (anche **unione**) e si indica con il simbolo $\cup$ . Formiamo ad esempio l'unione dei due insiemi *A* (vedi sopra) e *C* (vedi sopra). La definizione formale è

$$A \cup U = \{x \mid x \in A \; oppure \; x \in U\} \qquad (22)$$

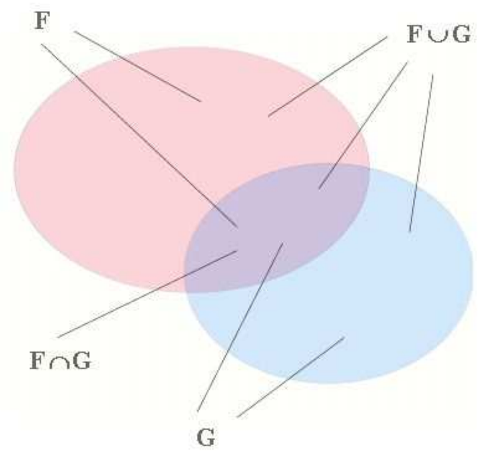
Quali numeri appartengono all'insieme *A* oppure all'insieme *C* ? Guardando le definizione dei due insiemi vediamo che

$$A \cup U = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \qquad (23)$$

Un esempio per l'unione di tre insiemi è

$$A \cup C \cup U = \{x \mid x \in A \text{ oppure } x \in C \text{ oppure } x \in U\}. \qquad (24)$$

Questo insieme consiste di tutti i numeri che appartengono ad almeno uno dei tre insiemi *A*, *C* oppure *U*. Esso possiede un numero infinito di elementi: i numeri dispari e inoltre i numeri pari 2, 4, 6, e 8. Segue un'illustrazione grafica (diagrammi di Venn) dei concetti di intersezione ed unione




**L'insieme differenza**
A volte si vogliono escludere degli elementi da un insieme. Consideriamo gli insiemi *A* (vedi sopra) e *B* (vedi sopra). Ricordiamo che per questi insiemi vale la relazione $B \subseteq A$. Tutti gli elementi di *B* sono anche elementi di *A*. Se togliamo questi elementi dall'insieme *A* otteniamo l'insieme

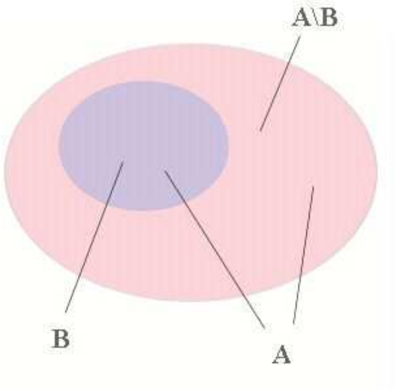
$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \text{ non è elemento di } B\} = \{x \in A \mid x \notin B\} \qquad (25)$$

Si chiama **insieme differenza** (anche **insieme complementare** di *B* rispetto ad *A)*. Guardando le definizioni degli insiemi *A* e *B* vediamo che

$$A \setminus B = \{3, 5, 7\} \qquad (26)$$

Come ulteriore esempio osserviamo che $N \setminus U$ è l'insieme dei numeri naturali pari (perchè abbiamo tolto i numeri dispari - gli elementi di *U* - dall'insieme *N* ).

Un'illustrazione grafica (diagramma di Venn) del concetto di differenza è il seguente




**I numeri reali**

Il metodo comunemente usato in Matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti, da non cambiare durante l'elaborazione dei dati o della teoria, e nel dedurre da tali presupposti il maggior numero di informazioni possibili. Se ad esempio si considera il gioco della pallacanestro, una volta iniziato il campionato, le regole di tale gioco non vengono più cambiate. In Matematica i presupposti sono le regole del gioco e sono denominati postulati o assiomi. Da essi, mediante dimostrazioni, si deducono i risultati ossia i teoremi.

Il nostro punto di partenza è quello di assumere, come **postulato**, che **esista il sistema dei numeri reali**. Cioè assumiamo che esista un insieme di numeri, che chiamiamo numeri reali e che indichiamo con **R**, su cui sia possibile, ad esempio, eseguire le quattro operazioni elementari (+,-,$\cdot$,/), oppure sia possibile stabilire qual è il minore tra due numeri.

Poiché abbiamo assunto come postulato l'esistenza dei numeri reali, elenchiamo gli assiomi dei numeri reali relativi alle operazioni di addizione (+) e moltiplicazione ($\cdot$). Indichiamo con a, b, c dei numeri reali generici.

1) Proprietà associativa:
   $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
2) Proprietà commutativa:
   $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$
3) Proprietà distributiva:
   $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$
4) Esistenza degli elementi neutri: esistono in R due numeri distinti 0, 1, tali che $a+0=a$, $a\cdot 1=a$
5) Esistenza degli opposti: per ogni numero reale $a$, esiste un numero reale, indicato con $-a$, tale che $a+(-a)=0$
6) Esistenza degli inversi: per ogni numero reale $a\neq 0$, esiste un numero reale, indicato con $a^{-1}$, tale che $a\cdot(a^{-1})=1$

**Intervalli in R**

**Definizione** Diremo che I è un **intervallo** di R se $a,b\in R$ e $a\leq b$, ogni $x\in R$ tale che $a\leq x\leq b$ appartiene ad I. In altre parole: I è intervallo di R se contenendo due numeri reali contiene anche tutti i numeri reali che stanno fra questi due.

Fissati $a,b\in R$, con $a<b$, si riconosce facilmente che sono intervalli i seguenti sottoinsiemi di R:

$[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$ (intervallo chiuso di estremi a e b)

$[a,b[ = \{x \in R : a \le x < b\}$ (intervallo aperto a destra)

$]a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ (intervallo aperto a sinistra)

$]a,b[ = \{x \in R : a < x < b\}$ (intervallo aperto)

I due numeri a e b sono l'estremo inferiore e l'estremo superiore dell'intervallo; i numeri x tali che a<x<b si chiamano **interni** all'intervallo.

**Esempi**

- L'intervallo chiuso [0,1] ha tanto massimo (il numero 1) quanto minimo (il numero 0);
- $]0,1]$ ha massimo (che è 1) ma non ha minimo: dato $x \in ]0,1]$ si ha $0 < x/2 < x \le 1$, quindi $x/2 \in ]0,1]$, e $x/2 < x$: pertanto x non è minimo di $]0,1]$. Essendo x un arbitrario elemento di $]0,1]$, si conclude che $]0,1]$ non ha minimo.

**Intorno di un punto**

**Definizione** Dati due numeri $x_0 \in R, \delta \in R^+$, si chiama **intorno** di $x_0$ di raggio $\delta$ l'insieme

$$\{x \in R : |x - x_0| < \delta\},$$

dove $|x - x_0| < \delta \Leftrightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

**Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore.**

Sia A un sottoinsieme di R.

**Definizione** Un elemento $m \in A$ si dice **massimo** (**minimo**) di A se, $\forall x \in A$, risulta $x \le m$ ( $x \ge m$ ).

Indicando il massimo di A con $\max A$ ed il minimo con $\max B$, vale ovviamente che $\min A \le \max A$

**Definizione** Un elemento $a \in R$ tale che risulti $x \le a$ ( $x \ge a$ ), per ogni $x \in A$, si chiama **maggiorante** (**minorante**) di A.

**Definizione** Diremo che un elemento y di R è un **estremo superiore** (**estremo inferiore**) di A se:

1. y è maggiorante (minorante) di A
2. per ogni maggiorante (minorante) $a \in R$, risulta $y \le a$ ( $a \le y$ )

Indicheremo l'estremo superiore (inferiore) di un sottoinsieme A di R, con la notazione: $\sup A$ ( $\inf A$ ).

È bene sottolineare che $\sup A$ ed $\inf A$ anche se esistono, possono **non appartenere** ad A. Si ha anzi: $\sup A \in A$ se e solo se A ha massimo (nel qual caso è $\sup A = \max A$ ) e dualmente $\inf A \in A$ se e solo se A ha minimo (nel qual caso è $\inf A = \min A$ )

**Esempio**
Si consideri l'insieme A=[0,1[. Esso ha 0 come estremo inferiore (perché 0 è anche il minimo di A); ha $1 \in R$ come estremo superiore, che però non è massimo ($1 \notin A$).