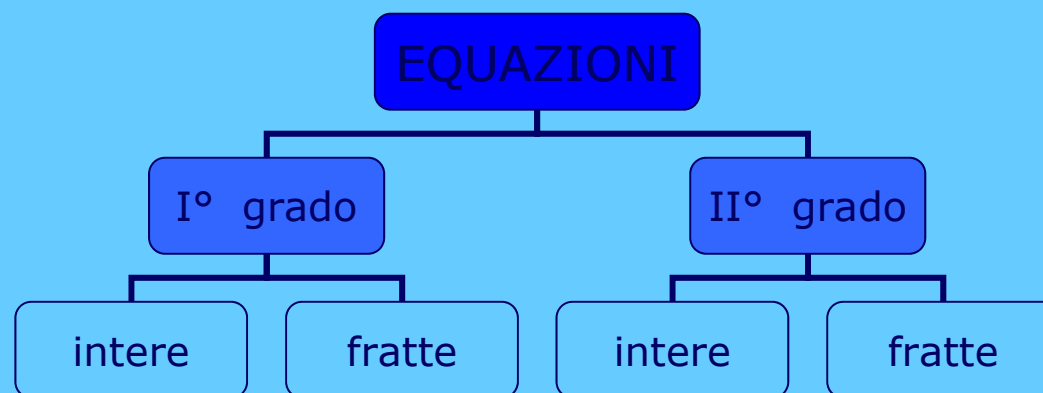


CONTENUTI

Ci proponiamo un "ripasso" di argomenti sicuramente svolti nelle scuole superiori e quindi noti a tutti



EQUAZIONI ALGEBRICHE generalità

Dicesi EQUAZIONE ALGEBRICA un'uguaglianza tra due espressioni letterali (*membri*) che risulti *verificata* solo per *certi valori* attribuiti alle *incognite* detti *soluzioni*

RISOLVERE un'equazione: individuare l'insieme delle *soluzioni* (o *radici*) che la verificano

NUMERICA	se le uniche lettere presenti sono le <i>incognite</i>
LETTERALE	se sono presenti <i>variabili letterali</i> oltre le incognite
RAZIONALE	se l' <i>incognita</i> è coinvolta solo in <i>somme, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni</i>
IRRAZIONALE	se l' <i>incognita</i> è coinvolta anche in <i>radici, logaritmi, esponenziali</i>
INTERA	se l' <i>incognita</i> non compare a <i>denominatore</i> in entrambe i <i>membri</i>
FRATTA	se l' <i>incognita</i> compare a <i>denominatore</i> anche in un solo <i>membro</i>
GRADO	di un'equazione è l' <i>esponente massimo</i> con cui compare l' <i>incognita</i>
EQUIVALENTI	sono due o più equazioni i cui <i>insiemi di soluzioni</i> coincidano

Il numero di soluzioni di un'equazione è al più pari al grado dell'equazione stessa

Per ogni tipo di *equazione* valgono i seguenti *principi*:

I° PRINCIPIO di EQUIVALENZA	Sommando o sottraendo ai due membri di un'equazione la <i>stessa quantità</i> si ottiene un'equazione <i>equivalente</i>
II° PRINCIPIO di EQUIVALENZA	Moltiplicando o dividendo ai due membri di un'equazione la <i>stessa quantità, purchè non nulla</i> , si ottiene un'equazione <i>equivalente</i>

EQUAZIONI ALGEBRICHE di I° grado

Si dice EQUAZIONE ALGEBRICA di I° grado (*lineare*), di incognita x nei Reali, la scrittura

$$ax + b = 0 \quad \text{con } a, b \text{ Reali}$$

" a " è detto *coefficiente* dell'incognita

" b " è detto *termine noto*

Una qualsiasi equazione di I° grado può essere ricondotta alla *forma normale* $ax-b=0$ applicando opportunamente il I° ed il II° principio di equivalenza

Per individuare la *soluzione* dell'equazione si procede fino ad ottenere la scrittura

$$x = -b/a$$

Possono verificarsi tre situazioni:

$$x = -a/b$$

Se $a \neq 0 \Rightarrow$ la soluzione **esiste unica** \Rightarrow **EQUAZIONE DETERMINATA**

Se $a=0$ e $b \neq 0 \Rightarrow$ la soluzione **non esiste** \Rightarrow **EQUAZIONE IMPOSSIBILE**

Se $a=0$ e $b=0 \Rightarrow$ la soluzione **non è reale** \Rightarrow **EQUAZIONE INDETERMINATA**

EQUAZIONI ALGEBRICHE di I° grado FRATTE

Se l'equazione algebrica di I° grado è *fratta*, per poterla risolvere, bisogna:

- *Discutere* opportunamente i denominatori
- Individuare il *minimo comune multiplo* tra i denominatori
- Trasformarla in equazione *intera* mediante il II° principio di equivalenza
- Ridurre l'equazione in *forma normale*
- Individuare la *soluzione*
- Verificare se la soluzione è *accettabile*, cioè se non annulla nessun denominatore

EQUAZIONI di I° GRADO

ESEMPI

$$14X + 64 = 0 \quad 14X = -64 \quad (1/14)14X = -64(1/14) \quad x = -(32/7)$$

$$3(X-6)+2X = 5(X+6) \quad 3X-18+2X = 5X+30 \quad 5X-18 = 5X+30 \quad 0X = 48 \text{ impossibile}$$

$$3(x+6)+2x = 4(x+6)-(6-x)$$

$$3x+18+2x = 4x+24-6+x \quad 3x+2x-4x-x = 24-6-18 \quad 0x = 0 \quad \textit{indeterminata}$$

$$5/x - 1/3 = 5 - 3/x$$

$$(3x)5/x - (3x)1/3 = (3x)5 - (3x)3/x \quad 15 - x = 15x - 9 \quad -16x = -24(-1)(-16x) = (-1)(-24) \quad x = 3/2$$

$$(2x-5)/(2-x) - 1 = -4$$

$$(2-x)(2x-5)/(2-x) - (2-x)1 = (2-x)(-4) \quad 2x-5-2+x = -8+4x \quad 2x+x-4x = -8+5+2 \quad -x = -1 \quad x = 1$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE di I° grado

ESERCIZI CONSIGLIATI

$$\begin{aligned}(5/8)x - 2/3 + x/12 &= 5/24 - x/6 && (1) \\ (x+2)(x-1) + 17 &= (x+3)^2 - 1 && (7/5) \\ (x+3)/2 &= 3x - (2x-5)/2 && (-2/3) \\ 3(14x-3)/5 + 20x - 8 &= x + 1 + (37x-23)/5 + 4(5x-2) && (\text{impossibile}) \\ (-4+8x)/6 + x/2 + (2-4x)/3 &= 4(2x-1)/6 + x + 2(-2x+1)/3 - x/2 && (\text{indeterminata}) \\ -2x/(4-x^2) &= 2/(x-2) - 4/(x^2+4x+4) && (\text{impossibile}) \\ 2(2-x)/(x+2) &= (3x+2)/(x-1) - 5 && (6) \\ (x+2)/(x-2) - 16/(x^2-4) &= (x-2)/(x+2) && (\text{impossibile}) \\ (x-1)/(x-4) - (x-3)/(x-5) &= 0 && (7) \\ px + 5q &= 3px + 3q && (p/q, \text{ per } p=0 \text{ e } q \neq 0 \text{ imp.}) \\ X - 2a/3 + 6b &= 5b + x - 2a/3 && (\text{per } b \neq 0 \text{ imp. Per } b=0 \text{ ind.}) \\ x/(x-a) - a/(x+a) &= x(x+1)/(x^2-a^2) && (a^2) \\ (b-3)/b + (2x+5)/x &= (8b+3)/bx && ((b+1)/(b-1))\end{aligned}$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

Si dice EQUAZIONE ALGEBRICA di II° grado , di incognita x nei Reali, la scrittura

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \text{ Reali e } a \neq 0$$

"a" è detto *coefficiente* dell'incognita di II° grado

"b" è detto *coefficiente* dell'incognita di I° grado

"c" è detto *termine noto*

Una qualsiasi equazione di II° grado può essere ricondotta alla *forma normale*
 $ax^2 + bx + c = 0$ applicando opportunamente il I° ed il II° principio di equivalenza

Possono verificarsi tre situazioni:

$a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ l'equazione è detta *completa*

$a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ l'equazione risulta incompleta ed è detta *spuria*

$a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ l'equazione risulta incompleta ed è detta *pura*

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

Se l'equazione è **COMPLETA** per individuare le *soluzioni* è possibile ricorrere ad una *formula risolutiva*:

$$x', x'' = [-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}] / 2a$$

La quantità **$b^2 - 4ac$** è detta *discriminante* e viene indicata con la lettera greca Δ

Possono verificarsi tre situazioni:

$\Delta = 0$ le soluzioni sono *reali e coincidenti*

$\Delta > 0$ le soluzioni sono *reali e distinte*

$\Delta < 0$ le soluzioni *non appartengono* all'insieme dei *numeri reali*

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

Se l'equazione è **INCOMPLETA**, per individuare le *soluzioni* si procede in maniera distinta a seconda che sia *pura* o *spuria*

- Equazione *spuria*: **$ax^2 + bx = 0$**

Si raccoglie l'incognita a *fattor comune* ottenendo l'equazione $x(ax+b) = 0$
Per la legge dell'*annullamento del prodotto* segue che le soluzioni reali e distinte sono

$$x' = 0 \quad \text{e} \quad x'' = -b/a$$

- Equazione *pura*: **$ax^2 + c = 0$**

Applicando i *principi di equivalenza* si ottiene l'equazione $x^2 = -c/a$
Da cui si ottengono le due soluzioni reali e distinte

$$x' = -\sqrt{-c/a} \quad \text{e} \quad x'' = +\sqrt{-c/a}$$

EQUAZIONI A. di II° grado FRATTE

Se l'equazione algebrica di II° grado è *fratta*, per poterla risolvere, bisogna:

- *Scomporre* opportunamente i denominatori
- *Discutere* ciascun fattore ottenuto individuando i valori che lo annulla
- Individuare il *minimo comune multiplo* tra i denominatori
- Trasformarla in equazione *intera* mediante il II° principio di equivalenza
- Ridurre l'equazione in *forma normale*
- Risolvere l'equazione ed individuare le *soluzioni*
- Verificare se le soluzioni sono *accettabili*, cioè se non annullano nessun denominatore, ed eventualmente *eliminare* quelle *non accettabili*

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

APPROFONDIMENTI:

■ RELAZIONE TRA RADICI E COEFFICIENTI

Per un'equazione che verifichi $\Delta \geq 0$ valgono le seguenti relazioni:

$$x' + x'' = -b/a \quad \text{e} \quad x'x'' = c/a$$

Se $a = 1$ ne segue : $x^2 + bx + c = 0 = x^2 - sx + p$ con $s = -b/a$ e $p = c/a$

■ SCOMPOSIZIONE TRINOMIO DI II° GRADO

Per un'equazione che verifichi $\Delta \geq 0$ vale la seguente scrittura:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x')(x-x'')$$

Con:

$$(x-x') \neq (x-x'') \quad \text{se } \Delta > 0$$

$$(x-x') = (x-x'') \quad \text{se } \Delta = 0$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

ESEMPI:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Delta = 9 + 16 > 0 \quad x = (3 \pm \sqrt{25})/2 \quad x' = (3 - 5)/2 = -1 \quad x'' = (3 + 5)/2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Delta = 36 - 36 = 0 \quad x = (6 \pm \sqrt{0})/2 \quad x' = (6 - 0)/2 = 3 \quad x'' = (6 + 0)/2 = 3$$

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \quad \Delta = 4 - 20 < 0 \quad x = (2 \pm \sqrt{-16})/2 \quad x' = 1 - 4i \quad x'' = 1 + 4i \quad \text{non reali}$$

$$x/(x+1) + 1/(x-1) = (2x^2 - x)/(x+1)(x-1)$$

$$\begin{aligned} [x(x-1) + 1(x+1)]/(x+1)(x-1) &= (2x^2 - x)/(x+1)(x-1) & x^2 - x + x + 1 &= 2x^2 - x \\ x^2 - 2x^2 + x + 1 &= 0 & -x^2 + x + 1 &= 0 & x^2 - x - 1 &= 0 & \Delta = 1 + 4 & x' = (1 - \sqrt{5})/2 \text{ acc.} & x'' = (1 + \sqrt{5})/2 \text{ acc.} \end{aligned}$$

$$2/(x-4) - 3/(x-3) = x^2/(x^2 - 7x + 12)$$

$$\begin{aligned} \text{poichè } x^2 - 7x + 12 &= (x-3)(x-4) & 2(x-3) - 3(x-4) &= x^2 & 2x - 6 - 3x + 12 - x^2 &= 0 \\ -x^2 - x + 6 &= 0 & x^2 + x - 6 &= 0 & x &= (-1 \pm \sqrt{25})/2 & x' &= (-1 - 5)/2 = -3 \text{ acc.} & x'' &= (-1 + 5)/2 = 2 \text{ acc.} \end{aligned}$$

$$4x^2 - 5x = 0 \quad \text{spuria} \quad x(4x - 5) = 0 \quad x' = 0 \quad 4x - 5 = 0 \quad 4x = 5 \quad x'' = 5/4$$

$$(2x-1)^2 + 1 = (8x-4)x + 2$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 1 = 8x^2 - 4x + 2 \quad 4x^2 - 8x^2 - 4x + 4x + 2 - 2 = 0 \quad -4x^2 = 0 \quad 4x^2 = 0 \quad x^2 = 0 \quad x' = x'' = 0$$

$$8x^2 + 5 = 0 \quad \text{pura} \quad x^2 = -5/8 \quad \text{non esistono soluzioni reali}$$

EQUAZIONI ALGEBRICHE di II° grado

ESERCIZI CONSIGLIATI

$5x^2+17x+6=0$	$(-3;-2/5)$
$x^2-12x+31=0$	$(6+\sqrt{5};6-\sqrt{5})$
$4/(x+1)+12/(x+3)=15(x+2)$	$(1;3)$
$(x+1)/(x^2-5x+6)+(x+5)/(x^2-6x+8)=13/(x-2)$	$(35/11;5)$
$x^2(x+2)/(x^2+x-2)-2=x(x+1)/(x^2-1)$	(2)
$(x+2)/(2-x)^2=x^2/(2-x)(x-1)-(2-x)/(x-1)$	$(1 \text{ non acc.}; 6/5)$
$(3-x)^2+9(x-2)=3x$	(± 3)
$(x+2/3)(x-2/3)=4/3$	$(\pm 4/3)$
$3/(2x-3)+15/2(x-1)=3/(2(x+1))$	$(\pm \sqrt{2})$
$(30-2x)/(15+x)-(2x+30)/(3x-15)=4$	$(0;-3)$
$(2x+1)/(2x+2)+(2x-1)/(2x-2)=(4x+1)/(2x+1)$	$(0;-2)$