7. Derivate

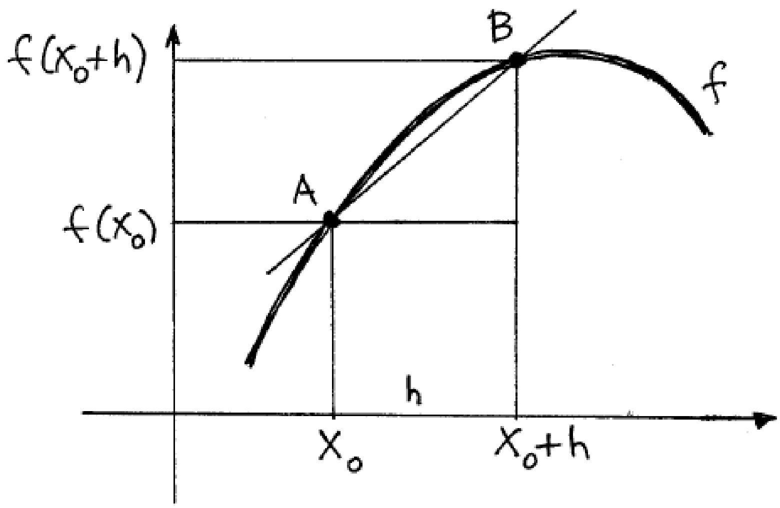
Il concetto di derivata è importantissimo e molto naturale. Per avere un esempio concreto, pensate al moto di una macchina: se f(t) è la funzione che esprime quanta strada avete percorso fino ad un certo istante t, allora la velocità a cui state andando è esattamente la derivata di f (cioè il tachimetro segna la derivata del contachilometri...).
Detto in un altro modo, la derivata di una funzione esprime la velocità con cui quella funzione cresce o decresce al variare del punto x.
In altre parole, consideriamo un'automobile che percorre una strada, ed indichiamo con s(t) lo spazio percorso in funzione del tempo t. La *velocità media* dell'automobile nell'intervallo di tempo $[t, t+h]$ è uguale al rapporto tra lo spazio percorso $s(t+h)-s(t)$ ed il tempo h impiegato a fare il percorso. La *velocità istantanea* (quella indicata dal tachimetro sul cruscotto dell'auto, se s(t) è espresso in chilometri e t in ore), è il limite, per $h \to 0$, della velocità media; quindi la velocità istantanea sarà uguale a

$$\lim_{h \to o} \frac{s(t+h)-s(t)}{h} \quad (1)$$

Dalla (1) si evince che occorre calcolare il limite del *rapporto incrementale*, così chiamato perché a denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente, mentre a numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.
Studiamo la definizione precisa di questo concetto.

Definizione 1. Sia $f: I \to R$ una funzione sull'intervallo aperto I e sia x0 un punto di I. Per ogni $h \neq 0$ abbastanza piccolo, il rapporto incrementale di f in x0 è il rapporto

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$



Il rapporto incrementale ha un senso geometrico preciso: esprime l'inclinazione (= il coefficiente angolare) della retta passante per i punti A = (x0; f(x0)) e B = (x0+h; f(x0+h)). Se ora consideriamo valori di h sempre più piccoli, non è difficile intuire che la retta AB si avvicina sempre di più alla retta tangente al grafico di f nel punto A. La definizione rigorosa è semplicissima:

Definizione 2. Si dice che f è derivabile in x0 se esiste il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Tale limite si chiama la derivata di f in x0 e si indica con $f^{'}(x_0)$.

Si dice che f è derivabile se è derivabile in tutti i punti del suo dominio; la funzione $f^{'}(x)$ si chiama anche la (funzione) derivata di f.

Osservazione 1. Il significato geometrico della derivata è chiaro: quando facciamo tendere h a zero, e quindi avviciniamo il punto B lungo la curva al punto A, la retta AB si avvicina sempre di più alla retta tangente al grafico di f in A. Quindi è naturale interpretare il valore di $f^{'}(x_0)$ come la pendenza della retta tangente al grafico nel punto A. Se vogliamo determinare completamente la retta tangente, basta osservare che essa deve avere la forma $y = ax + b$, abbiamo già detto che $a = f^{'}(x_0)$, inoltre la retta deve passare per A = (x0; f(x0)) e quindi

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b \implies b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

e in conclusione l'equazione della retta tangente nel punto A è

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Esempio 1. Studiamo alcuni casi in cui il calcolo della derivata è immediato.
Se f(x) = C è una funzione costante, il rapporto incrementale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{C-C}{h} \equiv 0$$

si annulla sempre, dunque anche il limite è zero; in conclusione, una funzione costante è derivabile ed ha derivata nulla:

$$f(x) \equiv C = cost. \implies f'(x) \equiv 0 \quad (\text{ossia } C' = 0).$$

Se f(x) = ax + b, abbiamo subito

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} \equiv a$$

e quindi la derivata di f(x) = ax + b è costante ed uguale al coefficiente angolare a:

$$(ax+b)' \equiv a.$$

Se $f(x) = x^2$, allora

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{(x_0+h)^2-(x_0)^2}{h} = 2x_0+h$$

e mandando h a zero si ottiene

$$f'(x_0) = 2x_0$$

ossia semplicemente

$$(x^2)' = 2x.$$

Con un calcolo simile si ottiene che per ogni $n \geq 1$ intero

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

Esempio 2. Non è difficile calcolare la derivata delle funzioni elementari. Consideriamo ad esempio la funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Si ha

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{e^{x_0+h}-e^{x_0}}{h} = \frac{e^h-1}{h}e^{x_0}$$

e quindi se mandiamo h a zero otteniamo subito

$$f'(x_0) = e^{x_0}$$

ossia abbiamo ottenuto la semplice regola

$$(e^x)' = e^x.$$

Esempio 3. Non tutte le funzioni sono derivabili! Ad esempio la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile nel punto x0 = 0. Per verificarlo scriviamo il rapporto incrementale in x0 = 0:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Chiaramente il limite per $h \to 0$ di questo rapporto non esiste: infatti il limite destro è uguale a

$$\lim_{h\to 0+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0+} \frac{h}{h} = 1,$$

mentre il limite sinistro è uguale a

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Notare però che $|x|$ è derivabile sia sull'intervallo x > 0, dove $|x| = x$ e quindi la derivata vale +1, sia sull'intervallo x < 0, dove $|x| = -x$ e quindi la derivata vale -1 .
Le seguenti proprietà ci metteranno in grado di derivare tutte le funzioni ottenute come combinazioni di funzioni elementari:

Proposizione 1. Se f è derivabile in x0 allora f è continua in x0.

<u>Dimostrazione</u>. Basta partire dalla seguente identità:

$$f(x_0 + h) = h \cdot \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + f(x_0).$$

Se calcoliamo il limite per $h \to 0$ otteniamo allora

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = 0 \cdot f'(x_0) + f(x_0) = f(x_0)$$

e ponendo x = x0 + h otteniamo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia f è continua in x0.

Proposizione 2 (Regole di derivazione). Siano f e g due funzioni derivabili. Allora valgono le seguenti regole di derivazione:

$$(f + g)' = f' + g', \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

e, dove g è diversa da zero,

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Verifichiamo soltanto la prima regola (le altre si dimostrano in modo simile, anche se con qualche conto in più): il rapporto incrementale di f +g in un punto x0 è uguale a

$$\frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}$$

e calcolando il limite per $h \to 0$ otteniamo subito

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+g(x_0+h)-f(x_0)-g(x_0)}{h}=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Proposizione 3 (Derivata della funzione composta). Se f e g sono derivabili ed è possibile comporle, anche la funzione composta h(x) = g(f(x)) è derivabile e vale la regola di derivazione

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x).$$

[<u>Senza</u> <u>dimostrazione</u>]

Esempio 4 Proviamo che la derivata del logaritmo in base a ($a>0,\ a\neq 1$) di x vale:

$$\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

Utilizziamo le proprietà del logaritmo (tra cui la sua continuità) ed il limite notevole (cambiando $x\to 0$ con $h\to 0$ e b con $1/x$)

$$\lim_{x\to 0^{\pm}}\left(1+bx\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{by}=\left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{b}=e^{b}$$

Nel limite notevole cambiamo $x\to 0$ con $h\to 0$ e b con $1/x$, quindi.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\log_a\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=$$
$$=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e$$

Risulta ora chiaro l'interesse nel considerare logaritmi in base e: dato che $\log_e e=1$, la derivata in base *e* di x è semplicemente:

$$\left(\log x\right)'=\frac{1}{x},\quad \forall x>0$$

Riassumiamo nella tabella seguente le regole elementari di derivazione:

$f(x)$	$f'(x)$
costanti	0
x^a	ax^{a-1}
$\log x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$\log a \cdot a^x$
$e^{g(x)}$	$g'(x)e^{g(x)}$
$\log(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$