

APPUNTI DELLA LEZIONE DEL 26.04.2023

In questa prima sezione svilupperemo, analiticamente, la **CONDIZIONE DI SAMUELSON**, ovvero un modello di ottimizzazione attraverso il quale dimostreremo che le condizioni ottimali che risolvano il problema delle scelte ottimali di bene pubblico da parte dei singoli individui divergono rispetto a quelle che sono imposte da un social planner che vuole massimizzare una funzione di welfare sociale.

Ipotesi:
ci sono due soggetti 1 e 2 che hanno le seguenti funzioni di utilità:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= U_1(x_1, g) \\ U_2 &= U_2(x_2, g) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{note che le funzioni di utilità hanno} \\ &\text{le consuete proprietà } [U'_x, U'_g] > 0 \end{aligned}$$

dove x_1 e x_2 sono le quantità di beni privati consumati, rispettivamente, da 1 e 2, mentre g è la quantità di bene pubblico (non usale, non escludibile, non divisibile).

Definiamo w_1 e w_2 le dotazioni di bene privato che, nostri soggetti spendono per acquistare il bene pubblico. I rispettivi vincoli di bilancio saranno:

$$\begin{aligned} w_1 &= x_1 + p g \\ w_2 &= x_2 + p g \end{aligned}$$

dove p è il prezzo del bene pubblico in termini di bene privato:

$$p = \frac{p_g}{p_x}$$

Ogni individuo impone le condizioni del primo ordine per risolvere il seguente problema di ottimo

$$\begin{aligned} \max_{x_1, g} U_1(x_1, g) \\ \text{sub } w_1 = x_1 + p g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max_{x_2, g} U_2(x_2, g) \\ \text{sub } w_2 = x_2 + p g \end{aligned}$$

Per ognuno dei due soggetti le condizioni del primo ordine e quelle per le quali il primo ordine di sostituzione tra il bene pubblico e il bene privato uguaglia il rapporto tra i rispettivi prezzi, ovvero...

$$\frac{dU_1}{dg} / \frac{dU_1}{dx_1} = \frac{P_g}{P_x} ; \quad SMS_1 = P \quad \text{per il soggetto 1}$$

$$\frac{dU_2}{dg} / \frac{dU_2}{dx_2} = \frac{P_g}{P_x} ; \quad SMS_2 = P \quad \text{per il soggetto 2}$$

L'allocazione ottimale che scaturisce dalla soluzione dei problemi individuali può essere espressa come segue:

$$SMS_1 = SMS_2 = P \quad (\text{Eq. 1})$$

LA QUANTITÀ DI BENE PUBBLICO DOMANDATA DAI SOGGETTI SARÀ QUELLA PER LA QUALE IL SAGGIO MARGINALE DI SOSTITUZIONE TRA BENE PUBBLICO E BENE PRIVATO È UGUALE PER OGNUNO DEI SOGGETTI CHE COMpongONO LA SOCIETÀ

Impostiamo ora che si decida la quantità ottimale di bene pubblico che si può avere in un social planner che

intende ottimizzare il welfare sociale e non quello individuale. Definiamo $WS = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g)$

il welfare sociale associato ai due individui e a questo associamo anche il relativo vincolo di bilancio

$$w_1 + w_2 = x_1 + x_2 + P_g$$

Impostiamo il problema e risolveremo con il metodo di Lagrange:

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, g} \quad & SW = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g) \\ \text{sub} \quad & w_1 + w_2 = x_1 + x_2 + P_g \end{aligned}$$

La funzione Lagrangiana avrà la seguente forma:

$$L = U_1(x_1, g) + U_2(x_2, g) + \lambda [w_1 + w_2 - x_1 - x_2 - P_g]$$

con relative condizioni del primo ordine...

$$\frac{dL}{dx_1} = \phi; \quad \frac{dU_1}{dx_1} - \lambda = \phi; \quad \frac{dU_1}{dx_1} = \lambda \quad (\text{EQ. 2})$$

$$\frac{dL}{dx_2} = \phi; \quad \frac{dU_2}{dx_2} - \lambda = \phi; \quad \frac{dU_2}{dx_2} = \lambda \quad (\text{EQ. 3})$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \phi; \quad \frac{dU_1}{d\lambda} + \frac{dU_2}{d\lambda} - \lambda p = \phi; \quad \frac{dU_1}{d\lambda} + \frac{dU_2}{d\lambda} = \lambda p \quad (\text{EQ. 4})$$

$$\frac{dL}{d\lambda} = \phi; \quad w_1 + w_2 - x_1 - x_2 - p\lambda = \phi \quad (\text{EQ. 5})$$

Sostituiamo la (EQ. 1) nella (EQ. 4) ed otteniamo:

$$\frac{dU_1}{d\lambda} + \frac{dU_2}{d\lambda} = \frac{dU_1}{dx_1} \cdot p$$

Dividiamo ora entrambi i termini per $\frac{dU_1}{dx_1}$ ed otteniamo:

$$\frac{\frac{dU_1}{d\lambda}}{\frac{dU_1}{dx_1}} + \frac{\frac{dU_2}{d\lambda}}{\frac{dU_1}{dx_1}} = p \quad (\text{EQ. 6})$$

Ricorda che, per definizione,

$$\frac{dU_1}{d\lambda} / \frac{dU_1}{dx_1} = SMS_1$$

che dalle (EQ. 2) e dalle (EQ. 3)

$$\frac{dU_1}{dx_1} = \frac{dU_2}{dx_2}$$

per cui sostituendo nelle (EQ. 6) otteniamo:

$$SMS_1 + SMS_2 = p$$

Questa condizione di ottimo "sociale" differisce da quella individuale identificata nella EQ. 1

$$[SMS_1 = SMS_2 = p] \neq [SMS_1 + SMS_2 = p] \quad \text{CK}$$

$$\max_g U^A = a \log [R^A - t g] + (1-a) \log g$$

$$\max_g U^B = b \log [R^B - (1-t)g] + (1-b) \log g$$

Imponiamo le condizioni del primo ordine

$$\left[\text{Ricorda che } \frac{d \log f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)} \right]$$

$$\frac{dU^A}{dg} = 0; \quad \frac{-at}{R^A - t g} + \frac{(1-a)}{g} = 0 \quad (\text{Eq. 1})$$

$$\frac{dU^B}{dg} = 0; \quad \frac{-b(1-t)}{R^B - (1-t)g} + \frac{(1-b)}{g} = 0 \quad (\text{Eq. 2})$$

Moltiplichiamo la Eq. 1 per $(R^A - t g) \cdot g$ e la Eq. 2 per $[R^B - (1-t)g] g$ otteniamo:

$$-atg + (1-a)(R^A - t g) = 0 \quad (\text{Eq. 3})$$

$$-b(1-t)g + (1-b)[R^B - (1-t)g] = 0 \quad (\text{Eq. 4})$$

Risolvendo la Eq. 3 e la Eq. 4 rispetto a g otteniamo:

$$g = \frac{R^A(1-a)}{t} \quad (\text{Eq. 5})$$

$$g = \frac{R^B(1-b)}{(1-t)} \quad (\text{Eq. 6})$$

Le Eq. 5 e Eq. 6 definiscono le domande di bene pubblico di A e B, rispettivamente.

Passiamo ora alla seconda fase, come spesso nei due modelli dove contribuiscono a finanziare g . Data l'ipotesi di indivisibilità di g (caratteristica del bene pubblico) la g della Eq. 5 dovrà essere uguale alla g della Eq. 6, per cui uguagliando otteniamo:

$$\frac{R^A(1-a)}{t} = \frac{R^B(1-b)}{(1-t)}$$

isoliamo t e t moltiplicando per $t \cdot (1-t)$

$$(1-t)R^A(1-a) = tR^B(1-b)$$

isolando t otteniamo:

$$t = \frac{(1-a)R^A}{(1-a)R^A + (1-b)R^B} \quad (\text{Eq. 7})$$

La equazione 7 definisce lo schema di finanziamento compatibile con la definizione di bene pubblico. Possiamo usare questo schema (è una sorta di al-punto-fine) per calcolare i valori di g sostituendo nelle Eq. 5 e nelle Eq. 6

$$g = \frac{(1-a)R^A}{(1-a)R^A + (1-b)R^B} ; \quad g^* = (1-a)R^A + (1-b)R^B$$

Il valore di g ottenuto (identico se sostituiamo nelle Eq. 6) rappresenta il livello ottimale di bene pubblico finanziato con un permesso di polluteri compatibile con uno schema obbligatorio di addizionali contribuenti.