LE FUNZIONI POLINOMIALI

$$y = -x^2 + 7x + 5$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è polinomiale, essa risulta definita su tutto l'asse reale, cioè:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere i seguenti due sistemi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -x^2 + 7x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, 5)}$$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = -x^2 + 7x + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 7x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 7x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 20}}{2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{69}}{2} \cong -0{,}65 \\ x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{69}}{2} \cong +7{,}65 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = \left(\dfrac{7 - \sqrt{69}}{2}, 0\right)} \text{ e } \boxed{C = \left(\dfrac{7 + \sqrt{69}}{2}, 0\right)}$$

sono le due intersezioni della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Per lo studio del segno della funzione occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

dalla quale risulta poi possibile ricavare sia i valori della x per i quali la funzione è positiva, ovvero si trova al di sopra dell'asse x, che quelli per i quali è negativa, ovvero si trova al di sotto dell'asse x. Nell'esempio in esame, quindi, si ha:

$$y > 0 \Rightarrow -x^2 + 7x + 5 > 0 \Rightarrow x^2 - 7x - 5 < 0 \Rightarrow \boxed{\dfrac{7 - \sqrt{69}}{2} < x < \dfrac{7 + \sqrt{69}}{2}}$$

Ne segue che la funzione data è positiva per valori interni ad x_1 ed x_2:

	$x_1 = \dfrac{7 - \sqrt{69}}{2}$		$x_2 = \dfrac{7 + \sqrt{69}}{2}$	
$- - - - -$		$+ + + + +$		$- - - - -$
$y < 0$		$y > 0$		$y < 0$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Per il calcolo dei limiti delle funzioni polinomiali, occorre ricordare che, in generale, vale la seguente proprietà:
Se $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ è una generica funzione polinomiale nella variabile x, allora il suo limite, per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$ ($x\to\pm\infty$), si ottiene calcolando il limite, per $x\to\pm\infty$, del monomio di grado massimo che figura nel polinomio, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(a_0x^n\right) = a_0 \lim_{x\to+\infty}\left(x^n\right) = \begin{cases} +\infty \; se \; a_0 \; è positivo, \forall n \\ -\infty \; se \; a_0 \; è negativo, \forall n \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(a_0x^n\right) = a_0 \lim_{x\to-\infty}\left(x^n\right) = \begin{cases} +\infty \; se \; n \; è \; pari \; ed \; a_0 \; è positivo \\ -\infty \; se \; n \; è \; pari \; ed \; a_0 \; è negativo \\ -\infty \; se \; n \; è \; dispari \; ed \; a_0 \; è \; positivo \\ +\infty \; se \; n \; è \; dispari \; ed \; a_0 \; è \; negativo \end{cases}$$

Risulta allora possibile, in virtù di quanto sopra esposto, calcolare i limiti agli estremi del campo di esistenza di tutte le funzioni polinomiali.
Nell'esempio si ha:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(-x^2 + 7x + 5\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-x^2\right) = -\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right) = -\left(+\infty\right)^2 = -\left(+\infty\right) = \boxed{-\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^2 + 7x + 5\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x^2\right) = -\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right) = -\left(-\infty\right)^2 = -\left(+\infty\right) = \boxed{-\infty}$$

Ne segue che, per $x \to +\infty$, la $y \to -\infty$ e, per $x \to -\infty$, la $y \to -\infty$.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Ricordando che (cfr. capitolo sulle derivate):

- $D[P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x)] = D[P_1(x)] + D[P_2(x)] + \ldots + D[P_n(x)]$
- $D(a_0\, x^n) = a_0D(x^n) = a_0nx^{n-1}$
- $D(x) = 1$
- $D(a_0) = 0$ dove con a_0 si indica una qualunque costante

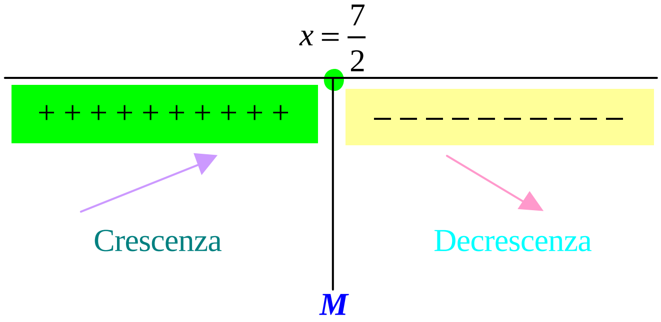
si ottiene, nell'esempio:
$D(-x^2 + 7x + 5) = D(-x^2) + D(7x) + D(5) = -2x + 7 + 0 = -2x + 7$
Per lo studio del segno della derivata prima si procede in maniera analoga a quanto fatto precedentemente per lo studio del segno della funzione. Occorre, cioè, risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

Nel caso in esame, quindi:

$$-2x + 7 > 0 \Rightarrow 2x - 7 < 0 \Rightarrow \boxed{x < \frac{7}{2}}$$

Ne segue che la derivata prima è positiva per $x < \frac{7}{2}$, cioè:



Per $x = \frac{7}{2}$, valore in cui la derivata prima si annulla, la funzione presenta un *Massimo M*.

Per determinare l'ordinata corrispondente al valore dell'ascissa $x = \frac{7}{2}$, è sufficiente sostituire tale valore nella funzione di partenza $y = -x^2 + 7x + 5$. Pertanto si ha:

$$y = -\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 7\left(\frac{7}{2}\right) + 5 = -\frac{49}{4} + \frac{49}{2} + 5 = \frac{-49 + 98 + 20}{4} = \frac{69}{4}$$

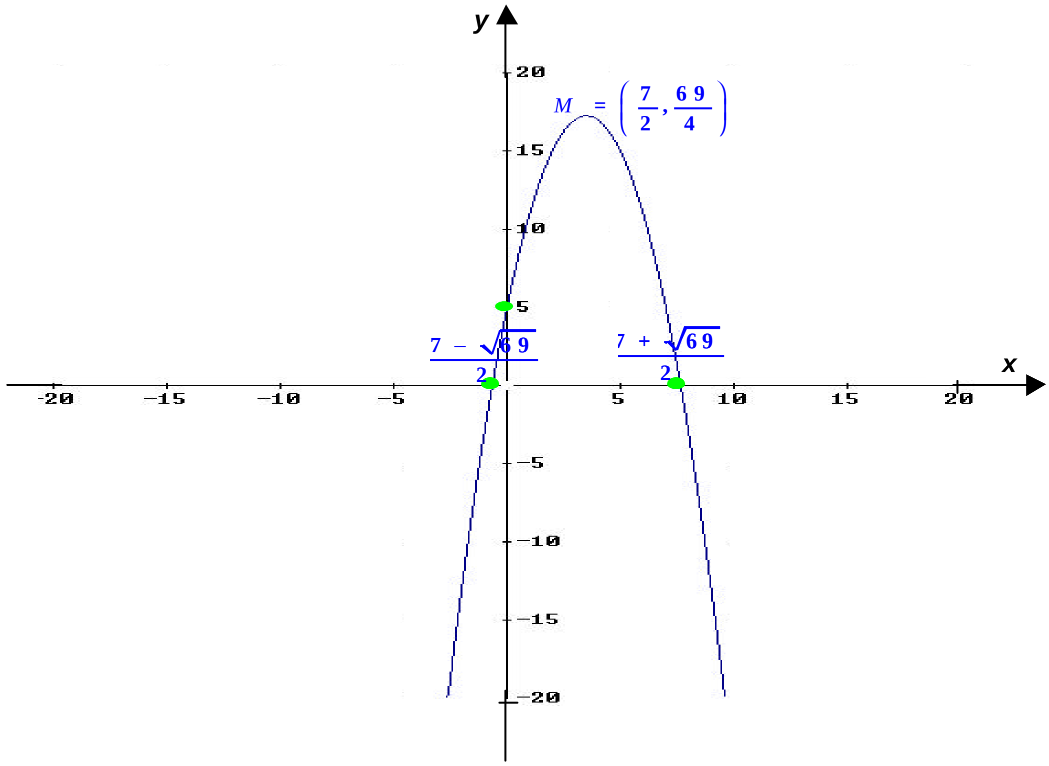
Dunque $\boxed{M = \left(\frac{7}{2}, \frac{69}{4}\right)}$ è il *punto di Massimo*.

***Osservazioni*.**

1. Ogni funzione polinomiale è definita su tutto l'asse reale.
2. Le funzioni polinomiali, che non siano delle rette (cioè funzioni di primo grado), non hanno asintoti di nessun tipo.

IL GRAFICO.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$y = x^3 - x$

CAMPO DI ESISTENZA.

Anche in questo caso ci si trova di fronte ad una funzione polinomiale, per cui risulta:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani è più conveniente scrivere la funzione nel seguente modo:

$$y = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$$

Ne segue allora:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,\, 0)}$$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x(x-1)(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x(x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

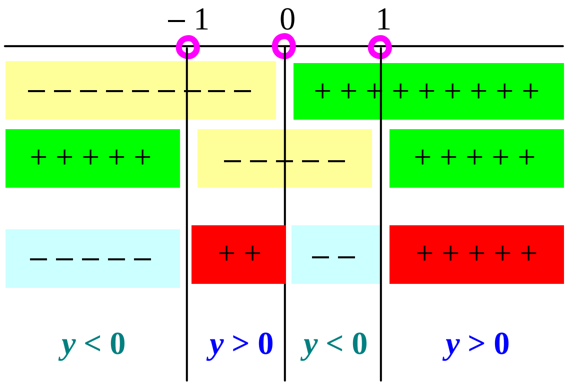
$\Rightarrow \boxed{B = (0,\, 0) = A}$; $\boxed{C = (1,\, 0)}$ e $\boxed{D = (-1,\, 0)}$ sono le intersezioni della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$

Ne segue:



cioè la funzione è positiva per $-1 < x < 0$ e $1 < x < +\infty$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3 - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = (+\infty)^3 = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} y} = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3 - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = (-\infty)^3 = \boxed{-\infty}$$

Quindi, per $x \to +\infty$, la $y \to +\infty$ e, per $x \to -\infty$, la $y \to -\infty$.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

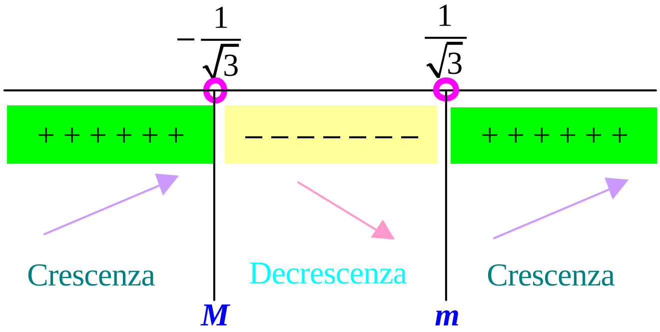
Risulta:

$D(x^3 - x) = 3x^2 - 1$

da cui segue:

$3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0{,}57,\, x > +\frac{1}{\sqrt{3}} \cong +0{,}57}$

cioè:



Occorre ora determinare le ordinate relative ai massimi e minimi ottenuti:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-1+3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cong 0{,}38$$

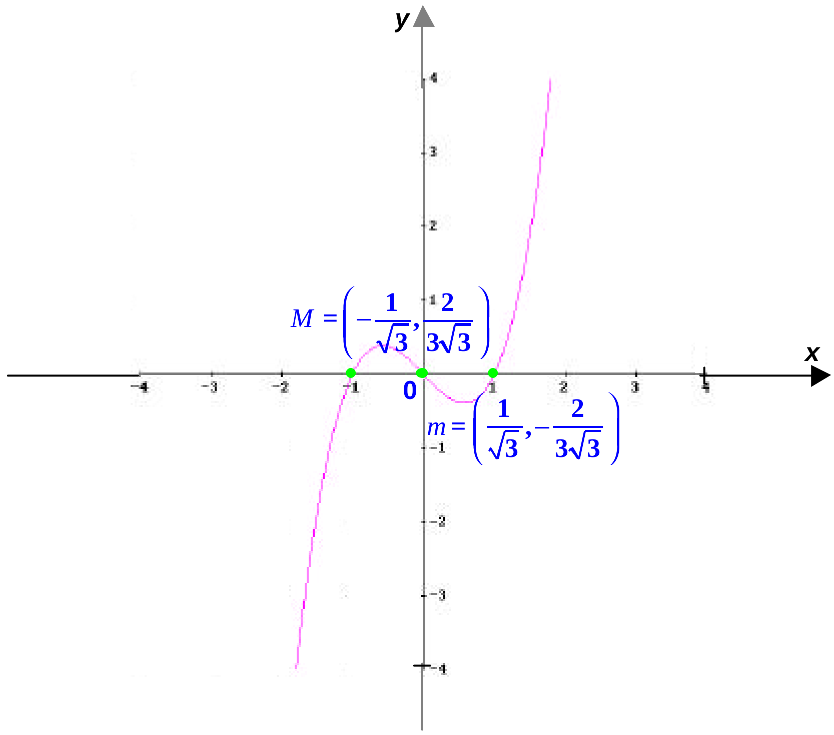
$$x = +\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3^3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1-3}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9} \cong -0{,}38$$

Dunque:

$\boxed{M = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}$ è il *punto di Massimo*.

$\boxed{M = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}$ è il *punto di minimo*.

IL GRAFICO.



$y = 7(x^3 - x)$

Campo di Esistenza.

Si osservi che la funzione data è simile alla precedente, anche se moltiplicata per il fattore 7. Quindi si ha:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

Intersezioni con gli Assi.

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 7(x^3 - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, 0)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = 7x(x-1)(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 7x(x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1 \end{cases} \Rightarrow$

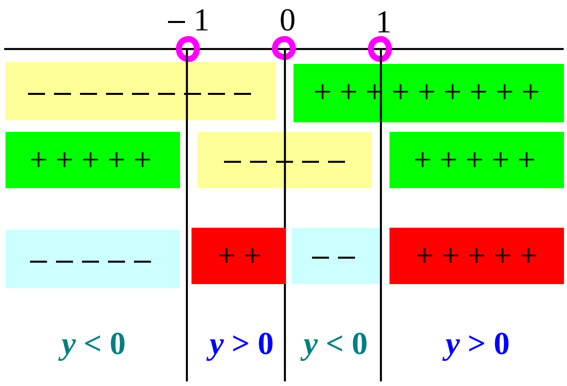
$\Rightarrow \boxed{B = (0, 0) = A}$; $\boxed{C = (1, 0)}$ e $\boxed{D = (-1, 0)}$ sono le intersezioni della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow 7(x^3 - x) > 0 \Rightarrow 7x(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -1, x > +1 \end{cases}$$

Ne segue:



cioè la funzione è positiva per $-1 < x < 0$ e $1 < x < +\infty$.

Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Si ha:

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} y} = \lim_{x \to +\infty} \left[7\left(x^3 - x\right)\right] = 7 \lim_{x \to +\infty} \left(x^3\right) = 7\left(+\infty\right)^3 = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} y} = \lim_{x \to -\infty} \left[7\left(x^3 - x\right)\right] = 7 \lim_{x \to -\infty} \left(x^3\right) = 7\left(-\infty\right)^3 = \boxed{-\infty}$$

Quindi, per $x \to +\infty$, la $y \to +\infty$ e, per $x \to -\infty$, la $y \to -\infty$.

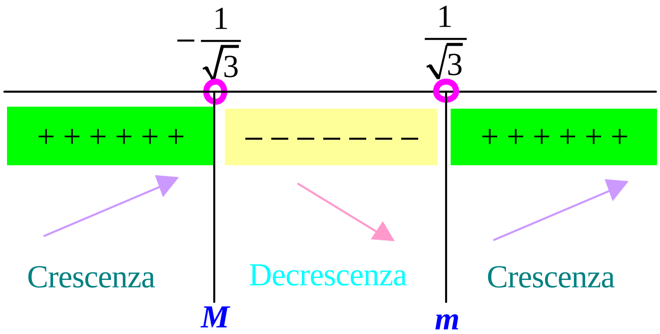
STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

$D[7(x^3 - x)] = D(7x^3 - 7x) = 21x^2 - 7$

da cui segue:

$$21x^2 - 7 > 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \cong -0{,}57,\ x > +\frac{1}{\sqrt{3}} \cong +0{,}57}$$



$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 7\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = -\frac{7}{\sqrt{3^3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = -\frac{7}{3\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{-7+21}{3\sqrt{3}} = \frac{14}{3\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{9} \cong 2{,}69$$

$$x = +\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

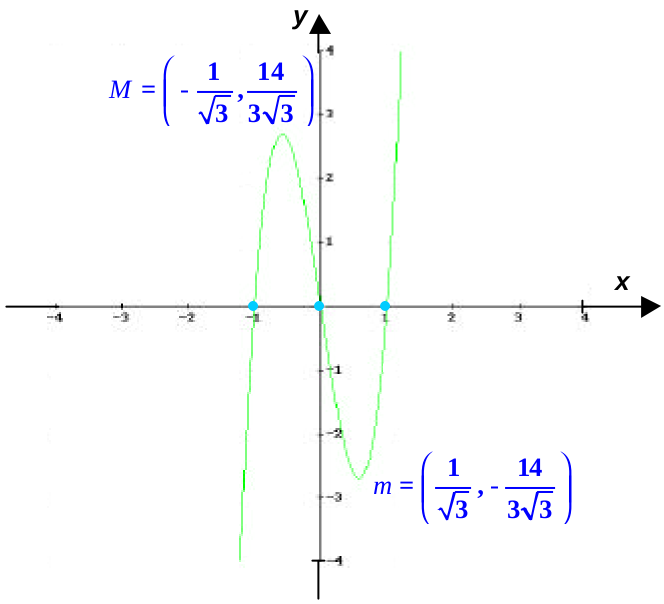
$$\Rightarrow y = 7\left[\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{7}{\sqrt{3^3}} - \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{1-21}{3\sqrt{3}} = -\frac{20}{3\sqrt{3}} = -\frac{20\sqrt{3}}{9} \cong -3{,}84$$

Dunque:

$\boxed{M = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{14\sqrt{3}}{9}\right)}$ è il *punto di Massimo*.

$\boxed{m = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{14\sqrt{3}}{9}\right)}$ è il *punto di minimo*.

IL GRAFICO.



Il grafico ottenuto è uguale al precedente ma traslato di 7, fattore moltiplicativo della funzione di partenza

$$y = x^3 - x^2 - 12x$$

Campo di Esistenza.

Anche in questo caso ci si trova di fronte ad una funzione polinomiale, per cui risulta:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

Intersezioni con gli Assi.

È conveniente scrivere la funzione raccogliendo la x:

$$y = x^3 - x^2 - 12x = x(x^2 - x - 12)$$

Ne segue allora:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 - x^2 - 12x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,\ 0)}$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x\left(x^2 - x - 12\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x\left(x^2 - x - 12\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x^2 - x - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_{2,3} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \dfrac{1 \pm 7}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

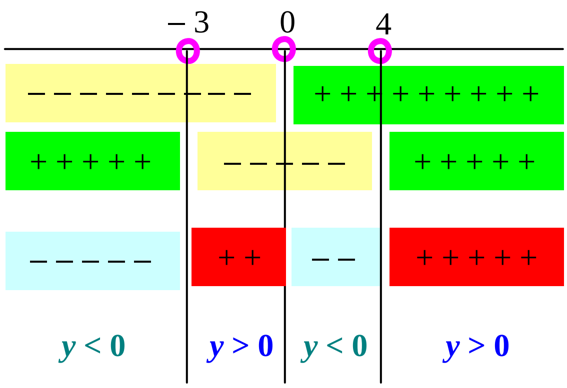
$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 0, x_2 = -3, x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (0,\ 0) = A}$; $\boxed{C = (-3,\ 0)}$ e $\boxed{D = (4,\ 0)}$

sono le intersezioni della funzione con l'asse x

Segno della Funzione.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 12x > 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 12) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < -3, x > +4 \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $-3 < x < 0$ e $4 < x < +\infty$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2-12x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3-x^2-12x\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right) = \boxed{-\infty}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

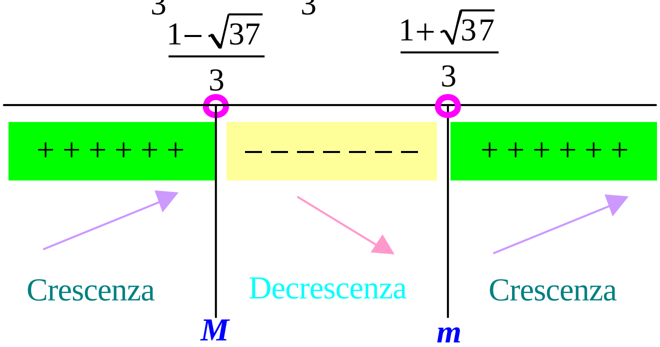
$D(x^3 - x^2 - 12x) = 3x^2 - 2x - 12$

da cui segue:

$$3x^2 - 2x - 12 > 0 \Rightarrow \boxed{x < \frac{1-\sqrt{37}}{3} \cong -1{,}69,\ x > \frac{1+\sqrt{37}}{3} \cong 2{,}36}$$

essendo:

$$3x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+36}}{3} = \frac{1\pm\sqrt{37}}{3}$$



$$x = \frac{1-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y = \left(\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{1-\sqrt{37}}{3}\right) = \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)^3}{27} - \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)^2}{9} - 4\left(1-\sqrt{37}\right) =$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)^3 - 3\left(1-\sqrt{37}\right)^2 - 108\left(1-\sqrt{37}\right)}{27} = \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)\left[\left(1-\sqrt{37}\right)^2 - 3\left(1-\sqrt{37}\right) - 108\right]}{27} =$$

$$= \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)\left(1+37-2\sqrt{37}-3+3\sqrt{37}-108\right)}{27} = \frac{\left(1-\sqrt{37}\right)\left(\sqrt{37}-73\right)}{27} = \frac{\sqrt{37}-73-37+73\sqrt{37}}{27} =$$

$$= \frac{74\sqrt{37}-110}{27} \cong 12{,}59$$

$$x=\frac{1+\sqrt{37}}{3}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y=\left(\frac{1+\sqrt{37}}{3}\right)^{3}-\left(\frac{1+\sqrt{37}}{3}\right)^{2}-12\left(\frac{1+\sqrt{37}}{3}\right)=\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)^{3}}{27}-\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)^{2}}{9}-4\left(1+\sqrt{37}\right)=$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)^{3}-3\left(1+\sqrt{37}\right)^{2}-108\left(1+\sqrt{37}\right)}{27}=\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)\left[\left(1+\sqrt{37}\right)^{2}-3\left(1+\sqrt{37}\right)-108\right]}{27}=$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)\left(1+37+2\sqrt{37}-3-3\sqrt{37}-108\right)}{27}=\frac{\left(1+\sqrt{37}\right)\left(-\sqrt{37}-73\right)}{27}=\frac{-\sqrt{37}-73-37-73\sqrt{37}}{27}=$$

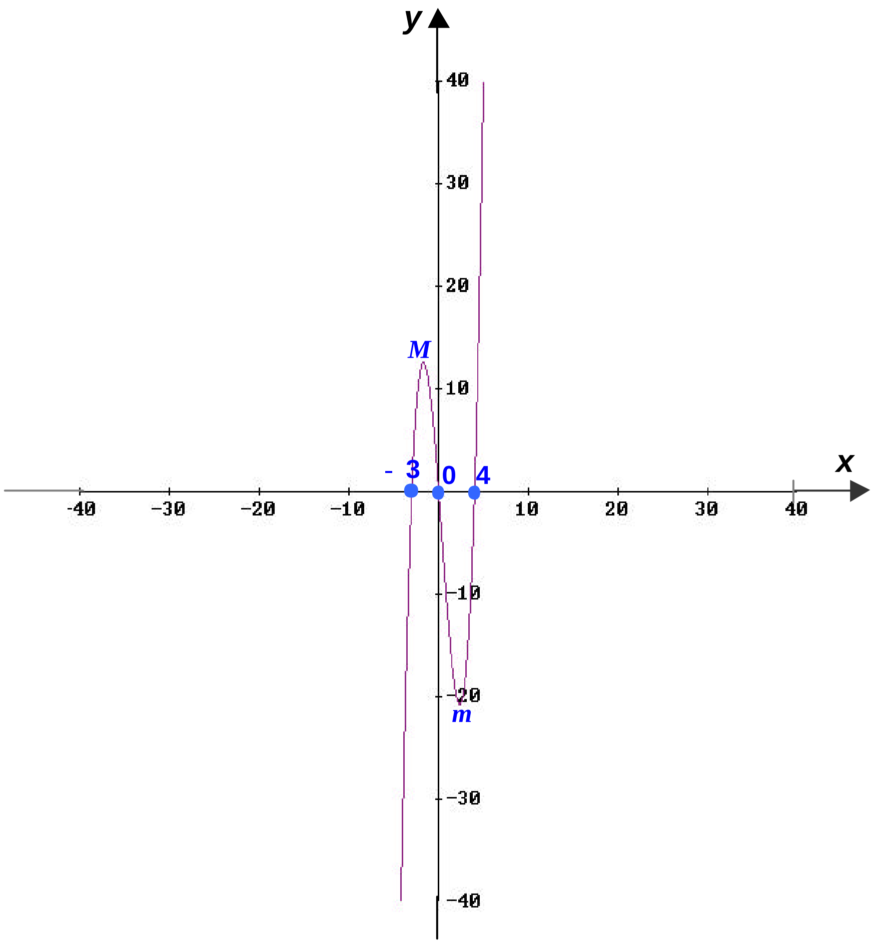
$$=\frac{-74\sqrt{37}-110}{27}\cong-20{,}74$$

Dunque:

$$\boxed{M=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{74\sqrt{37}-110}{27}\right)}$$ è il *punto di Massimo*.

$$\boxed{m=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{-74\sqrt{37}-110}{27}\right)}$$ è il *punto di minimo*.

IL GRAFICO.



$$y = x^3 + x^2 + 2x - 4$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Anche in questo caso ci si trova di fronte ad una funzione polinomiale, per cui risulta:

$$\boxed{C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Poiché si è in presenza di un polinomio di terzo grado, occorre, in primo luogo, vedere se è possibile scomporlo nel prodotto di due polinomi, uno di primo grado ed uno di secondo grado, attraverso la Regola di Ruffini. I divisori del termine noto, 4, sono esattamente ± 1, ± 2, ± 4. Ma allora si ha:

$P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4 \Rightarrow P(x = 1) = 1^3 + 1^2 + 2(1) - 4 = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$

cioè per $x = 1$ il polinomio si annulla. Quindi si ottiene il seguente prospetto:

	1	1	2	– 4
1		1	2	4
	1	2	4	0

Pertanto il polinomio $P(x)$ si può scrivere anche nel seguente modo:

$P(x) = x^3 + x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x^2 + 2x + 4)$

Quindi risulta:

$y = x^3 + x^2 + 2x - 4 = (x - 1)(x^2 + 2x + 4)$

È ora possibile determinare le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = x^3 + x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, -4)}$$

è il punto di intersezione della funzione con l'asse y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = x^3 + x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ (x-1)(x^2 + 2x + 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1, x^2 + 2x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

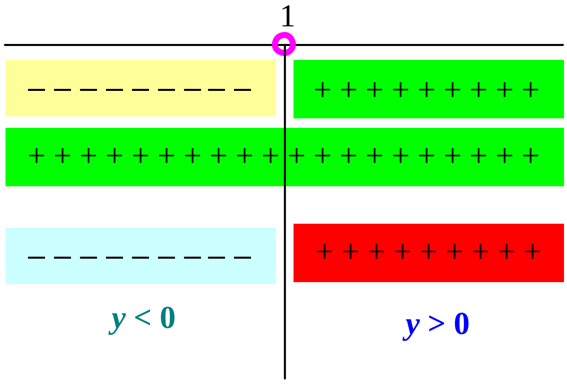
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1, x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{1} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B = (1, 0)}$$

è l'intersezione della funzione con l'asse x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Risulta:

$$y > 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + 2x - 4 > 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+2x+4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 > 0 \\ x^2 + 2x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$



cioè la funzione è positiva per $x > 1$.

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3+x^2+2x-4\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3+x^2+2x-4\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right) = \boxed{-\infty}$$

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Risulta:

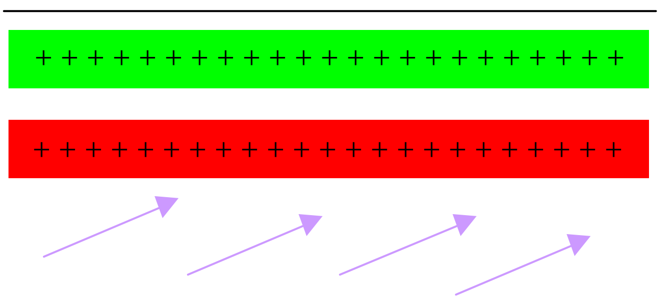
$D(x^3 + x^2 + 2x - 4) = 3x^2 + 2x + 2$

da cui segue:

$$3x^2 + 2x + 2 > 0 \Rightarrow \boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

essendo:

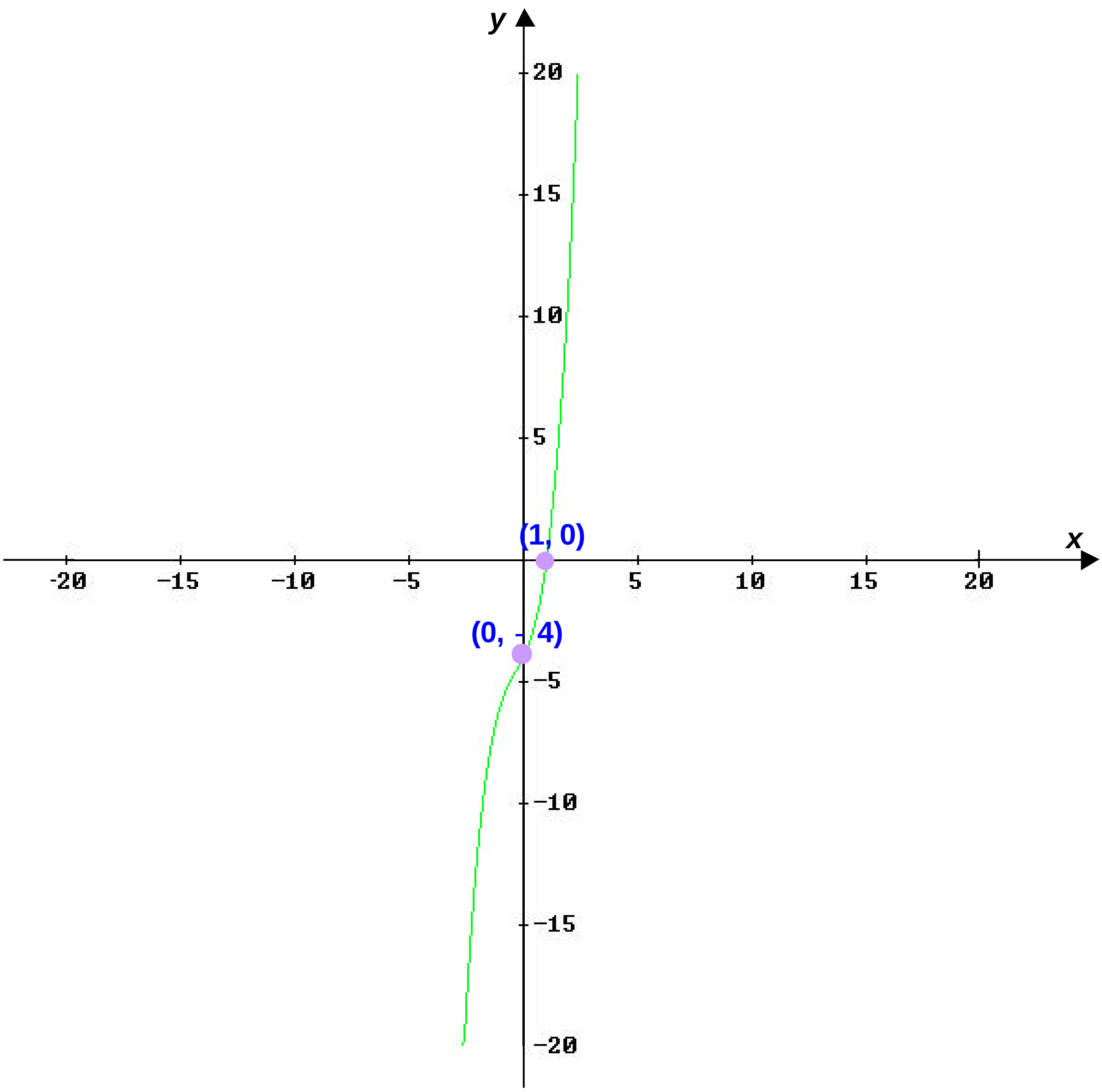
$$3x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-6}}{3} = \frac{-1 \pm \sqrt{-5}}{3}$$



Crescenza

Dunque la funzione è sempre crescente e non ha né massimi né minimi.

IL GRAFICO.



ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni polinomiali:

$y = 3x^4 - 4x^3$

$y = x(x - 1)^2$

$y = x^4 - 5x^2 + 4$

$y = x^2(1 - x)$

$y = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$

$y = x^3 - x^2$

$y = (x - 1)^3 - 3$

$y = x(x - 1)^2$

$y = (x - 5)^3(x + 1)^3$