# 6. Funzioni continue

Dal punto di vista intuitivo una funzione $f : I \to R$, definita su un intervallo I,è continua se è possibile tracciarne il grafico senza staccare la matita dal foglio o,se preferite, il gesso dalla lavagna. La nozione rigorosa di continuità è data dalla seguente definizione.

**Definizione 1**. Sia $f : I \to R$ una funzione definita su un intervallo I e sia x0 un punto di I. La funzione si dice continua nel punto x0 se il limite di f per $x \to x_0$ esiste ed è uguale al valore della funzione in quel punto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

La funzione si dice continua su I se è continua in tutti i punti di I.

**Esempio 1**. Nei paragrafi precedenti abbiamo visto che tutte le funzioni elementari verificano la proprietà appena definita: quindi le funzioni elementari sono tutte continue sul loro dominio.
Inoltre la somma, il prodotto e il rapporto (se il denominatore è $\neq 0$) di funzioni continue sono ancora funzioni continue: questo segue subito dalla Proposizione 1 del capitolo sulle proprietà dei limiti.
Ad esempio per vedere che f + g è continua basta scrivere

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0).$$

anche la composizione di funzioni continue è continua: infatti se f(x) _è continua in x0, g(y) è continua in y0 = f(x0), ed è possibile comporre le due funzioni, allora ponendo y = f(x)

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0))$$

ossia g(f(x)) è continua in x0.

**Esempio 2**. Le funzioni

$$\sin(x^2 - e^x + 2x), \quad \log(\sqrt{x}), \quad e^{\sin(x^2)+x-3}, \quad xe^{-\frac{1}{x}}$$

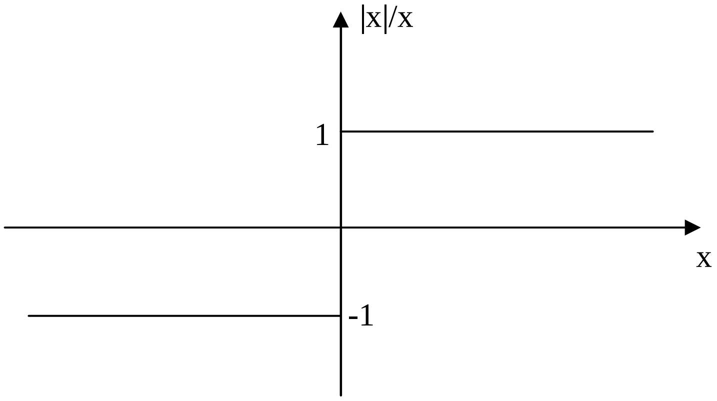
sono continue sul loro insieme di definizione, in quanto ottenute tramite somma, prodotto, rapporto e composizione di funzioni continue. Studiamo ora alcune proprietà molto importanti delle funzioni continue:

**Teorema 1** (Teorema degli zeri). Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua. Supponiamo che f(a) < 0 e f(b) > 0. Allora esiste un punto c fra a e b nel quale la funzione f si annulla: f(c) = 0. Lo stesso risultato vale se f(a) > 0 e f(b) < 0.
<u>Spiegazione</u>. La dimostrazione rigorosa è abbastanza complicata e quindi la omettiamo; dal punto di vista intuitivo il teorema degli zeri è chiaro. Il piano $R^2$ è diviso dall'asse delle ascisse in due semipiani, quello superiore $\{(x, y) : y > 0\}$ e quello inferiore $\{(x, y) : y < 0\}$. Provate adesso a disegnare il grafico di f: dovete congiungere il punto (a; f(a)), situato nel semipiano inferiore, con il punto (b; f(b)), situato nel semipiano superiore. Siccome f è continua non potete sollevare la matita dal foglio e ad un certo punto dovete incrociare l'asse delle ascisse.

**Esempio 3**
La funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & se \quad x > 0 \\ -1 & se \quad x < 0 \end{cases}$$

è continua per $x \neq 0$, ma non è continua se $x = 0$. Il grafico di questa funzione presenta per $x = 0$ un salto, appunto una *discontinuità*.




In particolare, la funzione f(x) non è continua nel punto $x_0 = 0$ perché non è definita in tal punto, cioè perché non esiste il valore $f(x_0) = f(0)$.
Se calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

Di conseguenza non esiste il limite di $\frac{|x|}{x}$ per $x \to 0$, quindi la funzione non è continua in 0.