4. Limiti di funzioni

Introduciamo il concetto di limite di una funzione in un punto. Si tratta dell'idea seguente: se abbiamo assegnato una funzione f su A sappiamo calcolare i valori f(x) corrispondenti ai numeri $x \in A$. Immaginiamo ora di far variare il punto x e di muoverlo avvicinandoci ad un punto x0 fissato, e seguiamo i valori corrispondenti f(x). Se siamo fortunati, quando x si avvicina ad x0 anche i valori f(x) si avvicinano ad un valore L; allora diciamo che L è il limite di f nel punto x0. Notare che non ci interessa il valore di f proprio in quel punto: stiamo solo studiando il comportamento dei valori f(x) quando ci avviciniamo a x0. Naturalmente possiamo avvicinare x a x0 da destra o da sinistra, o da tutti e due i lati.
Prima di dare le definizioni precise, richiamiamo la seguente notazione per indicare un intervallo di estremi a, b:

$[a,b]=\{x\in R : a\le x\le b\}$
$]a,b]=\{x\in R : a< x\le b\}$
$[a,b[\,=\{x\in R : a\le x< b\}$
$]a,b[\,=\{x\in R : a< x< b\}$

L'intervallo $[a,b]$ si dice *chiuso*, mentre $]a,b[$ è detto aperto. Inoltre $]a,b]$ è detto *aperto a sinistra* e *chiuso a destra*. Gli intervalli sopra scritti si dicono *limitati*. Si considerano anche gli intervalli *illimitati*:

$[a,+\infty[\,=\{x\in R : x\ge a\}$
$]a,+\infty[\,=\{x\in R : x> a\}$
$]-\infty,b]=\{x\in R : x\le b\}$
$]-\infty,b[\,=\{x\in R : x< b\}$
$]-\infty,+\infty[\,=R$

I numeri a e b sono detti *estremi* dell'intervallo.

Definizione 1. Sia $f:]x_0,b[\,\to R$ una funzione. Si dice che f ha limite destro L in x0 (o che f tende a L da destra in x0) se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

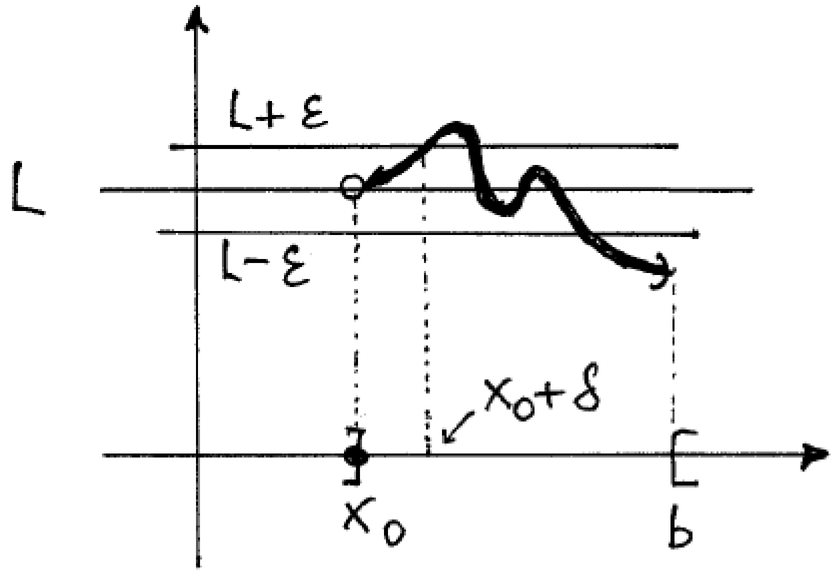
$$|f(x)-L|<\epsilon \quad \text{per} \quad x_0<x<x_0+\delta.$$

Si scrive

$$L=\lim_{x\to x_0^+} f(x),$$

o anche

$$f(x)\to L \quad \text{per} \quad x\to x_0^+.$$



Definizione 2. Sia $f:]a,x_0[\to R$ una funzione. Si dice che f ha limite sinistro L in x0 (o che f tende a L da sinistra in x0) se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

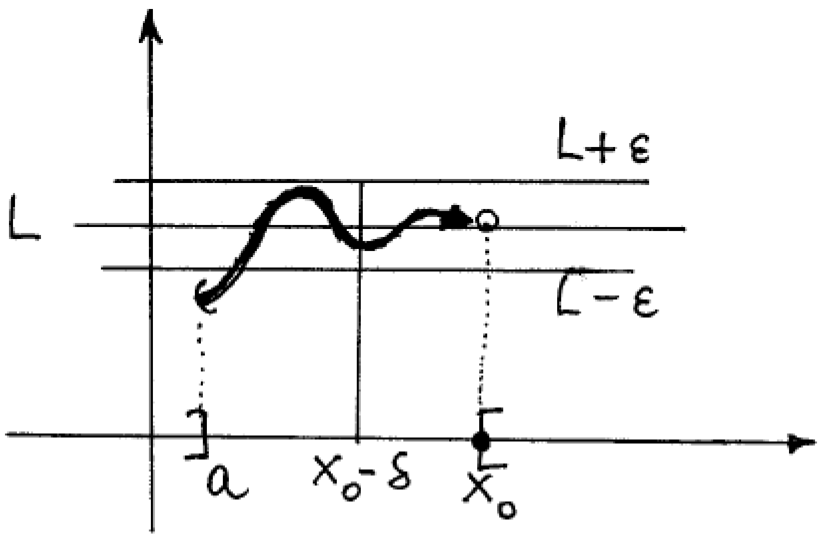
$$|f(x)-L|<\epsilon \quad \text{per} \quad x_0-\delta<x<x_0.$$

Si scrive

$$L=\lim_{x\to x_0^-} f(x),$$

o anche

$$f\to L \quad \text{per} \quad x\to x_0^-.$$



Definizione 3. Si dice che f ha limite L in x0 (o che f tende a L in x0) se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

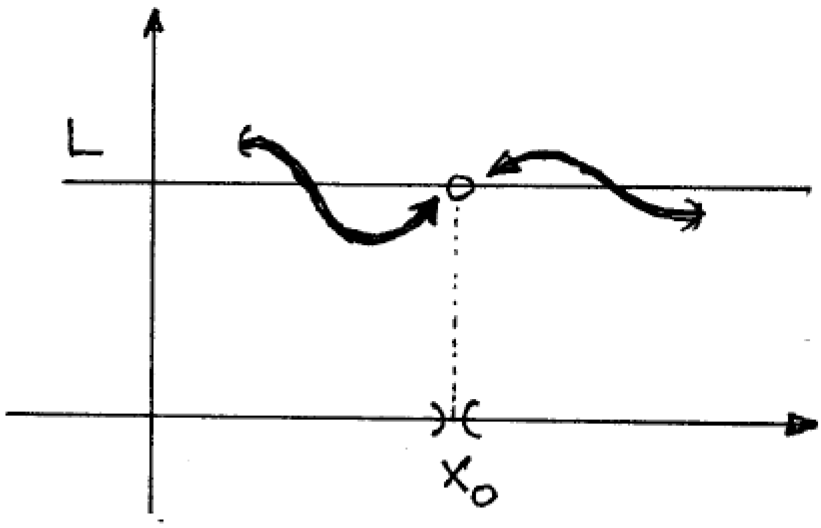
$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Si scrive

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x),$$

o anche

$$f \to L \quad \text{per} \quad x \to x_0.$$



Definizione formale di $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

$\forall \varepsilon \in R^{+} \exists \delta_{\varepsilon} > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 \, | x - x_0 | < \delta : | f(x) - l | < \varepsilon$

Osservazione 1. Si possono verificare vari casi: una funzione f può non avere limiti in un punto x0; può avere limite da destra ma non da sinistra, e viceversa; oppure può avere limite sia da destra che da sinistra. In quest'ultimo caso, i due limiti possono essere uguali o diversi; quando sono uguali, allora esiste anche il limite di f in x0.
In altri termini: dire che f tende a L in x0 equivale a dire che f tende a L sia da destra che da sinistra!

Osservazione 2. Attenzione: nelle definizioni precedenti non ci interessa sapere quanto vale la funzione f nel punto x0 in cui calcoliamo il limite; ci interessano solo i valori f(x) per x vicino a x0. Vediamo un esempio semplicissimo: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

vale 0 in tutti i punti vicini all'origine, ma nell'origine vale 1. Quindi il limite destro e il limite sinistro di f(x) per $x \to 0$ sono uguali a 0, e quindi anche il limite di f(x) in 0 è uguale a 0:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0.$$

Notare che invece il valore di f in 0 è f(0) = 1.

Esempio 1. La funzione segno di x è definita così:

$$f(x) = \text{sgn}(x) \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

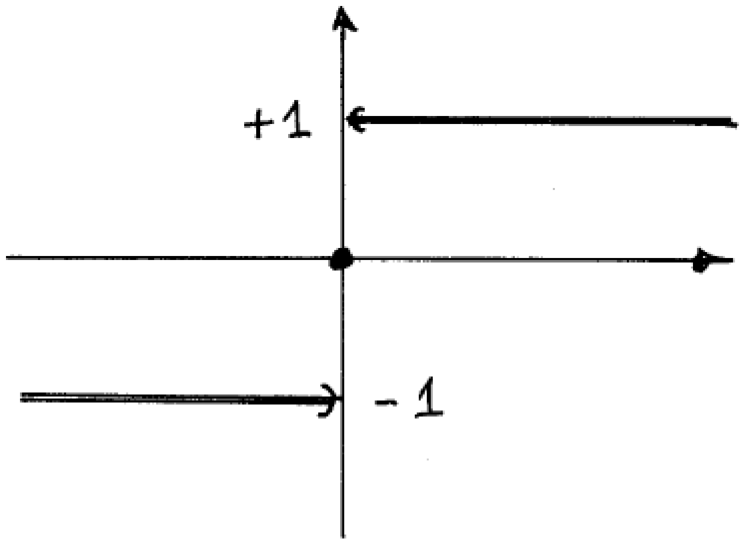


Grafico della funzione sgn(x)

Allora si ha subito

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1,$$

ossia il limite destro e il limite sinistro sono diversi. Quindi il

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

non esiste.

Esempio 2. Proviamo a calcolare il limite della funzione $f(x) = x^2$ nel punto x0 = 3 (se esiste!)

$$\lim_{x \to 3} x^2 = L = ?$$

Vogliamo far vedere che il limite esiste e vale esattamente 9. Ricordando la definizione, dobbiamo mostrare che: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x^2 - 9| < \epsilon \quad \text{per} \quad 0 < |x-3| < \delta.$$

Fissato ε, come dobbiamo scegliere δ? Anzitutto prendiamolo piccolo: se $\delta < 1$ si ha

$$|x-3| < \delta \implies |x-3| < 1 \implies 2 < x < 4 \implies |x+3| < 7.$$

Ma non basta ancora; prendiamo δ ancora più piccolo, ad esempio $\delta = \varepsilon/8$; allora possiamo scrivere

$$|x^2 - 9| = |x-3| \cdot |x+3| < \frac{\epsilon}{8} \cdot 7 < \epsilon$$

e ora siamo riusciti a dimostrare la tesi.
Notare che in questo caso

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$$

cioè il limite è esattamente uguale al valore della funzione in quel punto. Questo è il caso più comune: per la maggior parte delle funzioni non c'è bisogno di fare ragionamenti complicati per calcolare il limite in un punto, ma basta calcolare il valore della funzione in quel punto. In generale, per ogni polinomio P(x)

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

Ad esempio:

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - 6x - 4) = 2^3 - 6 \cdot 2 - 4 = -8.$$

Un caso che non rientra nelle definizioni precedenti ma è molto interessante è quello degli **asintoti verticali**: ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

non ha limite per $x \to 0$, nè da destra nè da sinistra. In questi casi diciamo che la funzione tende all'infinito in quel punto, o che ha limite infinito. Il simbolo che si usa per l'infinito è ∞. Vediamo la definizione precisa:

Definizione 4. Si dice che f tende a $+\infty$ per $x \to x_0^+$ e si scrive $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ se per ogni M esiste un δ tale che

$$f(x) > M \quad \text{per} \quad x_0 < x < x_0 + \delta.$$

Le definizioni di $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ sono analoghe (sostituire $x_0 - \delta < x < x_0$ e $0 <| x - x_0 |< \delta$ rispettivamente).
Si dice che f tende a $-\infty$ quando vale la condizione precedente con f(x) < M invece di f(x) > M. In tutti questi casi si dice anche che la funzione ha un **asintoto verticale** nel punto x = x0.
Formalmente:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
$\forall M \in R\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 \; | x - x_0 |< \delta : f(x) > M$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
$\forall M \in R\, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \in A, x \neq x_0 \; | x - x_0 |< \delta : f(x) < M$

Per concludere con le definizioni di limite, c'è un ultimo caso che non abbiamo ancora considerato: spesso è interessante studiare il comportamento di una funzione per valori di x molto grandi; in alcuni casi la funzione tende ad un valore L (**asintoto orizzontale**), in altri la funzione diventa molto grande, e in altri casi il comportamento non è chiaro. Diamo le definizioni precise anche per questa situazione:

Definizione 5. Si dice che f tende ad L per $x \to +\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ se per ogni ε esiste un K tale che

$$|f(x) - L| < \epsilon \quad \text{per} \quad x > K.$$

(La definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ è analoga, basta sostituire x > K con x < K.)
In questi casi si dice che la funzione ha un **asintoto orizzontale** y = L.
Formalmente:

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta \in R : \forall x \in A, x > \delta :| f(x) - l |< \varepsilon$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$
$\forall \varepsilon \in R^+ \exists \delta \in R : \forall x \in A, x < \delta :| f(x) - l |< \varepsilon$

Definizione 6. Si dice che f tende a $+\infty$ per $x \to +\infty$ e si scrive $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se per ogni M esiste un K tale che

$$f(x) > M \quad \text{per} \quad x > K.$$

La definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ è analoga, basta sostituire x<K a x>K.

Formalmente.
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
$\forall M \in R\, \exists \delta \in R : \forall x \in A, x > \delta : f(x) > M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
$\forall M \in R\ \exists \delta \in R : \forall x \in A,\ x < \delta :\ f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
$\forall M \in R\ \exists \delta \in R : \forall x \in A,\ x > \delta :\ f(x) < M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
$\forall M \in R\ \exists \delta \in R : \forall x \in A,\ x < \delta :\ f(x) < M$

Esempio 3. Vediamo alcuni limiti elementari che seguono subito dalle proprietà delle funzioni elementari e dalle definizioni precedenti. Anzitutto le potenze:
per n > 0 intero abbiamo sempre

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

mentre si ha chiaramente

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty \text{ per } n \text{ pari}, \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty \text{ per } n \text{ dispari}.$$

Per le potenze negative il limite è zero:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ per ogni } n > 0 \text{ intero}$$

quindi l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale. Notiamo anche che si ha sempre
per n > 0 intero

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

mentre bisogna distinguere

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty \text{ per } n \text{ pari}, \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty \text{ per } n \text{ dispari}.$$