IL CALCOLO DELLE PROBABILITA'

0. Origini

Il concetto di probabilità sembra che fosse del tutto ignoto agli antichi malgrado si sia voluto trovare qualche cenno di ragionamento in cui esso è implicitamente presente. Il primo documento in cui si fa cenno alla probabilità si può far risalire al 1324 (1325) ed è un commento alla seguente terzina dantesca del IV Canto del Purgatorio della Divina Commedia:

Quando si parte il giuoco della zara
Colui che perde si rimane dolente
Ripetendo le volte e tristo impara

fatto da Giovanni della Lana che, oltre che commentare l'aspetto umano del giocatore, descrive anche il perché "*il tristo impara*". Il gioco della zara consiste nel lanciare tre volte un dado e quindi conteggiare la somma ottenuta. L'autore commenta che i giocatori imparano a loro spese che la combinazione più facile da ottenere è la (4-3-1) indipendentemente dall'ordine (ossia somma 7).
I primi studi conosciuti riguardanti questioni di probabilità si riferiscono sempre al gioco dei dadi e si trovano nel libro « *De aleae ludo* » (il gioco dei dadi) di Girolamo Cardano.
Un altro documento risale al 1640 ed è la risposta di Galilei ad un quesito postogli da un gruppo di giocatori fiorentini e sempre sul gioco della zara: essi non riuscivano a comprendere perché fosse più facile ottenere 10 o 11 piuttosto che 9 o 12 e ciò spinse Galileo Galilei a scrivere il libro « *Sopra le scoperte dei dadi* ».
L'effettivo inizio della teoria della probabilità, però, si fa risalire ad una corrispondenza epistolare fra i matematici francesi *Pascal* e *Fermat*, originata intorno al 1650 da alcuni problemi posti a Pascal da un accanito giocatore d'azzardo: il Cavaliere De Méré. I problemi erano:

- È più probabile ottenere almeno un 6 lanciando 4 volte un dado o avere un doppio 6 lanciando 24 volte lo stesso dado?
- Se due giocatori (ugualmente bravi) interrompono un gioco in cui vince per primo chi totalizza un certo punteggio, senza averlo raggiunto, come si divide il premio?

Pascal chiese aiuto a Fermat e dalla loro corrisopondenza nascono le prime leggi del calcolo combinatorio e delle probabilità tanto che nel 1654 pubblica il *Traité du Triangle Arithmétique* (in cui parla del triangolo di Tartaglia). Nel 1657 l'olandese Huygens pubblica il *De ratiocinis in ludo aleae* (cioè *Sul ragionamento nel gioco dei dadi*) e nel 1666 il tedesco Leibniz pubblica la sua *Dissertatio de arte combinatoria.* Ma il primo volume veramente importante sulla teoria della probabilità è *Ars conjectandi* (Arte di congetturare) di Jacques Bernouilli apparso nel 1713 (otto anni dopo la morte dell'autore). E fu in questi anni che la teoria della probabilità ebbe il maggior sviluppo perché in molti furono interessati all'argomento. Nel 1812 Pierre de Laplace introdusse una grande quantità di nuove idee e tecniche matematiche nel suo libro *Théorie Analytique des Probabilités*, ed in quegli stessi anni Gauss, con il contributo dello stesso Laplace, dava una formulazione della distribuzione normale conosciuta con il nome di *distribuzione di Gauss-Laplace* che costituisce uno dei cardini su cui si fonda la statistica moderna.

1. Eventi aleatori

Sappiamo che esistono avvenimenti che si verificano con certezza mentre altri, con altrettanta certezza, non possono verificarsi. Così, ad esempio, si verifica con certezza che estraendo da un'urna contenente solo palline rosse, sia rossa: chiameremo questo evento *evento certo*. Per contro non si verifica sicuramente che, estraendo dall'urna descritta in precedenza una pallina, sia bianca: diremo allora che questo è un *evento impossibile*.
Esistono altri avvenimenti che possono o no verificarsi, cioè esistono eventi possibili la cui realizzazione è incerta, cioè dipende dal caso: questi ultimi vengono detti *eventi aleatori* (o *casuali*).
Così, se si getta in alto una moneta, il fatto che cadendo può presentare una faccia piuttosto che l'altra, è un evento aleatorio. Estraendo da un'urna contenente palline bianche e nere, il fatto che si presenti la bianca piuttosto che la nera è ugualmente un evento aleatorio.
Il verificarsi di un evento aleatorio rappresenta quindi una alternativa fra i diversi casi che si possono verificare in una prova. Ad esempio supponiamo di voler estrarre da un'urna contenente 15 palline bianche e

12 nere, una pallina bianca: se la pallina estratta risulta bianca, parliamo di *evento favorevole*; se la pallina estratta non è bianca parleremo di *evento contrario*. Appare però evidente che la somma dei casi favorevoli e di quelli contrari è uguale al numero dei casi possibili
Nell'ambito degli eventi aleatori sono da distinguere eventi che hanno maggiori probabilità di verificarsi rispetto ad altri: ed è appunto il calcolo delle probabilità che cerca di formulare delle valutazioni numeriche della probabilità del verificarsi di tali eventi aleatori. È anche da osservare che non esiste un'unica definizione di probabilità e non esiste un unico modo di valutare la probabilità del verificarsi di un evento aleatorio.

2. Probabilità classica

Consideriamo i seguenti problemi:

- Se lanciamo una moneta regolare (non truccata) e chiediamo ad una qualsiasi persona qual è la probabilità di ottenere testa, si ottiene la risposta che nel 50% dei casi si presenta testa e nell'altro 50% si presenta croce. Nel calcolo delle probabilità si preferisce affermare che la probabilità di ottenere testa è $\frac{1}{2}$.
- Estraiamo una carta da un mazzo di 40 (dopo averle mescolate) e chiediamo ad una persona di indicare qual è la probabilità che la carta estratta sia di fiori. Sapendo che delle 40 carte 10 sono di fiori, si potrà concludere che la probabilità di estrarre una carta di fiori da un mazzo di 40 è del 25%, o meglio è $\frac{10}{40} = \frac{1}{4}$.

A questo punto possiamo dare la definizione di probabilità, data da Laplace, secondo la concezione classica:

Diremo probabilità di un evento E, *e la indicheremo con* P(E), *il rapporto fra il numero di casi favorevoli* m (*al verificarsi di* E) *ed il numero* n *dei casi possibili* (*a patto che siano tutti ugualmente possibili*).

In formula matematica si ha:

$$P(E) = \frac{m}{n}.$$

In base alla definizione possiamo osservare che la probabilità p è sempre un numero compreso tra 0 e 1, cioè è:

$$0 \le p \le 1.$$

Se $m = 0$ vuol dire che non esistono casi favorevoli al verificarsi dell'evento e l'evento stesso è quindi detto impossibile e la sua probabilità è nulla, cioè è P(E) = 0.
Se $m = n$ vuol dire che tutti casi sono favorevoli al verificarsi dell'evento e l'evento è quindi certo e la sua probabilità è P(E) = 1.
Questa probabilità si dice anche *probabilità calcolata a priori*, perché essa è determinata indipendentemente da ogni prova sperimentale. Un tipico esempio di applicazione della concezione classica di probabilità si ha in genetica con le leggi ottenute da Mendel sullo studio dei problemi legati all'ereditarietà.

3. Probabilità statistica (o frequentista)

Secondo la concezione frequentista, per conoscere la probabilità di un evento si ricorre all'esperimento e quindi non ha senso calcolare la probabilità di una singola prova perché non si può prevedere il risultato di un singolo esperimento mentre in una successione di prove si riscontra una certa regolarità.
Ad esempio, se si lancia più volte una moneta, non si calcola la probabilità che a un determinato lancio si presenti testa, ma si calcola la probabilità che si presenti testa dopo aver effettuato un congruo numero di lanci.
Si dà la seguente definizione:

si definisce frequenza relativa di un evento in n prove (effettuate tutte nelle stesse condizioni) il rapporto tra il numero k delle prove nelle quali l'evento si è verificato ed il numero n delle prove effettuate, cioè:

$$f = \frac{k}{n}.$$

La frequenza dipende non solo dal numero n delle prove effettuate ma, per uno stesso numero n di prove, può variare al variare del gruppo delle prove che si prende in considerazione. Ad esempio, se si lancia 100 volte una moneta e si presenta 46 volte il lato testa, effettuando altri 100 lanci è possibile che il lato testa si presenti un numero diverso di volte, per

esempio 52. Ne segue che la frequenza relativa per il primo gruppo di lanci è $\frac{46}{100}$ mentre quella relativa al secondo gruppo è $\frac{52}{100}$.
Anche la frequenza (come la probabilità) è un numero compreso fra 0 e 1, ma questa volta se $f = 0$ non possiamo affermare che l'evento è impossibile: possiamo dire soltanto che in quella serie di prove l'evento non si è verificato. Così, se $f = 1$ non possiamo affermare che l'evento è certo ma possiamo solo dire che in quelle n prove esso si è sempre verificato.
Abbiamo detto che la frequenza varia al variare del gruppo delle prove eseguite: si è constatato che, se il numero delle prove è sufficientemente alto, il rapporto $\frac{k}{n}$ tende a stabilizzarsi. A questo riguardo sono noti due esperimenti. Il primo è quello del francese Buffon che lanciò 4040 volte una moneta ottenendo testa per 2048 volte, quindi con frequenza:

$$f = \frac{2048}{4040} = 0{,}50693.$$

Il secondo è dovuto all'inglese Pearson che in un primo esperimento con 12.000 lanci ottenne testa 6019 volte con frequenza:

$$f = \frac{6019}{12.000} = 0{,}50158$$

ed in un secondo esperimento ottenne, su 24.000 lanci, 12012 volte testa con frequenza:

$$f = \frac{12012}{24.000} = 0{,}5005.$$

Da ciò si nota che la frequenza, al crescere del numero delle prove, si avvicina al valore 0,5 della probabilità dell'evento "*viene testa* " calcolato con l'impostazione classica.
Per gli eventi per i quali è possibile calcolare la probabilità, si può enunciare la cosiddetta *legge empirica del caso*:

In una serie di prove, ripetute un gran numero di volte ed eseguite tutte nelle stesse condizioni, la frequenza tende ad assumere valori prossimi alla probabilità dell'evento stesso e l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove eseguite.

Questa legge quindi afferma che se si eseguono numerose prove su un evento la frequenza, ordinariamente, si discosta di poco dalla probabilità, ma non esclude che qualche volta la frequenza, che è un valore sperimentale, assuma valori non attesi. Inoltre non è detto che se, come ad esempio avviene nel gioco del lotto, un numero non si è presentato da molte settimane, abbia maggiori probabilità di presentarsi in quanto per ogni estrazione la probabilità è sempre la stessa indipendentemente dai numeri usciti nelle altre estrazioni. La legge empirica del caso permette allora di dare la seguente definizione frequentista di probabilità per eventi ripetibili:

La probabilità di un evento è la frequenza relativa in un numero di prove ritenuto sufficientemente elevato.

In generale non possiamo dire quante prove siano necessarie, perché il *numero congruo* delle prove dipende, in generale, dal fenomeno in esame. La frequenza, calcolata in un gran numero di prove, permette di prevedere il risultato di prove future eseguite nelle stesse condizioni.
L'applicazione della concezione frequentista ha un campo molto vasto in quanto la definizione può essere applicata a fenomeni dei quali si posseggono dati statistici riguardanti fenomeni passati che si sono verificati in situazioni analoghe. Ad esempio, per una data popolazione è possibile calcolare la probabilità di morte o di sopravvivenza degli individui o la probabilità di nascita di maschi e femmine. Si hanno importanti applicazioni anche in medicina , in economia, nella meccanica quantistica ed in generale in tutte le scienze per le quali si possono utilizzare metodi statistici. Le probabilità calcolate sia con la concezione classica sia con quella frequentista sono dette *probabilità oggettive* per distinguerle dalle probabilità valutate secondo la concezione oggettiva.

4. Probabilità soggettiva

Consideriamo i seguenti problemi:

- *Qual è la probabilità per uno studente di trovare lavoro dopo il conseguimento della laurea?*
- *In una corsa, qual è la probabilità che la gara sia vinta da Tizio?*
- *Qual è la probabilità che un nuovo modello di ciclomotore ha di incontrare il favore dei giovani?*

È evidente che per questi tipi di eventi non è possibile valutarne la probabilità né secondo la concezione classica (non essendo possibile valutare i casi possibili e quelli favorevoli), né secondo la concezione frequentista (perché gli eventi non sono ripetibili). In questi casi la probabilità si stima in base alle informazioni di cui si è in possesso. Si dà allora la seguente definizione:

La probabilità P(E) *di un evento è la misura del grado di fiducia che un individuo attribuisce, in base alle sue informazioni ed alle sue opinioni, al verificarsi dell'evento* E.

Queste valutazioni della probabilità sono quindi *soggettive* poiché variano da individuo a individuo. Questo concetto si ricollega alle scommesse, per cui possiamo inoltre dare la seguente definizione:

la probabilità del verificarsi di un evento E*, secondo l'opinione di un certo individuo, è il numero* p *che si ritiene equo attribuire all'importo unitario esigibile al verificarsi dell'evento* E.

in altre parole la misura soggettiva della probabilità di un evento aleatorio (secondo l'opinione di un individuo) è il rapporto fra il prezzo pagato P e la somma S che quella persona potrà percepire nel caso si verifichi quell'evento. Pertanto la misura della probabilità soggettiva attribuita da quell'individuo al verificarsi dell'evento, è data dal rapporto:

$$\mathrm{P(\,E\,)} = \frac{P}{S}\,.$$

Trattandosi di probabilità soggettiva, è evidente che questa risulta, in genere, diversa da individuo ad individuo, ed è proprio su questa differenza di valutazione che sono basate le regole sulle scommesse.
Ad esempio, attribuire la probabilità 0,7 ala verificarsi di un certo evento E, significa essere disposti a pagare 7 euro per riceverne 10 nel caso in cui l'evento E si verifichi. Inversamente, per coerenza, si è disposti ad accettare 7 euro per pagarne 10 nel caso che l'evento E si verifichi.
Anche nella concezione soggettiva la probabilità è un numero compreso tra 0 e 1. Infatti, se l'evento è giudicato impossibile, il prezzo che si è disposti a pagare è zero per cui è anche P(E) = 0, mentre se l'evento è giudicato certo si ha che P(E) = 1. in tutti gli altri casi è $0 < p < 1$. Quindi se indichiamo con p la probabilità di vincere, quella di perdere è $(1 - p)$. Allora un gioco si dice equo se il rapporto tra la probabilità di

vincere e quella di perdere è uguale al rapporto tra la posta ed il guadagno, cioè:

$$\frac{P}{S} = \frac{p}{1-p}$$

da cui si trae che S·p = p·(1 − p), cioè: *un gioco si dice equo se la somma* S *che il giocatore vince (nel caso che l'evento si verifichi) moltiplicata per la probabilità* p *che questo succeda è uguale al prodotto tra la posta* P *che prende il banco per la probabilità* $(1-p)$ *che si verifichi l'evento opposto.*
Nella realtà i giochi non sono mai equi perché chi è autorizzato a gestire i giochi deve trattenere un compenso per coprire le spese di gestione ed assicurarsi una certa quota utile.
Vastissimo, anzi illimitato, è il campo di applicazione della probabilità nella concezione soggettiva in quanto qualsiasi evento può essere valutato in base ad essa. Quando prendiamo una certa decisione, il fatto stesso di scegliere un'alternativa piuttosto che un'altra, presuppone che abbiamo assegnato delle probabilità a ciascuna di esse.
Riprendiamo ora in considerazione i problemi che abbiamo indicato all'inizio:

- La valutazione della probabilità di trovare lavoro per uno studente neolaureato dipende da molti fattori quali, ad esempio, la sua preparazione professionale, le sue doti intellettuali,ecc. La valutazione di queste probabilità è puramente soggettiva e persone diverse possono assegnare probabilità diverse ad uno stesso neolaureato. Ad esempio, se una persona è pessimista può valutare che la probabilità di trovare lavoro sia del 25% mentre un ottimista gli può assegnare la probabilità del 70%, ed entrambe le valutazioni sono accettabili.
- La probabilità che un atleta vinca una gara dipende da vari fattori quali le sue condizioni di forma o dalla presenza di altri atleti di maggiori capacità. Anche in questo caso, in base alle informazioni ed alle opinioni, le valutazioni della probabilità di vittoria sono generalmente diverse a seconda dell'individuo che le formula.
- Anche per quel che si riferisce al successo della immissione di un prodotto sul mercato le opinioni dipendono dai gusti di colui che compie le valutazioni (dipende anche dalla stima che l'individuo ha nei confronti della casa di produzione). Un imprenditore può assegnare una valutazione prudenziale del 40% al successo di un

nuovo modello di ciclomotore, mentre un altro imprenditore (amante del rischio) con le stesse informazioni può attribuire al nuovo modello la probabilità del 70% di successo. In base a queste valutazioni si possono prendere decisioni diverse: il primo imprenditore ha stimato rischioso produrre il nuovo modello e non dà quindi corso alla produzione, mentre quello più ottimista decide di iniziare la produzione del nuovo modello.

5. Probabilità assiomatica

Insieme allo sviluppo della matematica si è giunti ad una impostazione che introduce il calcolo delle probabilità mediante un sistema di assiomi. Secondo questa concezione ad ogni esperimento, reale o concettuale, si può associare un insieme Ω, detto *universo* o *spazio di probabilità* o *spazio dei campioni* o *spazio degli eventi.* Gli elementi di questo spazio sono tutti i possibili risultati dell'esperimento (o del fenomeno). È ovvio che la scelta di Ω non è fissa ma dipende, naturalmente, dalla natura del problema preso in esame.
Ad esempio, se lanciamo un dado e ne esaminiamo i risultati possibili, possiamo considerare come insieme universo Ω l'insieme:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

se invece il nostro intento è quello di distinguere i numeri pari da quelli dispari, prenderemo come insieme universo l'insieme:

$$\Omega = \{ P, D\}.$$

così nel doppio lancio di una moneta l'insieme universo è dato da:

$$\Omega = \{ (T,T); (T,C); (C,T); (C,C)\}.$$

Si chiama *evento* un sottoinsieme E dello spazio Ω (cioè E è un sottoinsieme di tutti i risultati possibili), ed un evento si dice:

- *elementare* se è costituito da un solo elemento;
- *certo*, se coincide con Ω;
- *impossibile*, se è l'insieme vuoto $\emptyset$

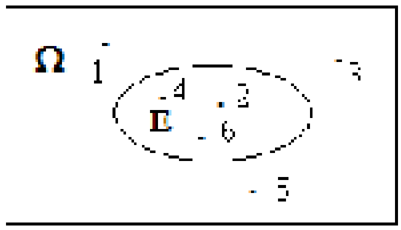
e si dirà che l'evento si verifica se il risultato dell'esperimento è un elemento a appartenente al sottoinsieme associato all'evento E (e si scrive $a \in E$). Ad esempio, nel lancio di un dado l'evento:

la faccia che si presenta ha un numero pari

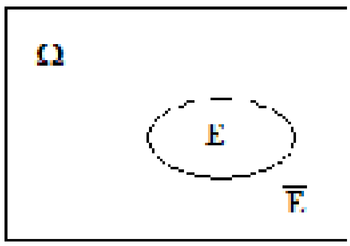
risulta verificato se si presenta una delle facce 2,4, o 6, ed è:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad E = \{2, 4, 6\}$$

e chiaramente è $E \subseteq \Omega$. La rappresentazione grafica è la seguente:



Si definisce evento contrario di un certo evento E l'evento $\overline{E}$ che si verifica se e solo se non si verifica E, cioè $\overline{E}$ è il sottoinsieme complementare di E rispetto ad Ω:



Siano E_1 ed E_2 due evnti appartenenti ad una prova:

a) si chiama *somma logica* (o *unione*) dei due eventi E_1 ed E_2 l'evento $E_1 \cup E_2$ che si verifica quando si verifica almeno uno dei due eventi E_1 ed E_2;

b) si chiama *prodotto logico* (o *intersezione*) di due eventi E_1 ed E_2 l'evento $E_1 \cap E_2$ che si verifica quando si verificano entrambi gli eventi E_1 ed E_2;

c) si chiama *evento differenza* tra E_1 ed E_2 (e si indica con $E_1 - E_2$) l'evento che consiste nel fatto che accade l'evento E_1 ma non E_2:

d) due eventi si dicono *incompatibili* se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro, cioè se E_1 ed E_2 sono disgiunti, ossia $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

L'evento impossibile corrisponde ad un sottoinsieme vuoto mentre l'evento certo corrisponde all'insieme universo Ω.

Esempio. Si getti un dado e si considerino gli eventi:

E_1 *si presenta un numero minore di 10*
E_2 *si presenta un numero divisibile per 11*

È facile osservare che l'evento E_1 è certo, quindi $E_1 = \Omega$, mentre l'evento E_2 è impossibile, cioè è $E_2 = \emptyset$.

Possiamo allora dare la seguente definizione di probabilità:

La probabilità P(E) *di un evento E è una funzione che associa ad ogni evento di* Ω *un numero reale in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi:*

$$P(E) \geq 0$$
$$P(\Omega) = 1.$$

Da questi assiomi si deducono le seguenti proprietà:

1) l'evento impossibile ha probabilità zero. Infatti, dall'uguaglianza $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ si ha:

$$P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

e quindi:

$$1 = 1 + P(\emptyset) \qquad \Rightarrow \qquad P(\emptyset) = 0$$

2) dato un evento E, la probabilità dell'evento contrario $\overline{E}$ è uguale al complemento a 1 della probabilità dell'evento E, cioè:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

Infatti, dalla relazione $\Omega = E \cup \overline{E}$, si ha:

$$P(\Omega) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

$$1 = P(E) + P(\overline{E}) \qquad \Rightarrow \qquad P(\overline{E}) = 1 - P(E).$$

3) Considerati tre eventi E_1, E_2 ed E_3, per la proprietà associativa fra insiemi si ha:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$

con la condizione che:

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing, \qquad E_1 \cap E_3 = \varnothing, \qquad E_2 \cap E_3 = \varnothing$$

ossia con al condizione che gli eventi siano incompatibili a due a due.
Tale proprietà si estendo poi a un numero qualunque di eventi (a due a due incompatibili):
siano $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ n eventi elementari di Ω, incompatibili a due a due ed aventi Ω come unione, cioè:

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega \qquad E_i \cap E_j = \varnothing \text{ per } i \neq j$$

si ha allora:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) \cup P(E_2) \cup \ldots P(E_n) = P(\Omega) = 1.$$

Se si aggiunge l'ipotesi che gli eventi siano equiprobabili (come avviene nella concezione classica) ciascuno avrà probabilità:

$$P(E_i) = \frac{1}{n} \qquad i = 1,2,\ldots, n$$

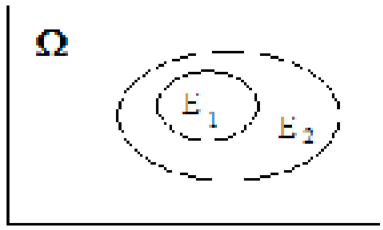
e se E_i è un evento unione di m eventi elementari, la sua probabilità è:

$$P(E_i) = \frac{m}{n}$$

Si può quindi affermare che:
La probabilità secondo la concezione classica non è altro che un caso particolare della probabilità secondo l'impostazione assiomatica.

4) Se $E_1 \subset E_2$ allora la probabilità della differenza fra E_2 ed E_1 è uguale alla differenza delle probabilità, cioè si ha:

$$P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1)$$



Infatti è:

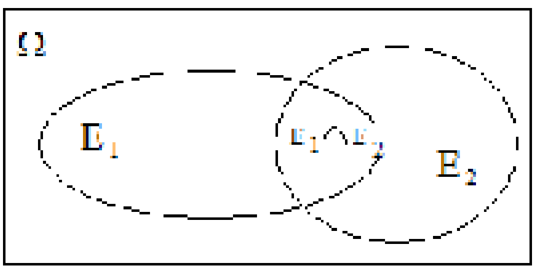
$$E_1 \cap (E_2 - E_1) = \varnothing \qquad \text{e} \qquad E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$$

da cui si trae che:

$$P(E_2) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) \qquad \Rightarrow \qquad P(E_2 - E_1) = P(E_2) - P(E_1).$$

5) Se E_1 ed E_2 sono due eventi compatibili si ha la seguente relazione (di Boole):

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$



Infatti E_1 ed $(E_2 - E_1)$ sono disgiunti per cui si può scrivere:

$$E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1) \quad \text{e} \quad E_2 - E_1 = E_2 - (E_1 \cap E_2)$$

per cui si ha:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) = P(E_1) + P[E_2 - (E_1 \cap E_2)] =$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2).$$

Questa relazione si estende anche alla somma di tre eventi a due a due incompatibili:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) -$$
$$-P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

6. Probabilità condizionata

In alcuni casi per trovare la probabilità di un evento è necessario avere qualche condizione complementare, cioè l'evento si può verificare solo se se ne verifica un altro. Tali probabilità si dicono *condizionate* e si dà la seguente definizione:

La probabilità che un evento E_1 *si verifichi nell'ipotesi che si sia realizzato già un altro evento* E_2, *si chiama probabilità condizionata dell'evento* E_1 *rispetto all'evento* E_2 *e si indica con il simbolo:*

$$P(E_1 | E_2)$$

(*e si legge probabilità di* E_1 *condizionata ad* E_2).

Esempio. Lanciando due dadi, determinare q1ual è la probabilità di ottenere come somma 8 (evento E_1) sapendo già che il risultato del lancio è un numero pari (evento E_2).

Lanciando due dadi si hanno 36 risultati possibili ed i lanci favorevoli all'evento sono:

(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)

quindi la probabilità incondizionata che esca 8 è:

$$P(E_1) = \frac{5}{36}.$$

Se si è verificato l'evento E_2 (*la somma è pari*) allora i casi possibili sono soltanto 18 e conseguentemente la probabilità condizionata è:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{5}{18}.$$

Ora però bisogna risolvere il problema in generale.
L'impostazione assiomatica definisce la probabilità di E_1 condizionata ad E_2 mediante la relazione:

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad (\clubsuit)$$

Naturalmente deve essere $P(E_2) \neq 0$ e si può dimostrare che la $P(E_1 | E_2)$ soddisfa ai tre assiomi dell'impostazione assiomatica della probabilità. Nel caso che sia $P(E_2) = 0$ la probabilità $P(E_1 | E_2)$ non si può definire.
L'equazione ($\clubsuit$) la possiamo scrivere nella forma:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1 | E_2) \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

e costituisce il cosiddetto *teorema delle probabilità composte:*

La probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto delle probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro (purché, naturalmente, si sia verificato il primo).

<u>Esempio</u>. Determinare qual è la probabilità che, estraendo una carta da un mazzo di 52 carte, sia una figura nera.

Indichiamo con E_1 l'evento: « *la carta estratta è una figura*»; la sua probabilità è:

$$P(E_1) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

Indichiamo con $E_2 | E_1$ l'evento: «*la carta estratta è una figura nera*» la cui probabilità è:

$$P(E_2 | E_1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

quindi la probabilità cercata è:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2 | E_1) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{26}.$$

7. Probabilità totale

Consideriamo tre eventi, E_1, E_2, E_3 mutuamente incompatibili e supponiamo che l'evento E si verifichi insieme ad uno ed uno solo dei tre eventi dati, cioè supponiamo che sia:

$$E = (E \cap E_1) \cup (E \cap E_2) \cup (E \cap E_3).$$

Dal teorema della somma delle probabilità si ha:

$$P(E) = P(E \cap E_1) + P(E \cap E_2) + P(E \cap E_3)$$

da cui, tenendo conto della formula (♣♣), si ottiene:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E | E_1) + P(E_2) \cdot P(E | E_2) + P(E_3) \cdot P(E | E_3)$$

che si chiama *formula della probabilità totale.*

<u>Esempio</u>. Consideriamo 5 urne:

2 urne E_1	contenenti:	5 palline bianche e 3 nere (in ogni urna)
1 urna E_2	contenente:	8 palline nere
2 urne E_3	contenenti:	3 palline bianche e 2 nere (in ogni urna)

Si sceglie a caso un'urna e da essa si estrae una pallina. Ci proponiamo di determinare la probabilità che la pallina estratta sia bianca (evento E).

Dalla formula della probabilità totale si ha:

$$P(E) = P(E_1) \cdot P(E | E_1) + P(E_2) \cdot P(E | E_2) + P(E_3) \cdot P(E | E_3).$$

Passiamo a determinare:

$$P(E_1) = \frac{2}{5}; \qquad P(E_2) = \frac{1}{5}; \qquad P(E_3) = \frac{2}{5}$$

(infatti 2 sono le urne E_1, una le E_2 e 2 le urne E_3). Calcoliamo quindi:

$$P(E|E_1) = \frac{\textit{numero delle palline bianche}}{\textit{numero totale delle palline}} = \frac{5}{8}$$

$$P(E|E_2) = \frac{0}{10} = 0$$

$$P(E|E_3) = \frac{3}{5}$$

Quindi è:

$$P(E) = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{8} + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{1}{4} + \frac{6}{25} = \frac{49}{100}.$$

8. Variabili aleatorie discrete

Un concetto molto importante del calcolo delle probabilità è quello di *variabile aleatoria* o *variabile casuale* o *stocastica*.
Alcuni esempi di variabili aleatorie:

- Il numero di autovetture che attraversano in un giorno un certo casello autostradale;
- La velocità delle molecole di un gas contenuto in un recipiente;
- La durata della vita di una persona;
- Il numero dei punti ottenuti con il lancio di due dadi;
- Il guadagno (o perdita) che un giocatore realizza in n partite.

È ovvio che non è possibile dire quale valore assumerà la variabile in ognuno di questi casi, è certo però che ne assumerà uno fra tutti quelli possibili. Ogni valore assunto dalla variabile dipende dal verificarsi o meno di un evento aleatorio. Possiamo dare la seguente definizione:

Si definisce variabile casuale una quantità variabile X *che può assumere i diversi valori* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *(uno dei quali debba necessariamente presentarsi) e ciascuno dei quali abbia la probabilità* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *di presentarsi.*

In particolare una variabile casuale si dice *discreta* se può assumere un numero finito di valori; si dice *continua* se può assumere tutti gli infiniti valori interni ad un certo intervallo.

Osserviamo che, poiché uno dei diversi valori della variabile deve necessariamente verificarsi, la probabilità totale che si verifichi uno o l'altro dei valori assumibili è data dalla:

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1$$

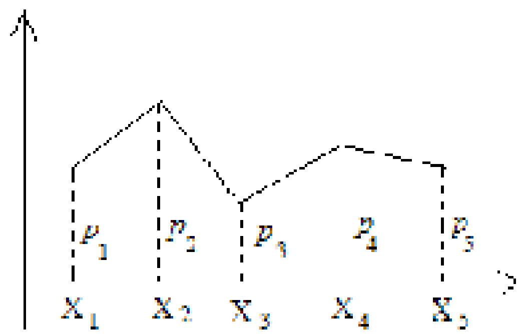
cioè la somma delle probabilità di tutti i valori possibili di una variabile aleatoria è uguale all'unità.
Si chiama *funzione di probabilità di una variabile aleatoria* ogni relazione che stabilisce una corrispondenza tra i valori possibili della variabile casuale e le loro probabilità. Per indicare la probabilità degli eventi che fanno assumere alla variabile X il valore x_1 si usa la notazione:

$$P(\,X = x_1).$$

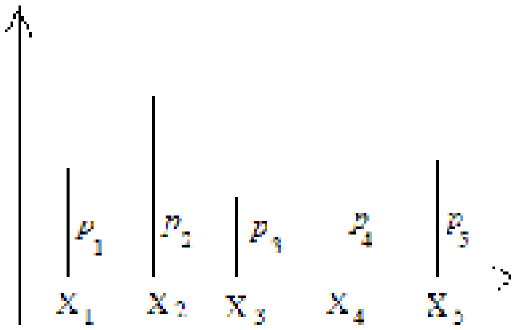
Per dare una legge di distribuzione di una variabile casuale discreta X, in genere, si usa una tabella in cui vengono riportati i valori possibili di X e le corrispondenti probabilità:

X	x_1 x_2 ….. x_n
p	p_1 p_2 ….. p_n

Possiamo rappresentare la stessa distribuzione anche sotto forma di *poligonale di distribuzione di probabilità*:



oppure mediante un *istogramma* (che consiste in un insieme di rettangoli di base unitaria e di altezza uguale alla probabilità che X si verifichi:



Esempio 1. Proviamo a lanciare un dado regolare. La variabile aleatoria X è il numero dei punti che appaiono sulla faccia superiore e può assumere, quindi, i valori:

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$$

e la probabilità di ciascuno degli eventi è $\frac{1}{6}$. Possiamo allora costruire la seguente tabella di distribuzione:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

La legge di distribuzione può essere data anche sotto la forma analitica con una espressione del tipo:

$$p_i = f(x_i)$$

e la $f(x_i)$ soddisfa le:

$$f(x_i) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

Esempio 2. Lanciando due dadi regolari si ottengono 36 coppie ordinate di numeri compresi tra 1 e 6, cioè è:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ &(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6); \\ &(2,1);\ (2,2);\ (2,3);\ (2,4),\ (2,5);\ (2,6); \\ &(3,1);\ (3,2);\ (3,3);\ (3,4);\ (3,5);\ (3,6); \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{llllll}
(4,1); & (4,2); & (4,3); & (4,4); & (4,5); & (4,6); \\
(5,1); & (5,2); & (5,3); & (5,4); & (5,5); & (5,6); \\
(6,1); & (6,2); & (6,3); & (6,4); & (6,5); & (6,6)\}
\end{array}
$$

e X assegni a ciascun risultato $(a,b)\in\Omega$ il massimo tra i suoi valori, e quindi X è una variabile che può assumere i valori 1,2,3,4,5,6.
La funzione di probabilità è data da:

$$f(1) = P(X = 1) = P[(1,1)] = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = P(X = 2) = P[(2,1); (2,2); (1,2)] = \frac{3}{36}$$

$$f(3) = P(X = 3) = P[(3,1); (3,2); (3,3); (2,3); (1,3)] = \frac{5}{36}$$

$$f(4) = P(X = 4) = P[(4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (3,4); (2,4); (1,4)] = \frac{7}{36}$$

$$f(5) = P(X = 5) = P[(5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (4,5); (3,5); (2,5); (1,5)] = \frac{9}{36}$$

$$f(6) = P(X = 6) = P[(6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6);(5,6);(4,6);(3,6);(2,6);(1,6) = \frac{11}{36}$$

pertanto la distribuzione di probabilità è data dalla tabella:

X	1	2	3	4	5	6
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$