Rappresentazione analitica di variabili

Funzione statistica

Funzione statistica →corrispondenza tra modalità di un carattere quantitativo X e le relative frequenze Y

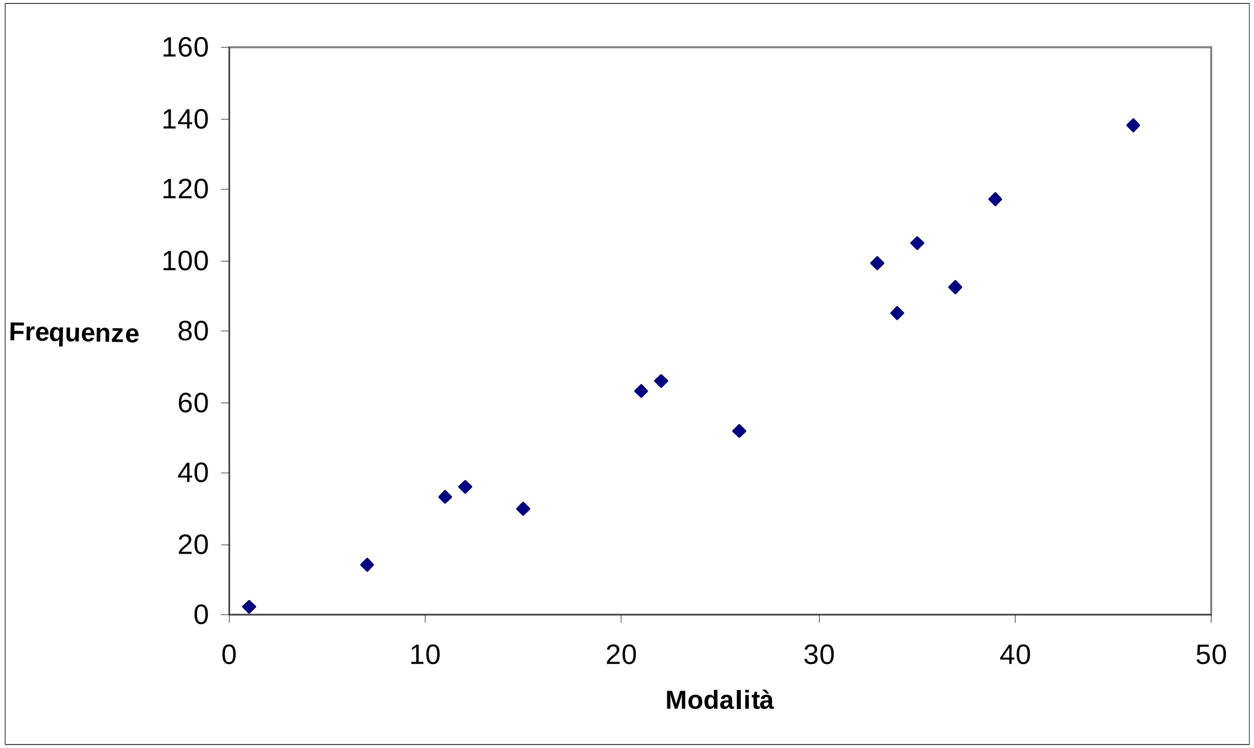
Coppie di valori:

$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_n,y_n)$

Rappresentazione analitica di X: specificare forma funzionale

Diagramma a dispersione

Diagramma empirico costituito dalle n coppie di osservazioni (x_1,y_1), (x_2,y_2), …, (x_n,y_n) sulle variabili X e Y rappresentate da punti



Interpolazione

Interpolazione: determinazione di una successione di valori di frequenze o intensità.

E’ un processo sia analitico che grafico

Interpolazione per punti o matematica: X e Y non sono affette da errori

Interpolazione fra punti o statistica: X e Y sono affette da errori

Estrapolazione

Estrapolazione: determinazione di una successione di valori teorici di frequenze o intensità (esterne all'intervallo di osservazione)

Processo poco attendibile: non tiene conto di cause perturbatrici future

Perequazione

Perequazione: eliminazione di irregolarità di andamento nelle serie storiche

Uno dei metodi più semplici è la media mobile

Rappresentazione analitica in un procedimento di interpolazione

1. Funzione teorica (dalla matematica) → distribuzione empirica

2. Determinare il valore dei parametri

3. Verificare grado di accostamento tra valori empirici e teorici

Interpolazione per punti

Polinomio completo di ordine n-1

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_{n-1} X^{n-1}$$

I β_i sono i parametri.

Per il principio di identità dei polinomi, fissati gli n punti in cui è nota la funzione, il polinomio di grado n-1 scelto è unico.

Equazioni

Dati due punti nel piano→due parametri da stimare

Equazione lineare:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X$$

Tre punti non allineati nel piano→tre parametri da stimare

Equazione di secondo grado:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

Interpolazione tra punti

Individuazione di una funzione matematica il cui grafico passi fra le n coppie di punti – immagine

Si opta per un polinomio di grado s<n

$$Y^* = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + ... + \beta_s X^s$$

Y* valore teorico

Metodo dei minimi quadrati (Regressione lineare)

M.M.Q: valori dei parametri della curva teorica che rendono minima la somma dei quadrati degli scarti tra valori teorici e valori osservati

Se la funzione teorica tra X e Y è lineare nei parametri:

$$Y^{*} = \beta_0 + \beta_1 X$$

Determinare β_0, β_1

Calcolo parametri

Minimizzare la somma S

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^{\,*} - y_i \right)^2$$

Ossia

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_0 + \beta_1 X - y_i \right)^2$$

Equazioni normali

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i\right)\cdot 1 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0 + \beta_1 x_i - y_i\right)\cdot x_i = 0$$

Sistema normale

$$\begin{cases} n\beta_0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Risolviamolo con Cramer

Calcolo coefficienti

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{vmatrix}}$$

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \end{vmatrix}}$$

Calcolo coefficienti (II)

$$\beta_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \end{vmatrix}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Calcolo coefficienti (III)

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} \end{vmatrix}} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Calcolo dei coefficienti (IV)

Dal sistema normale segue:

$$\beta_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Dove

$$\mu_y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, \ \mu_x = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Quindi

$$\beta_0 = \mu_y - \beta_1 \mu_x$$

Calcolo dei coefficienti (V)

Il coefficiente $\beta 1$ in termini di scarti della media è

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_x\right)\left(y_i - \mu_y\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \mu_x\right)^2}$$

Quindi β_0 sarà pari a

$$\beta_0 = \mu_y - \beta_1 \mu_x$$