Teoria delle variabili casuali

Variabile casuale

Una variabile casuale (o aleatoria) è una funzione misurabile a valori reali definita su uno spazio campione Ω

Corrispondenza tra l’insieme dei risultati di una prova e l’insieme dei numeri reali

Variabile casuale discreta

Variabile casuale <u>discreta</u>: assume valori in un insieme numerabile.

Funzione di probabilità

$$P(X = x) = p(x)$$

Deve soddisfare le proprietà:

$$p(x_i) \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Variabile casuale continua

Valori assumibili→ in R

Funzione di densità di probabilità

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx$$

Proprietà

$$f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Modelli per variabili casuali

Esistono modelli matematici utilizzati per formalizzare i comportamenti di fenomeni aleatori.

- Discreto (Bernoulli, Binomiale, Poisson)
- Continuo (Uniforme, Normale)

Variabile casuale di Bernoulli

Funzione di probabilità:

$$P(X = x) = p^x (1 - p)^{1-x}$$

x=1→ successo
x=0→ insuccesso

Probabilità di successo in una prova

Media e varianza

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1 - p)$$

Applicazione v.c. Bernoulli

- Controllo di qualità
- Analisi cliniche

Si è interessati ad accertare se un evento E (successo) si verifica o no

Ex. Vivo-morto, utile-guasto, superato-respinto

Variabile casuale binomiale

Generata da n eventi di tipo bernoulliano, con probabilità p di accadere e q=1-p di non accadere

Funzione di distribuzione:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

Variabile casuale binomiale (II)

Distribuzione cumulata

$$P(X \leq x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$P(X \geq x) = \sum_{k=x}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Valore medio e varianza

$$E(X) = np$$

$$Var(X) = np(1-p)$$

La variabile casuale di Poisson

Applicazione: numero di volte in cui si verifica un evento casuale in un intervallo di tempo/spazio

- Grande numero n di prove con piccola probabilità di successo
- Numero medio di successi λ
- Si ottiene come limite della distribuzione binomiale assumendo:

$$np = \lambda \quad e \quad n \to \infty$$

La variabile casuale di Poisson

Ponendo np=λ

$$\frac{\lambda^x}{x!}(1-p)^{\frac{\lambda}{p}} = \frac{\lambda^x}{x!}\left[(1-p)^{\frac{1}{p}}\right]^{\lambda}$$

Poiché

$$\lim_{p\to 0}\left[(1-p)^{\frac{1}{p}}\right]^{\lambda} = \exp(-\lambda)$$

Segue

$$P(X = x) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}}\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$$

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Simmetrie v.c. Poisson

Al crescere di λ il grafico della distribuzione di probabilità diviene più simmetrico.

Infatti:

$$E(X) = \lambda$$

$$Var(X) = \lambda$$

Applicazioni v.c. Poisson

- Numero di clienti in arrivo
- Numero di auto in coda
- Numero di difetti di una data unità di prodotto

Modelli per variabili casuali continue

Il modello più utilizzato è la variabile casuale normale.

Numerosi fenomeni reali sono bene approssimati dalla variabile casuale normale

Variabile casuale normale

E' una v.c. limite verso cui tendono altre v.c.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right\}$$

Con

$$-\infty < x < +\infty$$

$$\mu \in R$$

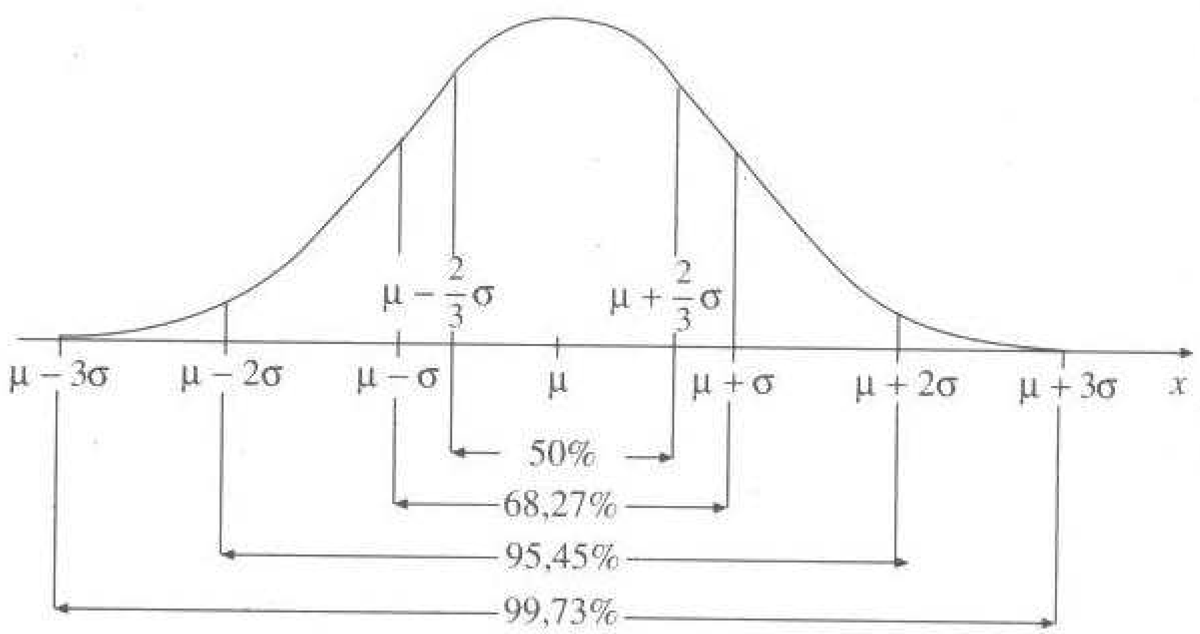
$$\sigma > 0$$

Proprietà della normale

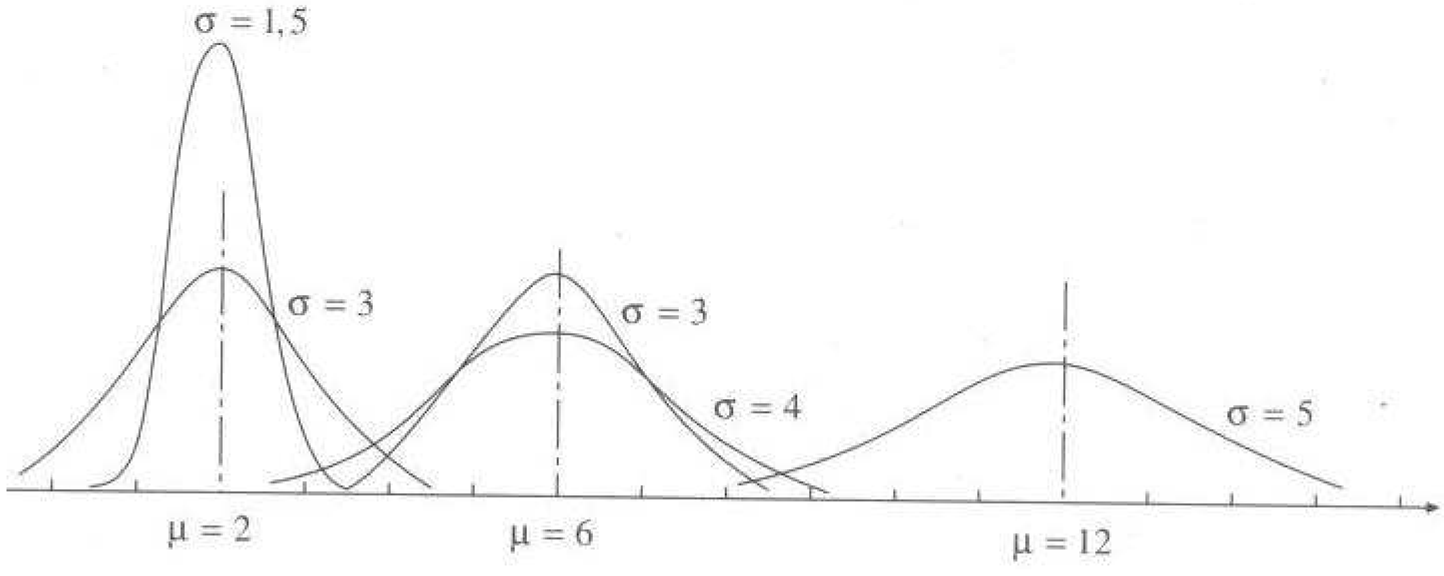
Le osservazioni sono distribuite attorno al valor medio

- Valor medio → posizione della curva
- Deviazione standard → dispersione

Raggruppamenti delle osservazioni



Curva per differenti valori di μ e σ



Variabili casuali dedotte dalla normale

- CHI-QUADRATO

- t di STUDENT

Sono ottenute per trasformazione della funzione di densità della normale

La variabile casuale chi-quadrato

E' una variabile casuale continua generata dalla somma di un numero g di v.c. normali standardizzate e indipendenti al quadrato

$$X = \sum_{i=1}^{g} Z_i^2$$

Con $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

g: gradi di libertà

La variabile casuale t di Student

Rapporto tra una v.c. standardizzata e la radice quadrata di una v.c. indipendente dalla prima con distribuzione chi-quadrato, rapportata ai propri gradi di libertà

$$X = \frac{Z}{\sqrt{\frac{Y}{g}}}$$