# Ripasso delle matematiche elementari: esercizi svolti

# Capitolo I

# Equazioni e disequazioni algebriche

## 1 Esercizi su equazioni e polinomi di secondo grado

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

$(a)$ $$\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} \qquad \left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$(b)$ $$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{3-x}+\frac{1}{x+2} \qquad [\nexists x\in\mathbb{R}]$$

$(c)$ $$\frac{2-\frac{5}{x+3}}{2+\frac{4}{x-3}}+\frac{x+2}{x-1}-\frac{15}{x+3}=0. \qquad \left[\frac{13}{4}\right]$$

---

**Svolgimento**

$(a)$ Per ogni $x\neq 0,\frac{1}{2},1$ si ha

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{x+\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{x+1}{1-x}=\frac{2x+1}{2x-1}$$

$$(x+1)(2x-1)=(2x+1)(1-x)$$

$$4x^2 - 2 = 0$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

($b$) Per ogni $x \neq -2, -1, 2, 3$ si ha

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{5}{(3-x)(x+2)}$$

$$-3(3-x)(x+2) = 5(x+1)(x-2)$$
$$2x^2 - 2x + 8 = 0$$
$$x^2 - x + 4 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'equazione non ammette soluzioni reali.

($c$) Per ogni $x \neq \pm 3, 1$ si ha

$$\frac{2 - \dfrac{5}{x+3}}{2 + \dfrac{4}{x-3}} + \frac{x+2}{x-1} - \frac{15}{x+3} = 0$$

$$\frac{\dfrac{2x+1}{x+3}}{\dfrac{2x-2}{x-3}} + \frac{x+2}{x-1} - \frac{15}{x+3} = 0$$

$$\frac{2x+1}{x+3}\,\frac{x-3}{2(x-1)} + \frac{x+2}{x-1} - \frac{15}{x+3} = 0$$

$$\frac{4x^2 - 25x + 39}{2(x+3)(x-1)} = 0$$

$$4x^2 - 25x + 39 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm 1}{8} = \begin{cases} 3 & \text{non accettabile} \\ \frac{13}{4}. \end{cases}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $\frac{13}{4}$.

---

**Esercizio 2.**

($a$) Dato il polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, risolvere l'equazione $P(x) = 0$ sapendo che $P(1) = 1$ e $P(-1) = -1$. $\left[\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

($b$) Dato il polinomio $P(x) = x^2 + ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, determinare il segno del polinomio $P(x)$ al variare di $a$ e $b$ sapendo che $P(1) = 0$.

$$\left[\begin{array}{lll} b = 1 & \Longrightarrow P(x) \geq 0\,, & \forall x \in \mathbb{R} \\ b < 1 & \Longrightarrow P(x) \geq 0\,, & \forall x \leq b\,,\, x \geq 1 \\ b > 1 & \Longrightarrow P(x) \geq 0\,, & \forall x \leq 1\,,\, x \geq b \end{array}\right]$$

($c$) Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a + b = q$, $q \in \mathbb{R}$ dato. Determinare per quali valori di $a$ e $b$ il prodotto $p = a \cdot b$ è massimo. $\left[a = b = \dfrac{q}{2}\right]$

($d$) Siano $a, b \geq 0$ tali che $a \cdot b = p$, $p$ dato. Determinare per quali valori di $a$ e $b$ la somma $q = a + b$ è minima. $\left[a = b = \sqrt{2}\, p^{\frac{1}{4}}\right]$

($e$) Quante sono le soluzioni intere positive dell'equazione $x^2 - y^2 = 60$? Quante sono quelle intere? [2; 8]

---

**Svolgimento**

($a$) Essendo $P(1) = 1$ e $P(-1) = -1$, si ha che

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1. \end{cases}$$

Quindi si ha che $P(x) = x^2 + x - 1$ e le soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$(b)$ Essendo $P(1) = 0$ si ha che $a + b = -1$, ossia $b = -1 - a$. Dette $x_1 = 1$ e $x_2$ le radici del polinomio $P(x)$, si ha che

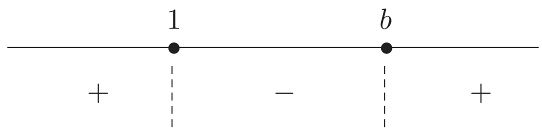
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 x_2 = b \end{cases} \implies x_2 = -1 - a = b.$$

Se $b < 1$, allora il segno di $P(x)$ è


Quindi $P(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-\infty, b] \cup [1, +\infty)$.

Se $b = 1$, allora $P(x) = (x-1)^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se $b > 1$, allora il segno di $P(x)$ è




Quindi $P(x) \geq 0$ per ogni $x \in (-\infty, 1] \cup [b, +\infty)$.

$(c)$ Cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} a + b = q \\ ab = p. \end{cases}$$

Quindi $a$ e $b$ sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - qx + p = 0.$$

Questa equazione ammette soluzioni reali se e solo se $q^2 - 4p \geq 0$, cioè se $p \leq \frac{q^2}{4}$. Quindi il massimo valore di $p$ è $\frac{q^2}{4}$ e si ottiene per $a = b = \frac{q}{2}$.

Alternativamente, si ha che

$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab.$$

Quindi essendo $a + b = q$ e $ab = p$ si ha

$$q^2 = (a-b)^2 + 4p \implies p = \frac{q^2 - (a-b)^2}{4}.$$

Quindi $p$ è massimo se $(a-b)^2$ è minimo, cioè per $a-b=0$. Pertanto si ha che il massimo valore di $p$ è $\frac{q^2}{4}$ e si ottiene per $a=b=\frac{q}{2}$.

($d$) Cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che
$$\begin{cases} a+b=q \\ ab=p. \end{cases}$$
Quindi $a$ e $b$ sono le soluzioni dell'equazione
$$x^2-qx+p=0.$$
Questa equazione ammette soluzioni reali se e solo se $q^2-4p \geq 0$. Essendo $p, q \geq 0$ essa ammette due soluzioni reali se $q \geq 2\sqrt{p}$. Quindi il minimo valore di $q$ è $2\sqrt{p}$ e si ottiene per $a=b=\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{4}}$.

<u>Alternativamente</u>, si ha che
$$(a+b)^2=(a-b)^2+4ab.$$
Quindi essendo $a+b=q \geq 0$ e $ab=p \geq 0$ si ha
$$q^2=(a-b)^2+4p \quad \Longrightarrow \quad q=\sqrt{(a-b)^2+4p}.$$
Quindi $q$ è minimo se $(a-b)^2$ è minimo, cioè per $a-b=0$. Pertanto si ha che il minimo valore di $q$ è $2\sqrt{p}$ e si ottiene per $a=b=\sqrt{2}\,p^{\frac{1}{4}}$.

($e$) Poniamo
$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b. \end{cases}$$
Quindi $x^2-y^2=60$ equivale a $ab=60$. Se cerchiamo soluzioni $x, y \in \mathbb{N}$ allora, $0<b<a$. Le coppie di numeri naturali $(a, b)$ tali che $ab=60$ sono:
$$(60,1),\ (30,2),\ (20,3),\ (15,4),\ (12,5),\ (10,6).$$
Essendo
$$\begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$
e dovendo essere $x, y \in \mathbb{N}$, si ha che $a$ e $b$ devono essere entrambi pari. Quindi si ottengono $(30,2)$ e $(10,6)$. Pertanto i numeri $x, y \in \mathbb{N}$ cercati sono
$$\begin{cases} x=16 \\ y=14, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=2. \end{cases}$$

Se $x, y \in \mathbb{N}$ sono tali che $x^2 - y^2 = 60$, allora anche $\pm x, \pm y$ risolvono la stessa equazione e appartengono a $\mathbb{Z}$. Pertanto avendo in precedenza determinato due coppie distinte di soluzioni intere positive, si ha che le soluzioni intere dell'equazione $x^2 - y^2 = 60$ sono 8.

## 2 Esercizi sulle equazioni di grado superiore al secondo

**Esercizio.** Risolvere le seguenti equazioni:

$(a)$ $x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 16x + 32 = 0$ $\left[-1;\ 2;\ 1 \pm \sqrt{5}\right]$

$(b)$ $2x^8 + 3x^4 - 2 = 0$ $\left[\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right]$

$(c)$ $3x + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

$(d)$ $\frac{1}{(2x-3)^4} + \frac{2}{(2x-3)^2} - 3 = 0$ $[1;\ 2]$

$(e)$ $\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^4 - 13\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 + 36 = 0.$ $\left[2;\ \frac{5}{2};\ 7;\ 10\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ Si ha che $x = -1$ è una soluzione dell'equazione. Infatti, posto

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 16x + 32 = 0,$$

si ha che $P(-1) = 0$. Procedendo con la regola di Ruffini, si ottiene

$$\begin{array}{c|cccccc|c} & 1 & -5 & 6 & 4 & -24 & 16 & 32 \\ -1 & & -1 & 6 & -12 & 8 & 16 & -32 \\ \hline & 1 & -6 & 12 & -8 & -16 & 32 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha che

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 16x + 32 = (x+1)(x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 16x + 32).$$

Si ha che $x = 2$ è un'altra soluzione dell'equazione. Infatti, $P(2) = 0$. Procedendo con la regola di Ruffini, si ottiene

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & 1 & -6 & 12 & -8 & -16 & 32 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 & 0 & -32 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & -16 & 0 \end{array}$$

Quindi si ha che

$$x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 16x + 32 = (x-2)(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 16).$$

Ne segue che

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 16x + 32 = (x+1)(x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 16x + 32) =$$

$$= (x+1)(x-2)(x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 16).$$

Osserviamo che

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 16 = x^2(x^2 - 4x + 4) - 16 = x^2(x-2)^2 - 16 =$$

$$= [x(x-2) - 4][x(x-2) + 4] = (x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x + 4).$$

Quindi si ha che

$$P(x) = x^6 - 5x^5 + 6x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 16x + 32 = (x+1)(x-2)(x^2 - 2x - 4)(x^2 - 2x + 4).$$

Si ha che

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{20}}{2} = 1 \pm \sqrt{5},$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad \nexists \in \mathbb{R}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione $P(x) = 0$ sono $-1, 2, 1 \pm \sqrt{5}$.

(*b*) L'equazione $2x^8 + 3x^4 - 2 = 0$ è di secondo grado in $x^4$. Si ha che

$$2x^8 + 3x^4 - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x^4\right)_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \begin{cases} -2 \\ \frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'equazione $x^4 = -2$ non ha soluzioni reali mentre $x^4 = \frac{1}{2}$ ammette come soluzioni $\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono $\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

($c$) Per $x \neq 1$ si ha

$$3x + \frac{1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$$
$$\frac{3x(x-1)+1}{x-1} = \frac{3x-2}{x-1}$$
$$3x^2 - 3x + 1 = 3x - 2$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$3(x-1)^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{non accettabile.}$$

Quindi l'equazione non ammette soluzioni reali.

($d$) Posto $t = \frac{1}{(2x-3)^2}$, l'equazione

$$\frac{1}{(2x-3)^4} + \frac{2}{(2x-3)^2} - 3 = 0$$

diventa

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -3 \\ 1. \end{cases}$$

L'equazione $\frac{1}{(2x-3)^2} = -3$ non ammette soluzioni reali, mentre l'equazione

$$\frac{1}{(2x-3)^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2x-3} = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 3 = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{cases} 1 \\ 2. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $1, 2$.

($e$) Posto $t = \left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2$, l'equazione

$$\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^4 - 13\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 + 36 = 0$$

diventa

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ 9. \end{cases}$$

Si ha che

$$\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+2}{x-4} = \pm 2.$$

L'equazione $\frac{x+2}{x-4} = -2$ ha soluzione 2; l'equazione $\frac{x+2}{x-4} = 2$ ha soluzione 10.

Inoltre, si ha che

$$\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+2}{x-4} = \pm 3.$$

L'equazione $\frac{x+2}{x-4} = -3$ ha soluzione $\frac{5}{2}$; l'equazione $\frac{x+2}{x-4} = 3$ ha soluzione 7. Quindi le soluzioni dell'equazione sono $2, \frac{5}{2}, 7, 10$.

## 3 Esercizi sulle disequazioni razionali

**Esercizio.** Risolvere le seguenti disequazioni:

$(a)$ $\quad \dfrac{x-1}{x} + \dfrac{x+1}{x-1} < 3 - \dfrac{2}{x(x-1)}$ $\qquad [x < -1\,,\ 0 < x < 1\,,\ x > 3]$

$(b)$ $\quad (1 + x^2 - 2x)(1 - 6x)(6x - x^2) < 0$ $\qquad \left[x < 0\,,\ \dfrac{1}{6} < x < 6\,,\ x \neq 1\right]$

$(c)$ $\quad \begin{cases} x(x-4) < 12 \\ x(2x-1) + 3 > 4x \\ x^2 + x > -1. \end{cases}$ $\qquad \left[-2 < x < 1\,,\ \dfrac{3}{2} < x < 6\right]$

---

**Svolgimento**

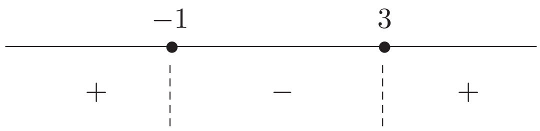
$(a)$

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} < 3 - \frac{2}{x(x-1)}$$
$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x-1} - 3 + \frac{2}{x(x-1)} < 0$$
$$\frac{(x-1)^2 + x(x+1) - 3x(x-1) + 2}{x(x-1)} < 0$$
$$\frac{x^2 - 2x + 1 + x^2 + x - 3x^2 + 3x + 2}{x(x-1)} < 0$$
$$\frac{-x^2 + 2x + 3}{x(x-1)} < 0$$
$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(x-1)} > 0.$$

Studiamo il segno del numeratore. Si ha che

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} -1 \\ 3. \end{cases}$$

Lo schema del segno del numeratore è il seguente




Lo schema del segno del denominatore è il seguente

| | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|
| $+$ | | $-$ | | $+$ |

Lo schema del segno della frazione è il seguente

| | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numeratore | $+$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ |
| denominatore | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| frazione | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ |

Quindi si ha che

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x(x-1)} > 0 \quad \Longrightarrow \quad x < -1,\ 0 < x < 1,\ x > 3.$$

Ne segue che la soluzione della disequazione è: $x < -1$, $0 < x < 1$, $x > 3$.

($b$) La disequazione diventa $(x-1)^2(6x-1)[x(x-6)] < 0$. Lo schema del segno dei singoli fattori e del polinomio è il seguente:

| | | $0$ | | $1/6$ | | $1$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(x-1)^2$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $6x-1$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x(x-6)$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $(x-1)^2(6x-1)[x(x-6)]$ | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |

Quindi si ha che

$$(x-1)^2(6x-1)[x(x-6)] < 0 \quad \Longrightarrow \quad x < 0,\ \frac{1}{6} < x < 6,\ x \neq 1.$$

Ne segue che la soluzione della disequazione è: $x < 0$, $\frac{1}{6} < x < 6$, $x \neq 1$.

($c$) Risolviamo separatamente le singole disequazioni del sistema:

$$\begin{cases} x(x-4) < 12 \\ x(2x-1) + 3 > 4x \\ x^2 + x > -1. \end{cases}$$

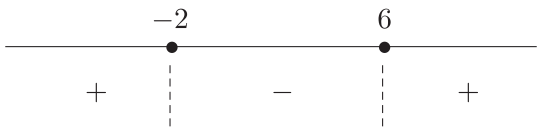
Si ha che

$$x(x-4) < 12 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4x - 12 < 0.$$

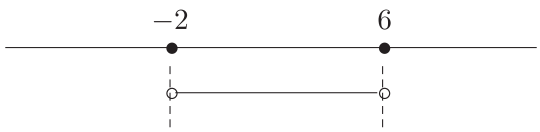
Si ha che

$$x^2 - 4x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} -2 \\ 6. \end{cases}$$

Lo schema del segno di $x^2 - 4x - 12$ è il seguente




Quindi la soluzione della disequazione $x(x-4) < 12$ è $-2 < x < 6$. Graficamente si ha




Si ha che

$$x(2x-1) + 3 > 4x \quad \Longrightarrow \quad 2x^2 - 5x + 3 > 0.$$

Si ha che

$$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{2}. \end{cases}$$

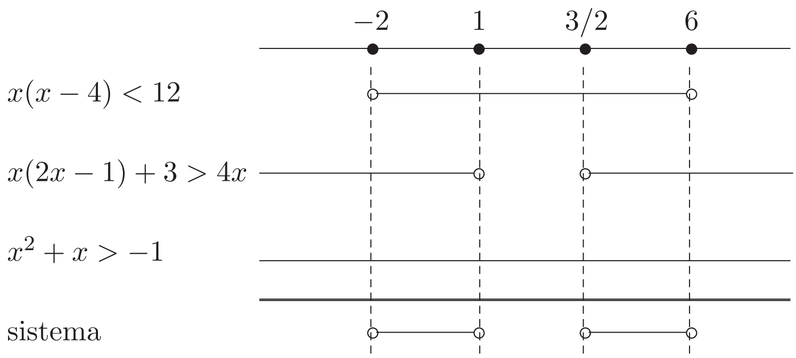
Lo schema del segno di $2x^2 - 5x + 3$ è il seguente


Quindi la soluzione della disequazione $x(2x-1) + 3 > 4x$ è $x < 1, \ x > \frac{3}{2}$. Graficamente si ha


Si ha che

$$x^2 + x > -1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + x + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi lo schema grafico del sistema di disequazioni è il seguente




Ne segue che la soluzione del sistema è $-2 < x < 1\,,\ \frac{3}{2} < x < 6$.

## 4 Esercizi sulle equazioni e disequazioni irrazionali

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

(a) $\sqrt{x} + x = 6$ $[4]$

(b) $\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+6} = -5$ $\left[\frac{10}{9}; 10\right]$

(c) $\sqrt[3]{2+x^3} - x = 1$ $\left[\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}\right]$

(d) $\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$. $[x > 1]$

---

**Svolgimento**

(a) Si ha che l'equazione $\sqrt{x} + x = 6$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 6 - x \geq 0 \\ \sqrt{x} = 6 - x \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq 6 \\ x = (6-x)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq 6 \\ x^2 - 13x + 36 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x \leq 6 \\ x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} x \leq 6 \\ x_{1,2} = \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases} \end{cases} \implies x = 4.$$

Quindi la soluzione è $x = 4$.

(b) L'equazione $\sqrt{x-1} - 2\sqrt{x+6} = -5$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+6} - 5 \geq 0 \\ \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+6} - 5 \end{cases} \implies \begin{cases} 2\sqrt{x+6} \geq 5 \\ x - 1 = \left(2\sqrt{x+6} - 5\right)^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} 4(x+6) \geq 25 \\ x - 1 = 4(x+6) + 25 - 20\sqrt{x+6} \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 20\sqrt{x+6} = 3x + 50 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 400(x+6) = (3x+50)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 400x + 2400 = 9x^2 + 300x + 2500 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ 9x^2 - 100x + 100 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq \frac{1}{4} \\ x_{1,2} = \frac{50 \pm \sqrt{1600}}{9} = \frac{50 \pm 40}{9} = \begin{cases} \frac{10}{9} \\ 10. \end{cases} \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = \frac{10}{9}$ e $x = 10$.

($c$) L'equazione $\sqrt[3]{2+x^3}-x=1$ si può scrivere come $\sqrt[3]{2+x^3}=x+1$ ed è equivalente a

$$2+x^3=(x+1)^3$$

$$2+x^3=x^3+3x^2+3x+1$$

$$3x^2+3x-1=0 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$.

($d$) Si ha che

$$\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}}=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

e questa equazione è sempre verificata, purchè $x>1$. Quindi le soluzioni dell'equazione sono tutti i numeri reali $x>1$.

---

**Esercizio 2.** Risolvere le seguenti disequazioni:

($a$) $x-1<\sqrt{x^3-4x+3}$ $\qquad \left[-\frac{1+\sqrt{13}}{2}\le x<1\,,\ x>\sqrt{2}\right]$

($b$) $\sqrt{2x+3}>\sqrt{4x^2-2x-6}$ $\qquad \left[\frac{1-\sqrt{10}}{2}<x<-1\,,\ \frac{3}{2}<x<\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right]$

($c$) $\sqrt{x+2}<\sqrt{6-x}-\sqrt{5-x}$ $\qquad \left[-2\le x<1-\frac{2}{5}\sqrt{55}\right]$

($d$) $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}-\frac{1}{x}\ge 0.$ $\qquad \left[-2<x<0\,,\ \sqrt{2}\le x<2\right]$

---

**Svolgimento**

(*a*) La disequazione $x-1<\sqrt{x^3-4x+3}$ ha per soluzione l'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$(S_1)\ \begin{cases} x-1<0 \\ x^3-4x+3\geq 0, \end{cases} \qquad\qquad (S_2)\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ (x-1)^2<x^3-4x+3. \end{cases}$$

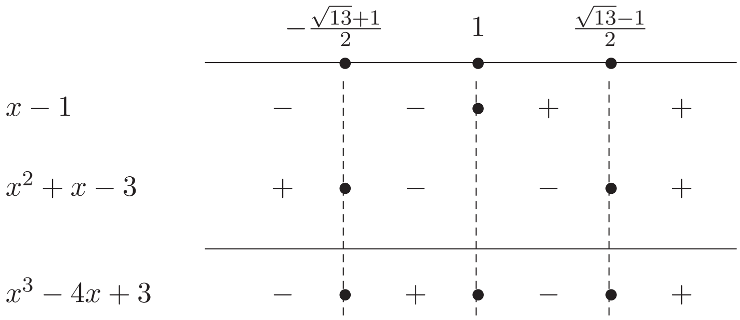
Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1)\ \begin{cases} x-1<0 \\ x^3-4x+3\geq 0, \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x<1 \\ (x-1)(x^2+x-3)\geq 0. \end{cases}$$

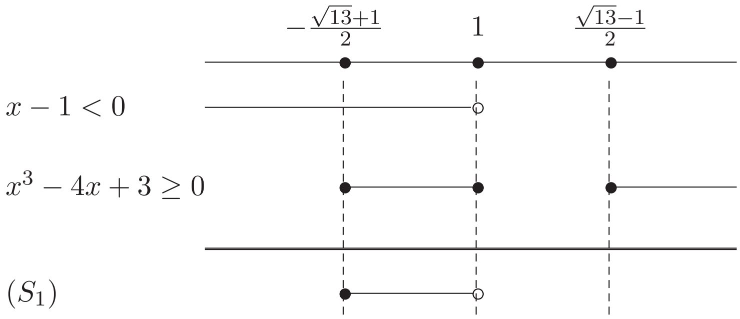
Si ha che

$$x^2+x-3=0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

Lo schema del segno del polinomio $x^3-4x+3=(x-1)(x^2+x-3)$ è il seguente




Lo schema grafico del sistema $(S_1)$ è il seguente




Quindi la soluzione del sistema $(S_1)$ è $-\frac{\sqrt{13}+1}{2}\leq x<1$.

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

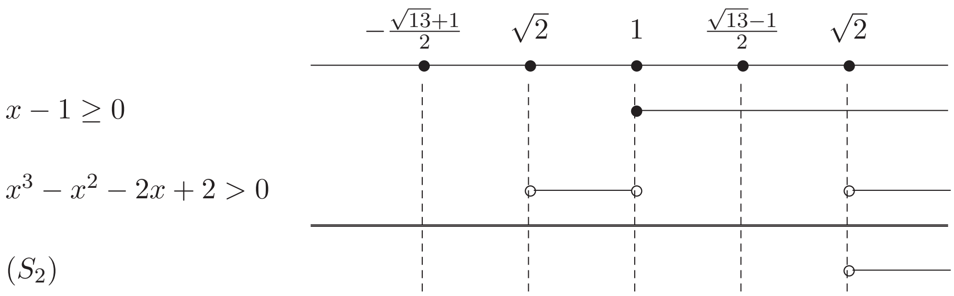
$$(S_2)\ \begin{cases} x-1\geq 0 \\ (x-1)^2<x^3-4x+3 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x^3-x^2-2x+2>0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ (x-1)(x^2-2) > 0. \end{cases}$$

Lo schema del segno del polinomio $x^3 - x^2 - 2x + 2 = (x-1)(x^2-2)$ è il seguente

| | | $-\sqrt{2}$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ | | $+$ |
| $x^2-2$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | | $-$ | $\bullet$ | $+$ |
| $x^3-x^2-2x+2$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ | $\bullet$ | $-$ | $\bullet$ | $+$ |

Lo schema grafico del sistema $(S_2)$ è il seguente




Quindi la soluzione del sistema $(S_2)$ è $x > \sqrt{2}$. Ne segue che la soluzione della disequazione è $-\frac{\sqrt{13}+1}{2} \leq x < 1\,,\ x > \sqrt{2}$.

$(b)$ La disequazione $\sqrt{2x+3} > \sqrt{4x^2-2x-6}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ 4x^2-2x-6 \geq 0 \\ 2x+3 > 4x^2-2x-6. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 4x^2-2x-6 \geq 0 \\ 4x^2-4x-9 < 0. \end{cases}$$

Studiamo il segno del polinomio $4x^2-2x-6$. Si ha che

$$4x^2-2x-6=0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$4x^2 - 2x - 6 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -1,\ x \geq \frac{3}{2}.$$

Studiamo il segno del polinomio $4x^2 - 4x - 9$. Si ha che

$$4x^2 - 4x - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{2}.$$

Quindi

$$4x^2 - 4x - 9 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 - \sqrt{10}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$$

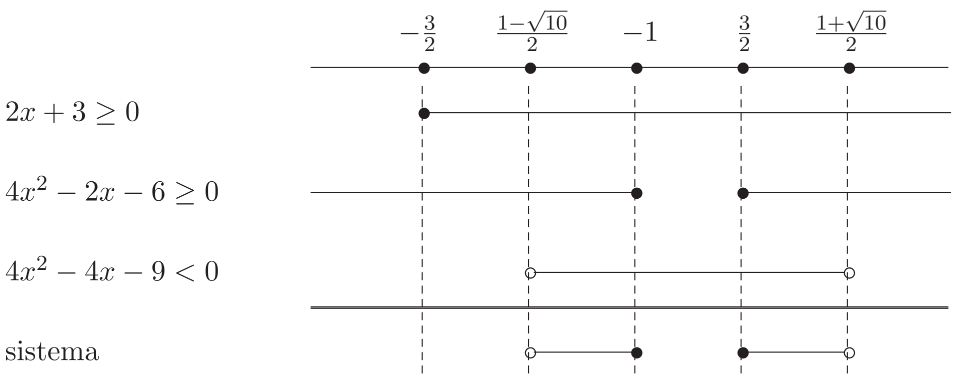
Allora si ha che

$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 0 \\ 4x^2 - 2x - 6 \geq 0 \\ 4x^2 - 4x - 9 < 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq -1,\ x \geq \frac{3}{2} \\ \frac{1-\sqrt{10}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$-\frac{3}{2} < \frac{1 - \sqrt{10}}{2} < \frac{3}{2} < \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$$

Lo schema grafico del sistema è il seguente




Quindi la soluzione della disequazione è $\frac{1-\sqrt{10}}{2} < x \leq -1$ , $\frac{3}{2} \leq x < \frac{1+\sqrt{10}}{2}$.

(*c*) La disequazione $\sqrt{x+2} < \sqrt{6-x} - \sqrt{5-x}$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x + 2 \geq 0 \\ 6 - x \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \\ x + 2 < \left(\sqrt{6-x} - \sqrt{5-x}\right)^2. \end{cases}$$

Quindi si ha

$$\begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 6 \\ x \leq 5 \\ x+2 < 11-2x-2\sqrt{x^2-11x+30} \end{cases} \implies \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ 2\sqrt{x^2-11x+30} < 9-3x \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ 4(x^2-11x+30) < 9x^2-54x+81 \end{cases} \implies \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ 5x^2-10x-39 > 0. \end{cases}$$

Studiamo il segno del polinomio $5x^2-10x-39$. Si ha che

$$5x^2-10x-39 = 0 \implies x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{220}}{5} = 1 \pm \frac{2}{5}\sqrt{55}.$$

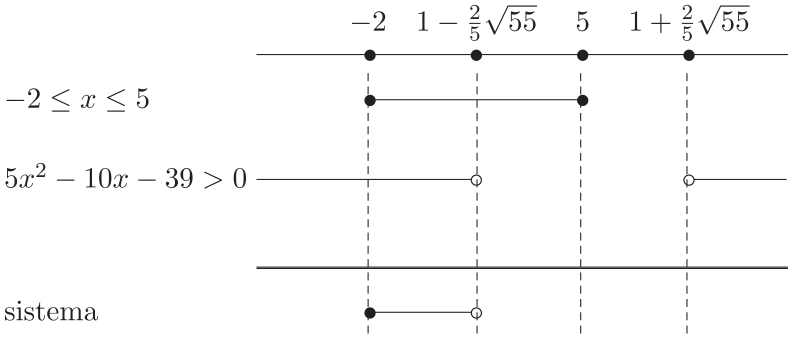
Quindi

$$5x^2-10x-39 > 0 \implies x < 1-\frac{2}{5}\sqrt{55},\ x > 1+\frac{2}{5}\sqrt{55}.$$

Allora si ha che

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ x+2 < \left(\sqrt{6-x}-\sqrt{5-x}\right)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} -2 \leq x \leq 5 \\ x < 1-\frac{2}{5}\sqrt{55},\ x > 1+\frac{2}{5}\sqrt{55}. \end{cases}$$

Lo schema grafico del sistema è il seguente




Quindi la soluzione della disequazione è $-2 \leq x < 1-\frac{2}{5}\sqrt{55}$.

(*d*) Si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\frac{x-\sqrt{4-x^2}}{x\sqrt{4-x^2}} \geq 0.$$

Studiamo il segno del numeratore. Si ha che

$$x-\sqrt{4-x^2}\ge 0 \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{4-x^2}\le x \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \\ 4-x^2\ge 0 \\ 4-x^2\le x^2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2\le 4 \\ 2x^2\ge 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \\ -2\le x\le 2 \\ x^2\ge 2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0 \\ -2\le x\le 2 \\ x\le -\sqrt{2},\ x\ge\sqrt{2} \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \sqrt{2}\le x\le 2.$$

Studiamo il segno del denominatore. Si ha che

$$x\sqrt{4-x^2}>0 \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ 4-x^2>0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x>0 \\ -2<x<2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad 0<x<2.$$

Quindi lo schema grafico del segno della frazione è

| | $-2$ | | $0$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numeratore | | $-$ | | $-$ | • | $+$ | |
| denominatore | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| frazione | | $+$ | | $-$ | • | $+$ | |

Quindi la soluzione della disequazione è $-2<x<0\,,\ \sqrt{2}\le x<2$.

# 5 Esercizi sulle equazioni e disequazioni con il valore assoluto

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

$(a)$ $\quad |x-1| = 1-|x|$ $\qquad [0 \le x \le 1]$

$(b)$ $\quad \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{|x|-1}$ $\qquad [\nexists x \in \mathbb{R}]$

$(c)$ $\quad \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 3\dfrac{x}{|x|} = 0.$ $\qquad \left[\dfrac{4}{3}\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ La soluzione dell'equazione $|x-1| = 1-|x|$ è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1)\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 = 1-|x|, \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x-1 < 0 \\ x-1 = |x|-1. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1)\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ x-1 = 1-|x| \end{cases} \implies \begin{cases} x \ge 1 \\ |x| = 2-x \end{cases} \implies \begin{cases} x \ge 1 \\ x = 2-x \end{cases} \implies x = 1.$$

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2)\begin{cases} x-1 < 0 \\ x-1 = |x|-1 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 1 \\ |x| = x \end{cases} \implies \begin{cases} x < 1 \\ x \ge 0 \end{cases} \implies 0 \le x < 1.$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $0 \le x \le 1$.

$(b)$ La soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{x+1} = \frac{4}{|x|-1}$$

è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1)\begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{x-1}, \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} = -\dfrac{4}{x+1}. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1)\begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{x-1} \end{cases} \implies \begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{4}{x-1} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \ge 0 \\ \dfrac{-3x-5}{(x+1)(x-1)} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2) \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{4}{x+1} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'equazione non ammette soluzioni.

$(c)$ La soluzione dell'equazione

$$\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 3\frac{x}{|x|} = 0$$

è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1) \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 3 = 0, \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 3 = 0. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1) \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{3x+1-3\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x+1-3\sqrt{x^2+1} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3\sqrt{x^2+1} = 3x+1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad 9(x^2+1) = (3x+1)^2 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{4}{3}.$$

Quindi la soluzione del sistema $(S_1)$ è $x = \frac{4}{3}$.

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2) \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{3x+1}{\sqrt{x^2+1}} + 3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{3x+1+3\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3x+1+3\sqrt{x^2+1} = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ 3\sqrt{x^2+1} = -3x-1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ -3x-1 \geq 0 \\ 9(x^2+1) = (3x+1)^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \leq -\frac{1}{3} \\ x = \frac{4}{3} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi il sistema $(S_2)$ non ammette soluzioni. Ne segue che la soluzione dell'equazione è $x = \frac{4}{3}$.

**Esercizio 2.** Risolvere le seguenti disequazioni:

$(a)$ $\quad 1 - \left|1 - x^2\right| > 0$ $\qquad \left[-\sqrt{2} < x < 0\,,\; 0 < x < \sqrt{2}\right]$

$(b)$ $\quad 1 - \Big||x| - 1\Big| > 0$ $\qquad [-2 < x < 0\,,\; 0 < x < 2]$

$(c)$ $\quad 1 + |x - 1| \leq \Big|1 - |x + 1|\Big|$ $\qquad [x \geq 1]$

$(d)$ $\quad \dfrac{\sqrt{|x| - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} \geq \dfrac{x + 3}{|x| + 1}.$ $\qquad \left[\forall x \leq \dfrac{-7 + \sqrt{17}}{2}\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ La disequazione $1 - \left|1 - x^2\right| > 0$ si può scrivere come

$$\left|1 - x^2\right| < 1$$

ed è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 1 - x^2 < 1 \\ 1 - x^2 > -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \neq 0 \\ -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\implies \quad -\sqrt{2} < x < 0\,,\; 0 < x < \sqrt{2}.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $-\sqrt{2} < x < 0\,,\; 0 < x < \sqrt{2}$.

$(b)$ La disequazione $1 - \Big||x| - 1\Big| > 0$ si può scrivere come

$$\Big||x| - 1\Big| < 1$$

ed è equivalente al sistema

$$\begin{cases} |x| - 1 < 1 \\ |x| - 1 > -1 \end{cases} \implies \begin{cases} |x| < 2 \\ |x| > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\implies \quad -2 < x < 0,\; 0 < x < 2.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $-2 < x < 0\,,\; 0 < x < 2$.

$(c)$ La disequazione $1+|x-1| \leq \left|1-|x+1|\right|$ si può scivere come

$$\left|1-|x+1|\right| \geq 1+|x-1|.$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1)\begin{cases} 1-|x+1|<0 \\ 1-|x+1| \leq -1-|x-1|, \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} 1-|x+1| \geq 0 \\ 1-|x+1| \geq 1+|x-1|. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1)\begin{cases} 1-|x+1|<0 \\ 1-|x+1| \leq -1-|x-1| \end{cases} \implies \begin{cases} |x+1|>1 \\ |x+1| \geq |x-1|+2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x<-2, \quad x>0 \\ |x+1| \geq |x-1|+2. \end{cases}$$

Se $x<-2$, allora la disequazione $|x+1| \geq |x-1|+2$ diventa

$$-x-1 \geq -x+1+2 \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Se $x>0$, allora la disequazione $|x+1| \geq |x-1|+2$ diventa

$$x+1 \geq |x-1|+2 \implies |x-1| \leq x-1 \implies x \geq 1.$$

Quindi la soluzione del sistema $(S_1)$ è $x \geq 1$.

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2)\begin{cases} 1-|x+1| \geq 0 \\ 1-|x+1| \leq 1+|x-1| \end{cases} \implies \begin{cases} |x+1| \leq 1 \\ |x-1| \leq -|x+1| \end{cases} \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi il sistema $(S_2)$ non ammette soluzioni. Ne segue che la soluzione della disequazione è $x \geq 1$.

$(d)$ La soluzione della disequazione

$$\frac{\sqrt{|x|-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \frac{x+3}{|x|+1}$$

è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1)\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{x+3}{1-x}, \end{cases} \qquad (S_2)\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{x+3}{x+1}. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1) \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{x+3}{1-x} \end{cases} \implies \begin{cases} x < 0 \\ \dfrac{\sqrt{-x-1}}{\sqrt{(-x-1)(1-x)}} \geq \dfrac{x+3}{1-x} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-x}} - \dfrac{x+3}{1-x} \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{1-x}-x-3}{1-x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x < 1 \\ \sqrt{1-x} \geq x+3. \end{cases}$$

Consideriamo la disequazione $\sqrt{1-x} \geq x+3$ per $x < 1$. La soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq (x+3)^2. \end{cases}$$

Si ha che

$$\begin{cases} x+3 < 0 \\ x < 1 \end{cases} \implies x < -3,$$

$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 1-x \geq (x+3)^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2+7x+8 \leq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq -3 \\ \frac{-7-\sqrt{17}}{2} \leq x \leq \frac{-7+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

essendo $\frac{-7-\sqrt{17}}{2} < -3$,

$$\implies -3 \leq x \leq \frac{-7+\sqrt{17}}{2}.$$

Quindi la soluzione della disequazione $\sqrt{1-x} \geq x+3$ è data da $x \leq \frac{-7+\sqrt{17}}{2}$. Ne segue che la soluzione del sistema $(S_1)$ è $x \leq \frac{-7+\sqrt{17}}{2}$.

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2) \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \geq \dfrac{x+3}{x+1} \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \geq \dfrac{x+3}{x+1} \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x+3}{x+1} \geq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-x-3}{x+1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > 1 \\ \sqrt{x+1} \geq x+3. \end{cases}$$

Consideriamo la disequazione $\sqrt{x+1} \geq x+3$ per $x > 1$. La soluzione è data da

$$x+1 \geq (x+3)^2 \implies x^2+5x+8 \leq 0 \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi il sistema $(S_2)$ non ammette soluzione. Ne segue che la soluzione della disequazione è $x \leq \frac{-7+\sqrt{17}}{2}$.

# Capitolo II

# Equazioni e disequazioni trascendenti

## 1 Esercizi su equazioni e disequazioni logaritmiche

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

$(a)$ $\log x = \log(x^2 - 2)$ $[2]$

$(b)$ $\log(x-1) + \log(x^2+3) = \log(x^2-1)$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

$(c)$ $3(\log x - 1) - (\log x - 1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0.$ $\left[e^2\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ L'equazione $\log x = \log(x^2-2)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2 > 0 \\ x = x^2 - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \sqrt{2},\ x > \sqrt{2} \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{2} \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2. \end{cases} \end{cases}$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $x = 2$.

$(b)$ L'equazione $\log(x-1) + \log(x^2+3) = \log(x^2-1)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 + 3 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \\ \log[(x-1)(x^2+3)] = \log(x^2-1) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1,\ x > 1 \\ (x-1)(x^2+3) = (x^2-1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)(x^2+3) - (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ (x-1)(x^2-x+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 1 \\ x = 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi l'equazione non ammette soluzioni.

$(c)$ Posto $t = \log x - 1$, l'equazione

$$3(\log x - 1) - (\log x - 1)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

diventa

$$3t - t^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$$

$$\sqrt[3]{t} = 3t - 2$$

$$t = (3t-2)^3$$

$$27t^3 - 54t^2 + 35t - 8 = 0.$$

Si ha che $27t^3 - 54t^2 + 35t - 8 = (t-1)(27t^2 - 27t + 8)$. Quindi

$$27t^3 - 54t^2 + 35t - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = 1.$$

Ne segue che

$$\log x - 1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \log x = 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x = e^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = e^2.$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $x = e^2$.

---

**Esercizio 2.** Risolvere le seguenti disequazioni:

$(a)$ $\quad \log_{\frac{3}{4}}(6+5x) \geq 0$ $\qquad \left[-\dfrac{6}{5} < x \leq -1\right]$

$(b)$ $\quad 2\log(x-3) - \log(3x-1) > \log(1+x^2)$ $\qquad [\nexists x \in \mathbb{R}]$

$(c)$ $\quad \log\left(\sqrt{36-x^2} - x\right) > \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ $\qquad \left[-\sqrt{\dfrac{35}{2}} < x < \sqrt{\dfrac{35}{2}}\right]$

$(d)$ $\quad \log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\dfrac{x}{3}\right) > 0.$ $\qquad \left[1 < x < \dfrac{3}{2},\ 2 < x < \dfrac{5}{2},\ x > 3\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ Poichè $\frac{3}{4} < 1$, si ha che la disequazione $\log_{\frac{3}{4}}(6+5x) \geq 0$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 6+5x > 0 \\ 6+5x \leq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x > -\frac{6}{5} \\ x \leq -1 \end{cases} \implies -\frac{6}{5} < x \leq -1.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $-\frac{6}{5} < x \leq -1$.

$(b)$ La disequazione $2\log(x-3) - \log(3x-1) > \log(1+x^2)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 3x-1 > 0 \\ 1+x^2 > 0 \\ \log\dfrac{(x-3)^2}{3x-1} > \log(1+x^2) \end{cases} \implies \begin{cases} x > 3 \\ x > \frac{1}{3} \\ \dfrac{(x-3)^2}{3x-1} > 1+x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > 3 \\ \dfrac{(x-3)^2 - (1+x^2)(3x-1)}{3x-1} > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 3 \\ (x-3)^2 - (1+x^2)(3x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > 3 \\ 3x^3 - 2x^2 + 9x - 10 < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 3 \\ (x-1)(3x^2+x+10) < 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x > 3 \\ x < 1 \end{cases} \implies \nexists x \in \mathbb{R}.$$

Quindi la disequazione non ammette soluzioni.

$(c)$ La disequazione $\log\left(\sqrt{36-x^2} - x\right) > \log\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$ è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \sqrt{36-x^2} - x > 0 \\ \sqrt{1+x^2} - x > 0 \\ \sqrt{36-x^2} - x > \sqrt{1+x^2} - x \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{36-x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > x \\ 36 - x^2 > 1 + x^2 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \sqrt{36-x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > x \\ 36 - x^2 > 1 + x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{36-x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > x \\ x^2 < \frac{35}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{36-x^2} > x \\ \sqrt{1+x^2} > x \\ -\sqrt{\frac{35}{2}} < x < \sqrt{\frac{35}{2}}. \end{cases}$$

Si ha che le soluzioni della disequazione $\sqrt{36-x^2} > x$ sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} x < 0 \\ 36 - x^2 \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0 \\ 36 - x^2 > x^2. \end{cases}$$

Si ha che

$$\begin{cases} x < 0 \\ x^2 \leq 36 \end{cases} \implies \begin{cases} x < 0 \\ -6 \leq x \leq 6 \end{cases} \implies -6 \leq x < 0,$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 18 \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ -3\sqrt{2} < x < 3\sqrt{2} \end{cases} \implies 0 \leq x < 3\sqrt{2}.$$

Quindi

$$\sqrt{36 - x^2} > x \implies -6 < x < 3\sqrt{2}.$$

Inoltre si ha che

$$\sqrt{1 + x^2} > x \implies \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poichè $-6 < -\sqrt{\frac{35}{2}} < \sqrt{\frac{35}{2}} < 3\sqrt{2}$, si ha che

$$\begin{cases} \sqrt{36 - x^2} > x \\ \sqrt{1 + x^2} > x \\ -\sqrt{\frac{35}{2}} < x < \sqrt{\frac{35}{2}} \end{cases} \implies \begin{cases} -6 < x < 3\sqrt{2} \\ -\sqrt{\frac{35}{2}} < x < \sqrt{\frac{35}{2}} \end{cases} \implies -\sqrt{\frac{35}{2}} < x < \sqrt{\frac{35}{2}}.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $-\sqrt{\frac{35}{2}} < x < \sqrt{\frac{35}{2}}$.

$(d)$ La soluzione della disequazione $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$ è data dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$(S_1) \begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ \sqrt{2x^2 - 7x + 6} < 1 \\ \frac{x}{3} < 1, \end{cases} \qquad (S_2) \begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ \sqrt{2x^2 - 7x + 6} > 1 \\ \frac{x}{3} > 1. \end{cases}$$

Consideriamo inizialmente il sistema $(S_1)$. Si ha che

$$(S_1) \begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ \sqrt{2x^2 - 7x + 6} < 1 \\ \frac{x}{3} < 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ 2x^2 - 7x + 5 < 1 \\ x < 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 < x < 3 \\ x < \frac{3}{2},\ x > 2 \\ 1 < x < \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\implies 1 < x < \frac{3}{2},\ 2 < x < \frac{5}{2}.$$

Quindi la soluzione del sistema $(S_1)$ è $1 < x < \frac{3}{2},\ 2 < x < \frac{5}{2}$.

Consideriamo ora il sistema $(S_2)$. Si ha che

$$(S_2)\quad \begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 0 \\ \sqrt{2x^2 - 7x + 6} > 1 \\ \frac{x}{3} > 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ 2x^2 - 7x + 6 > 1 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ 2x^2 - 7x + 5 > 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x > 3 \\ x < 1, \ x > \frac{5}{2} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x > 3.$$

Quindi la soluzione del sistema $(S_2)$ è $x > 3$. Ne segue che la soluzione della disequazione è $1 < x < \frac{3}{2}, \ 2 < x < \frac{5}{2}, \ x > 3$.

## 2 Esercizi su equazioni e disequazioni esponenziali

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

(a) $2e^{2x} - 6e^x + 3 = 0$ $\left[\log\left(\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

(b) $5^{1-x} = 25 \cdot 5^{x^2-1}$ $[-1;\ 0]$

(c) $2 - e^x + 2\sqrt{|e^x - 1|} = 0.$ $\left[\log\left(4 + 2\sqrt{2}\right)\right]$

---

**Svolgimento**

(a) Posto $t = e^x$ l'equazione $2e^{2x} - 6e^x + 3 = 0$ diventa

$$2t^2 - 6t + 3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad t_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3}}{2}.$$

Quindi si ha

$$e^x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = \log\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$e^x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \quad\Longrightarrow\quad x = \log\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = \log\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}\right)$.

(b) L'equazione $5^{1-x} = 25 \cdot 5^{x^2-1}$ si può scrivere come

$$5^{1-x} = 5^{x^2+1} \quad\Longrightarrow\quad 1 - x = x^2 + 1 \quad\Longrightarrow\quad x_{1,2} = \begin{cases} -1 \\ 0. \end{cases}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = -1,\ 0$.

(c) L'equazione $2 - e^x + 2\sqrt{|e^x - 1|} = 0$ si può scrivere come

$$2\sqrt{|e^x - 1|} = e^x - 2$$

ed è equivalente al sistema

$$\begin{cases} e^x - 2 \geq 0 \\ 4\,|e^x - 1| = (e^x - 2)^2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x \geq \log 2 \\ 4e^x - 4 = e^{2x} - 4e^x + 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow\quad \begin{cases} x \geq \log 2 \\ e^{2x} - 8e^x + 8 = 0. \end{cases}$$

Posto $t = e^x$ si ha che l'equazione $e^{2x} - 8e^x + 8 = 0$ diventa

$$t^2 - 8t + 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t_{1,2} = 4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Quindi si ha

$$e^x = 4 - 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \log\left(4 - 2\sqrt{2}\right)$$
$$e^x = 4 + 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x = \log\left(4 + 2\sqrt{2}\right).$$

Ne segue che

$$\begin{cases} x \geq \log 2 \\ e^{2x} - 8e^x + 8 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \geq \log 2 \\ x = \log\left(4 \pm 2\sqrt{2}\right) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = \log\left(4 + 2\sqrt{2}\right).$$

Quindi la soluzione dell'equazione è $x = \log\left(4 + 2\sqrt{2}\right)$.

---

**Esercizio 2.** Risolvere le seguenti disequazioni:

(a) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} < 3$ $\quad\left[\log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < x < \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)\right]$

(b) $3^{2x-1} < 3^{4x^2-x-1}$ $\quad\left[x < -\dfrac{1}{4}\,,\ x > 0\right]$

(c) $x^{\sqrt{x}} \geq \left(\sqrt{x}\right)^x$. $\quad[1 \leq x \leq 4]$

---

**Svolgimento**

(a) Si ha che

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} < 3$$
$$\frac{e^{2x} + 1}{2e^x} - 3 < 0$$
$$\frac{e^{2x} - 6e^x + 1}{2e^x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{2x} - 6e^x + 1 < 0.$$

Posto $t = e^x$ si ha

$$t^2 - 6t + 1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad 3 - 2\sqrt{2} < t < 3 + 2\sqrt{2}.$$

Quindi si ha che

$$3 - 2\sqrt{2} < e^x < 3 + 2\sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad \log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < x < \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right).$$

Ne segue che la soluzione della disequazione è $\log\left(3 - 2\sqrt{2}\right) < x < \log\left(3 + 2\sqrt{2}\right)$.

(*b*) Poichè $3 > 1$ si ha che

$$3^{2x-1} < 3^{4x^2-x-1} \quad \Longrightarrow \quad 2x - 1 < 4x^2 - x - 1 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 - 3x > 0$$
$$\Longrightarrow \quad x < 0,\ x > \frac{3}{4}.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $x < 0,\ x > \frac{3}{4}$.

(*c*) La disequazione $x^{\sqrt{x}} \geq (\sqrt{x})^x$ si può scrivere come

$$x^{\sqrt{x}} \geq \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^x$$
$$x^{\sqrt{x}} \geq x^{\frac{1}{2}x}.$$

Le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei sistemi

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x} \geq \dfrac{1}{2}x. \end{cases}$$

Si ha che

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \leq \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 4x \geq 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \leq 0,\ x \geq 4 \end{cases} \Longrightarrow \nexists x \in \mathbb{R},$$
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x} \geq \dfrac{1}{2}x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq \dfrac{1}{4}x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 4 \end{cases} \Longrightarrow 1 \leq x \leq 4.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $1 \leq x \leq 4$.

<u>Osservazione</u>. Si può procedere anche nel seguente modo: essendo $x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\log x}$, $(\sqrt{x})^x = e^{x\log\sqrt{x}} = e^{\frac{1}{2}x\log x}$, la disequazione diventa $e^{\sqrt{x}\log x} \geq e^{\frac{1}{2}x\log x}$ che implica

$$\sqrt{x}\log x \geq \frac{1}{2}x\log x \quad \Longrightarrow \quad \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x\right)\log x \geq 0$$

la cui soluzione è data dall'unione delle soluzioni dei due sistemi

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{2}x \leq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{2}x \geq 0 \end{cases}$$

che sono proprio quelli che si ottenevano con il metodo precedente.

# 3 Esercizi su equazioni e disequazioni trigonometriche

**Esercizio 1.** Risolvere le seguenti equazioni:

(a) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ $\qquad \left[x = k\pi\,,\ x = (-1)^k\,\dfrac{3}{2}\pi + k\pi\,, \forall k \in \mathbb{Z}\right]$

(b) $2\cos x - \sin x - 2 = 0.$ $\qquad \left[x = 2k\pi\,,\ x = 2k\pi - 2\arctan\dfrac{1}{2},\ \forall k \in \mathbb{Z}\right]$

---

**Svolgimento**

(a) Poichè $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, si ha che l'equazione $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$ diventa

$$\sin^2 x + \sin x = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sin x(\sin x + 1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \sin x = 0,\ \sin x = -1.$$

Si ha che

$$\sin x = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = -1 \quad\Longrightarrow\quad x = (-1)^k\,\frac{3}{2}\pi + k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = k\pi\,,\ x = (-1)^k\,\frac{3}{2}\pi + k\pi\,, \forall k \in \mathbb{Z}$.

(b) Poichè

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}, \qquad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}},$$

posto $t = \tan\frac{x}{2}$, si ha che l'equazione $2\cos x - \sin x - 2 = 0$ diventa

$$2\frac{1 - t^2}{1 + t^2} - \frac{2t}{1 + t^2} - 2 = 0$$

$$2\frac{2t^2 + t}{1 + t^2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad t = -\frac{1}{2},\ 0.$$

Si ha che

$$\tan\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{2} = -\arctan\frac{1}{2} + k\pi \quad\Longrightarrow\quad x = -2\arctan\frac{1}{2} + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan\frac{x}{2} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{x}{2} = k\pi \quad\Longrightarrow\quad x = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi le soluzioni dell'equazione sono $x = 2k\pi\,,\ x = 2k\pi - 2\arctan\frac{1}{2},\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

---

**Esercizio 2.** Risolvere le seguenti disequazioni:

$(a)$ $\sin x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{2}{3}\pi + 2k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right]$

$(b)$ $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) > -\dfrac{1}{2}$

$\left[-\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2}{3}k\pi < x < \dfrac{1}{3}\pi + \dfrac{2}{3}k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}\right]$

$(c)$ $\sin x(\sin x + \cos x) \leq 0\,,$ con $-\pi \leq x \leq \pi$ $\left[-\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq 0\,,\ \dfrac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi\right]$

$(d)$ $\dfrac{2\sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} > 0\,,$ con $-\pi \leq x \leq 2\pi$.

$\left[-\pi < x < -\dfrac{5}{6}\pi\,,\ -\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{7}{6}\pi\,,\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi\right]$

---

**Svolgimento**

$(a)$ Graficamente la disequazione $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ si può rappresentare nell'intervallo $[0, 2\pi]$ come

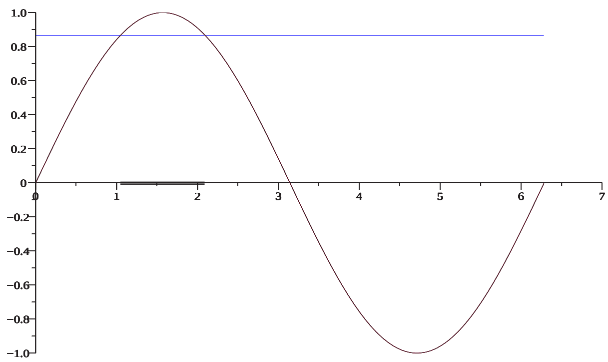



**Fig. a:** Grafici di $y = \sin x$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e della soluzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Quindi nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la soluzione è $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$. Ne segue che la soluzione complessiva è $\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

$(b)$ Posto $t = 3x - \frac{\pi}{3}$ la disequazione $\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{1}{2}$ diventa

$$\cos t > -\frac{1}{2}$$

che si può rappresentare nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come

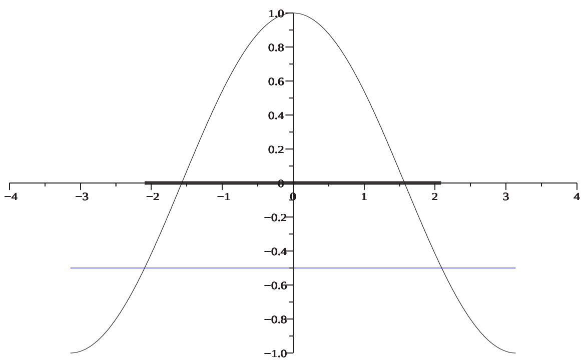



**Fig. b:** Grafici di $y = \cos x$, $y = -\frac{1}{2}$ e della soluzione nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Quindi nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la soluzione di $\cos t > -\frac{1}{2}$ è $-\frac{2}{3}\pi < t < \frac{2}{3}\pi$. Ne segue che la soluzione complessiva è $-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < t < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}$. Quindi si ha che

$$-\frac{2}{3}\pi + 2k\pi < 3x - \frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi la soluzione della disequazione è $-\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{1}{3}\pi + \frac{2}{3}k\pi\,,\ \forall k \in \mathbb{Z}$.

$(c)$ Consideriamo la disequazione $\sin x(\sin x + \cos x) \leq 0$ con $-\pi \leq x \leq \pi$. Si ha che

$$\sin x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$\sin x + \cos x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin x \geq -\cos x$$

che si può rappresentare nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ come

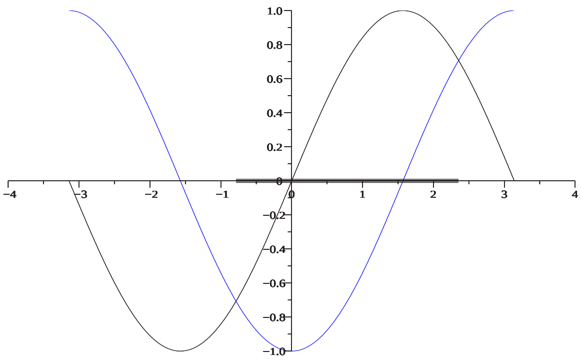



**Fig. c:** Grafici di $y = \sin x$, $y = -\cos x$ e della soluzione di $\sin x \geq -\cos x$ in $[-\pi, \pi]$.

Quindi $\sin x \geq -\cos x$ in $[-\pi, \pi]$ se $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$.

Lo schema grafico del segno di $\sin x(\sin x + \cos x)$ è

| | $-\pi$ | | $-\frac{\pi}{4}$ | | $0$ | | $\frac{3}{4}\pi$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin x$ | • | $-$ | | $-$ | • | $+$ | | $+$ | • |
| $\sin x + \cos x$ | | $+$ | • | $+$ | | $+$ | • | $-$ | |
| $\sin x(\sin x + \cos x)$ | • | $+$ | • | $-$ | • | $+$ | • | $-$ | • |

Quindi la soluzione della disequazione è $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0\,,\ \frac{3}{4}\pi \leq x \leq \pi$.

$(d)$ Consideriamo la disequazione

$$\frac{2\sin x + 1}{(2 + \sin x)^2} > 0\,, \qquad \text{con } -\pi \leq x \leq 2\pi.$$

Poichè $-1 \leq \sin x \leq 1$, è equivalente a

$$2\sin x + 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \sin x > -\frac{1}{2}$$

che si può rappresentare nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$ come

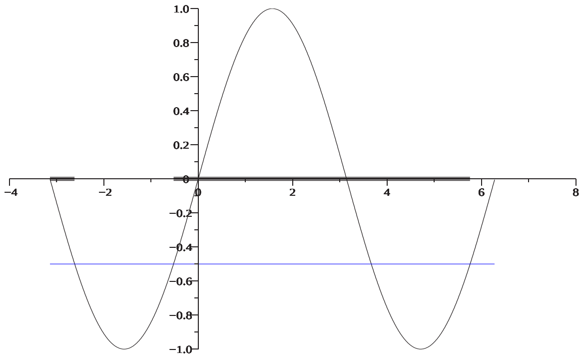



**Fig. d:** Grafici di $y = \sin x$, $y = -\frac{1}{2}$ e della soluzione nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$.

Quindi la soluzione della disequazione è $-\pi < x < -\frac{5}{6}\pi$ , $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{7}{6}\pi$ , $\frac{11}{6}\pi < x < 2\pi$.