LO STUDIO DI FUNZIONI

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

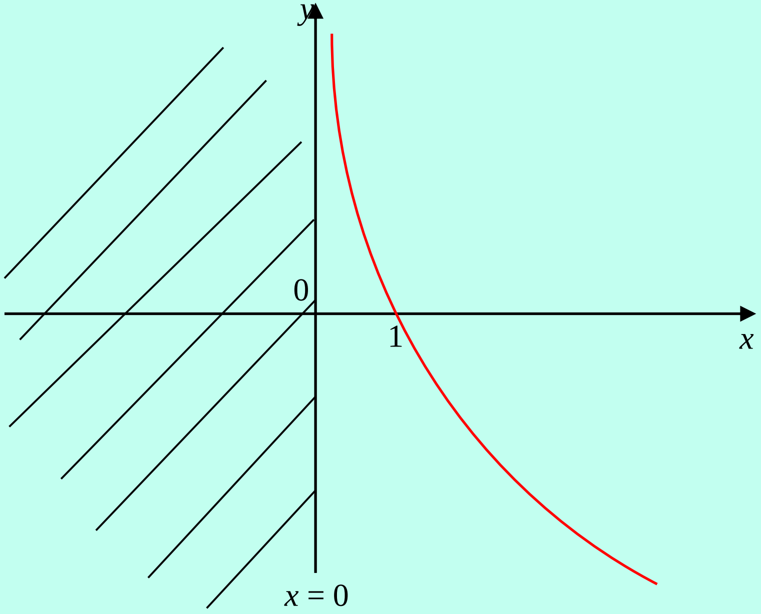
CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

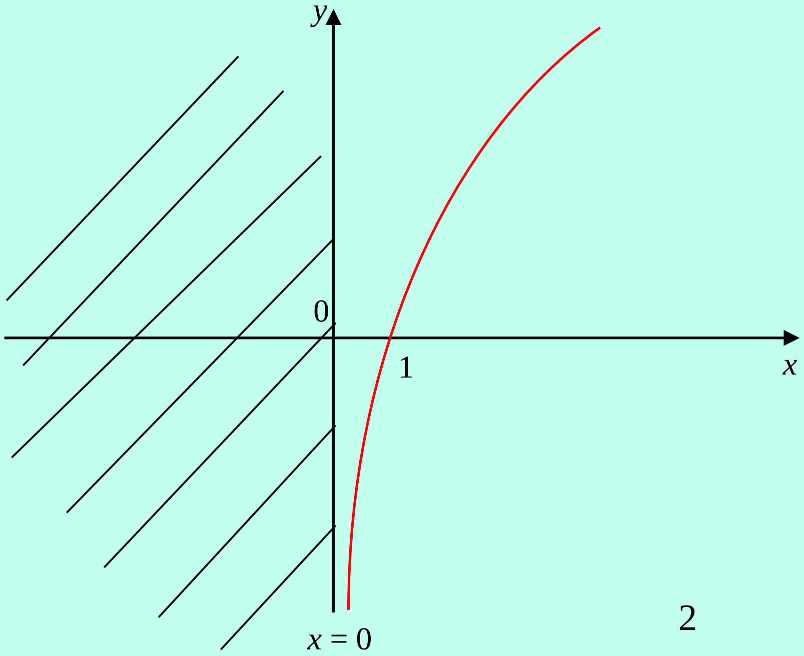
LOGARITMICHE

$$y = log_a x$$

$0 < a < 1$



$a > 1$



Esempio 1

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2x > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x\left(x - 2\right) > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 0, x > 2\right\}$$

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 2 < x < +\infty\right\}$$

x* = 0, *x* = 2 *A.V.

<u>La logaritmica è definita dove il suo argomento è strettamente positivo</u>

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

⬇

2) Intersezioni con gli assi

In *x* = 0 la funzione non è definita:
non esistono, quindi, intersezioni con l'asse *y*

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(x^2 - 2x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln(1) = ln\left(x^2 - 2x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow A = \left(1 - \sqrt{2}, 0\right), B = \left(1 + \sqrt{2}, 0\right)$$

intersezioni con l'asse *x*

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

↓

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \;\Leftrightarrow\; ln\left(x^2 - 2x\right) > 0 = ln\left(1\right) \Leftrightarrow x^2 - 2x > 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow\; x < 1 - \sqrt{2} \cong -0,4; x > 1 + \sqrt{2} \cong 2,4$$

	$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
+ + +		- - - - - -		+ + +
+		-		+
$y > 0$		$y < 0$		$y > 0$

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

$\Downarrow$

4) **Limiti agli estremi del *C.E.***

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 0, 2 < x < +\infty\right\}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty}\left[ln\left(x^2 - 2x\right)\right] = ln\left[\lim_{x \to +\infty}\left(x^2 - 2x\right)\right] = ln(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty}\left[ln\left(x^2 - 2x\right)\right] = ln\left[\lim_{x \to -\infty}\left(x^2 - 2x\right)\right] = ln(+\infty) = +\infty$$

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

⬇

5) Calcolo della derivata prima

$$D\left\{ln\left[f\left(x\right)\right]\right\} = \frac{1}{f\left(x\right)} \cdot D\left[f\left(x\right)\right]$$

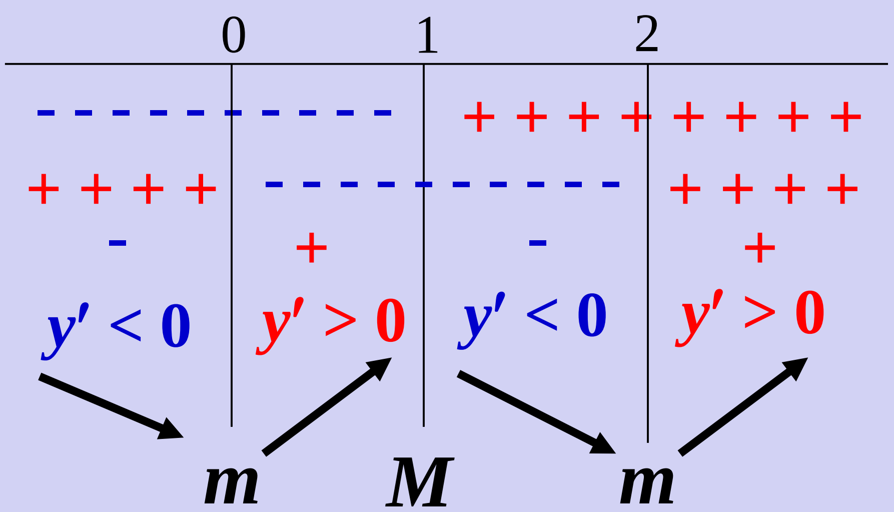
⬇

$$y' = D\left[ln\left(x^2 - 2x\right)\right] = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot D\left(x^2 - 2x\right) = \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot (2x - 2) = \frac{2\left(x - 1\right)}{x\left(x - 2\right)}$$

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x-1\right)}{x\left(x-2\right)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x\left(x-2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x<0, x>2 \end{cases}$$



$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

$$\Downarrow$$

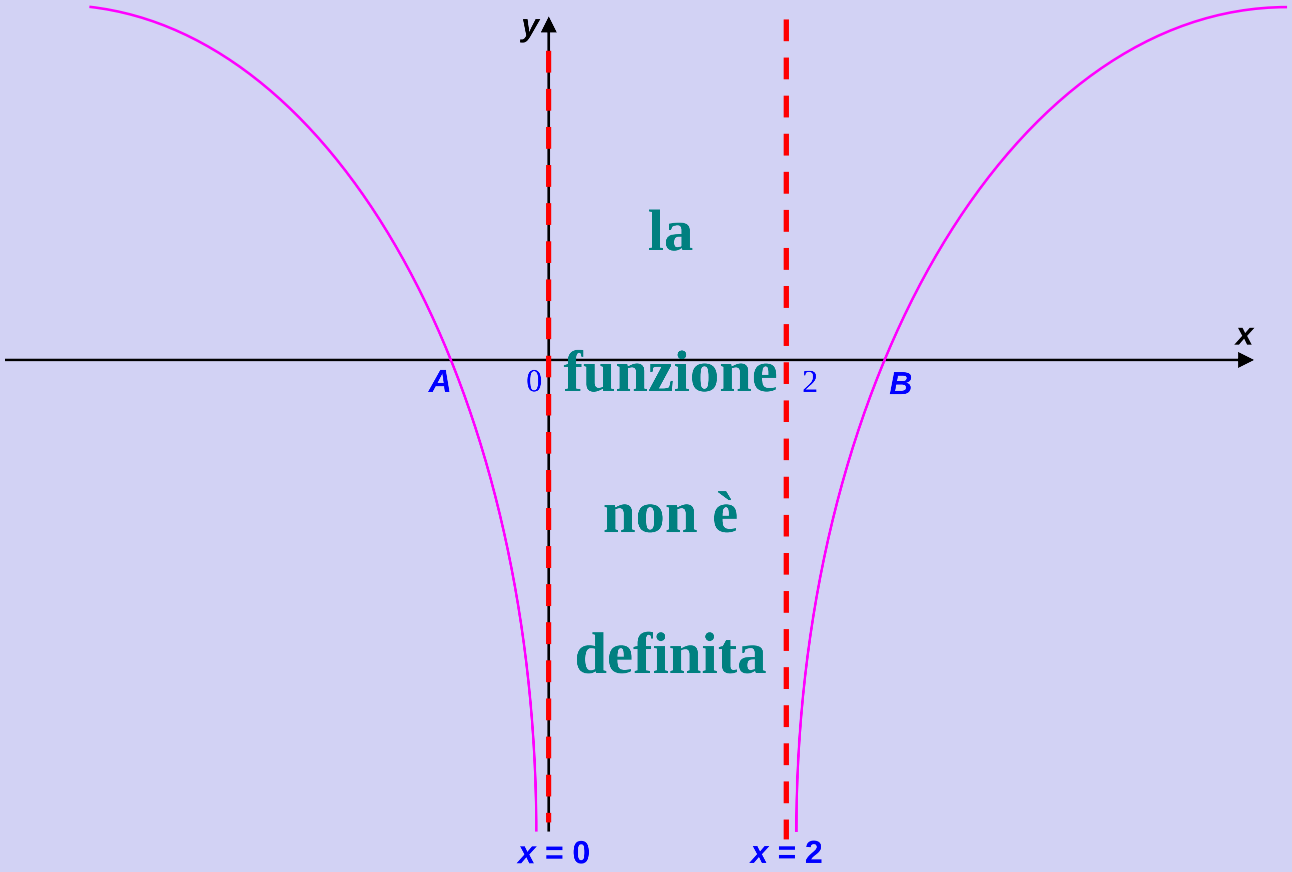
per 0 < *x* < 2 la funzione non è definita

$$\Downarrow$$

la funzione non ha né Massimi né minimi

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

7) Grafico della funzione



Esempio 2

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

↓

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5x + 6 > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : \left(x-3\right)\left(x-2\right) > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x < 2, x > 3\right\}$$

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 2, 3 < x < +\infty\right\}$$

↓

x* = 2, *x* = 3 *A.V.

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ln(6) \cong 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow A = (0, ln6)$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(x^2 - 5x + 6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln(1) = ln\left(x^2 - 5x + 6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 = x^2 - 5x + 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow B = \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}, 0\right), C = \left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)$$

intersezioni con l'asse *x*

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff ln\left(x^2 - 5x + 6\right) > 0 = ln(1) \iff x^2 - 5x + 6 > 1$$

$$\iff x^2 - 5x + 5 > 0 \iff x < \frac{5-\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}3;\ x > \frac{5+\sqrt{5}}{2} \cong 3{,}6$$

	$\frac{5-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{2}$
+ + + +	- - - - - - -	+ + + +
$y > 0$	**$y < 0$**	**$y > 0$**

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < 2, 3 < x < +\infty\right\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(x^2 - 5x + 6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x^2 - 5x + 6\right)\right] = ln\left(+\infty\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(x^2 - 5x + 6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(x^2 - 5x + 6\right)\right] = ln\left(+\infty\right) = +\infty$$

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

⬇

5) Calcolo della derivata prima

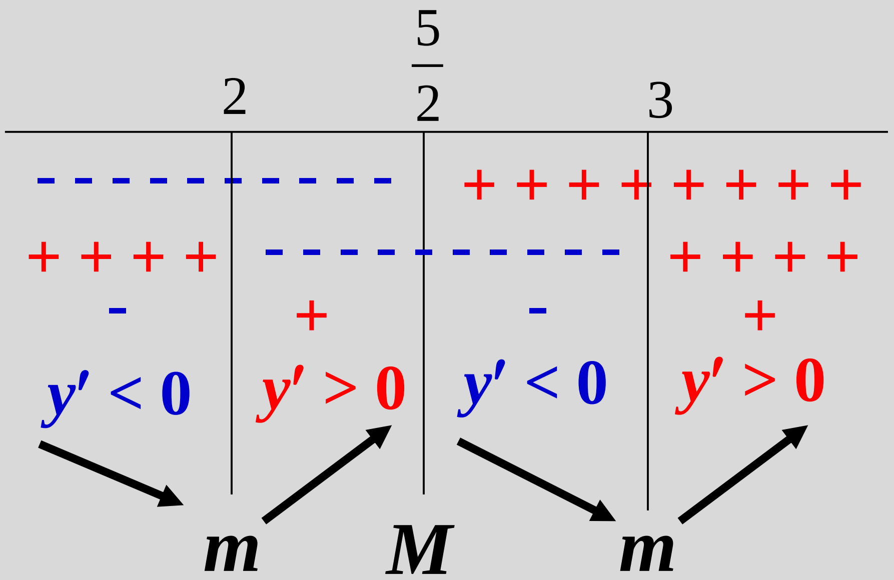
$$y' = D\left[ln\left(x^2 - 5x + 6\right)\right] = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot D\left(x^2 - 5x + 6\right) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \cdot \left(2x - 5\right) =$$

$$= \frac{2x - 5}{\left(x - 3\right)\left(x - 2\right)}$$

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff \frac{2x-5}{(x-3)(x-2)} > 0 \iff \begin{cases} 2x-5>0 \\ (x-3)(x-2)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ x < 2, x > 3 \end{cases}$$



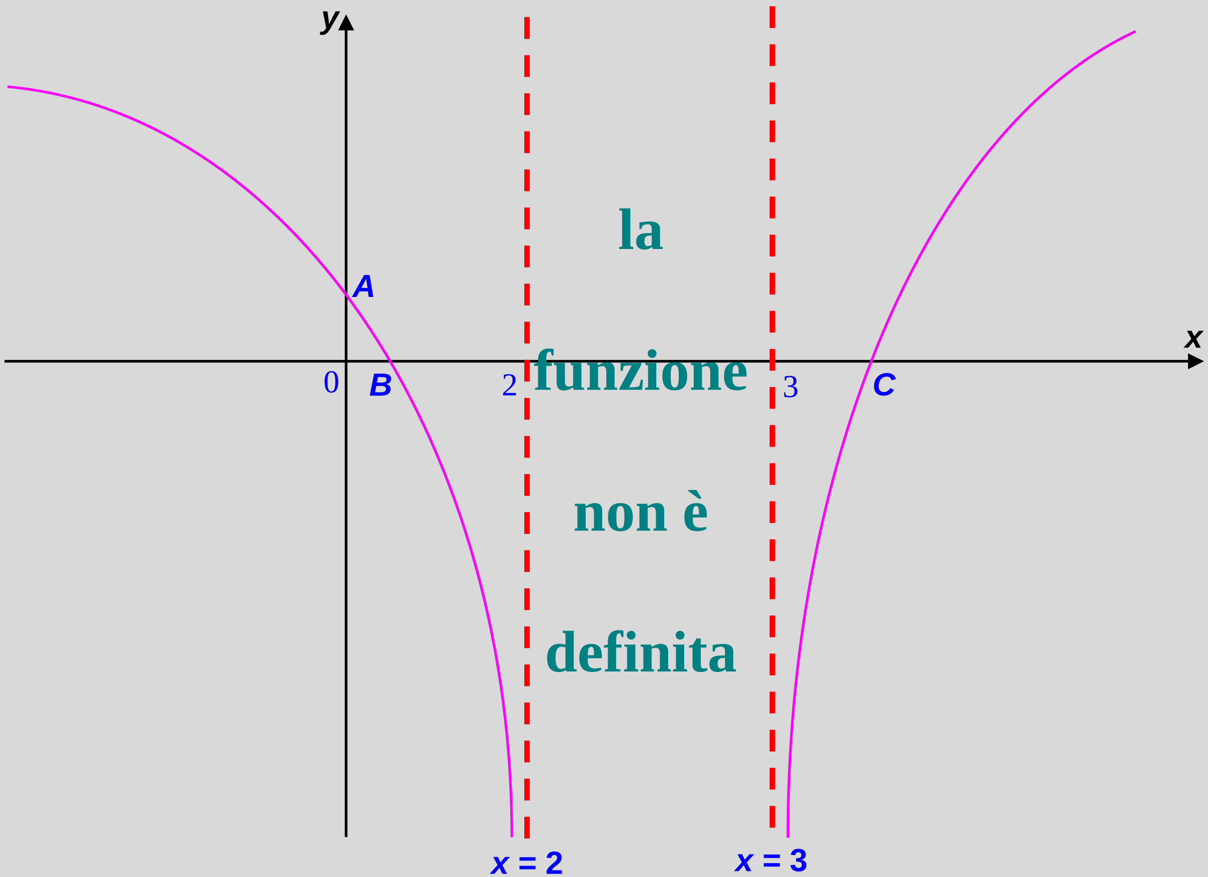
$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

per $2 < x < 3$ la funzione non è definita

la funzione non ha né Massimi né minimi

$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

7) Grafico della funzione



Esempio 3

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

⬇

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x^2+4}{x^2-4} > 0, x^2-4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} x^2+4>0 \\ x^2-4>0 \end{cases}, x^2-4 \neq 0 \right\} =$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{cases} sempre \\ x<-2, x>2 \end{cases}, x \neq \pm 2 \right\} = \{ x \in \mathbb{R} : x<-2, x>2 \}$$

$$C.E. = \{ x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, 2 < x < +\infty \}$$

⬇

x* = – 2, *x* = 2 *A.V.

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

⬇

2) Intersezioni con gli assi

In x = 0 la funzione non è definita:
non esistono, quindi, intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} y=0 \\ 0 = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ ln(1) = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ 1 = \frac{x^2+4}{x^2-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2+4}{x^2-4} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+4-x^2+4}{x^2-4} = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2-4} = 0 \Rightarrow 8 = 0 \Rightarrow mai$$

non esistono, quindi, intersezioni con l'asse x

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

3) Studio del segno della funzione

$$y>0 \iff ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)>0=ln(1) \iff \frac{x^2+4}{x^2-4}>1 \iff \frac{x^2+4}{x^2-4}-1>0$$

$$\iff \frac{x^2+4-x^2+4}{x^2-4}>0 \iff \frac{8}{x^2-4}>0 \iff \begin{cases} 8>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \iff \begin{cases} sempre \\ x<-2, x>+2 \end{cases}$$

	-2	$+2$
+ + +	+ + + + +	+ + +
+ + +	- - - - - -	+ + +
+	-	+
$y>0$	**$y<0$**	**$y>0$**

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < -2, 2 < x < +\infty\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln(1) = 0$$

$y = 0$ *A.O.*

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

5) Calcolo della derivata prima

$$y' = D\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = \frac{1}{\frac{x^2+4}{x^2-4}} \cdot D\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+4\right)(2x)}{\left(x^2-4\right)^2} =$$

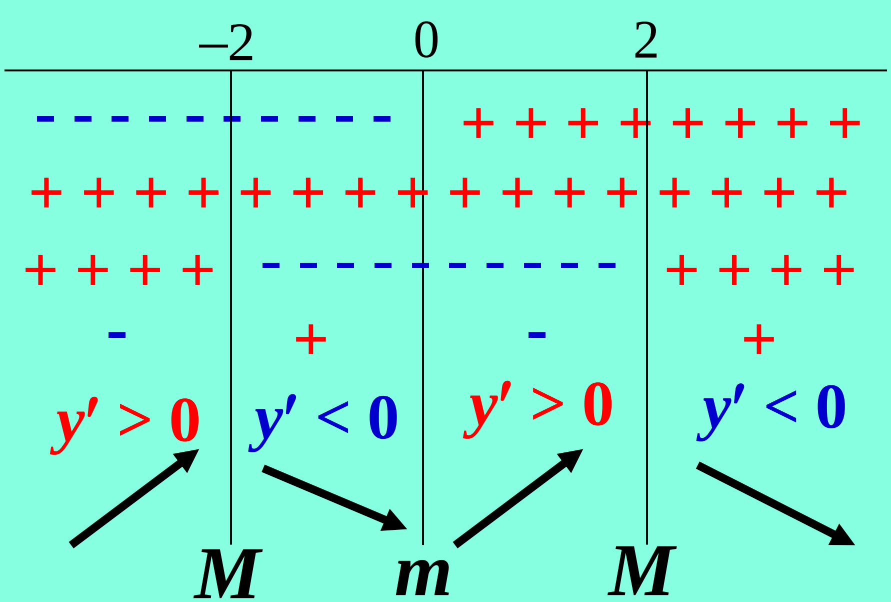
$$= \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{2x^3-8x-2x^3-8x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-16x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)}$$

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \Leftrightarrow -\frac{16x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)} > 0 \Leftrightarrow \frac{16x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2+4 > 0 \\ x^2-4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ sempre \\ x < -2, x > 2 \end{cases}$$



$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

⬇

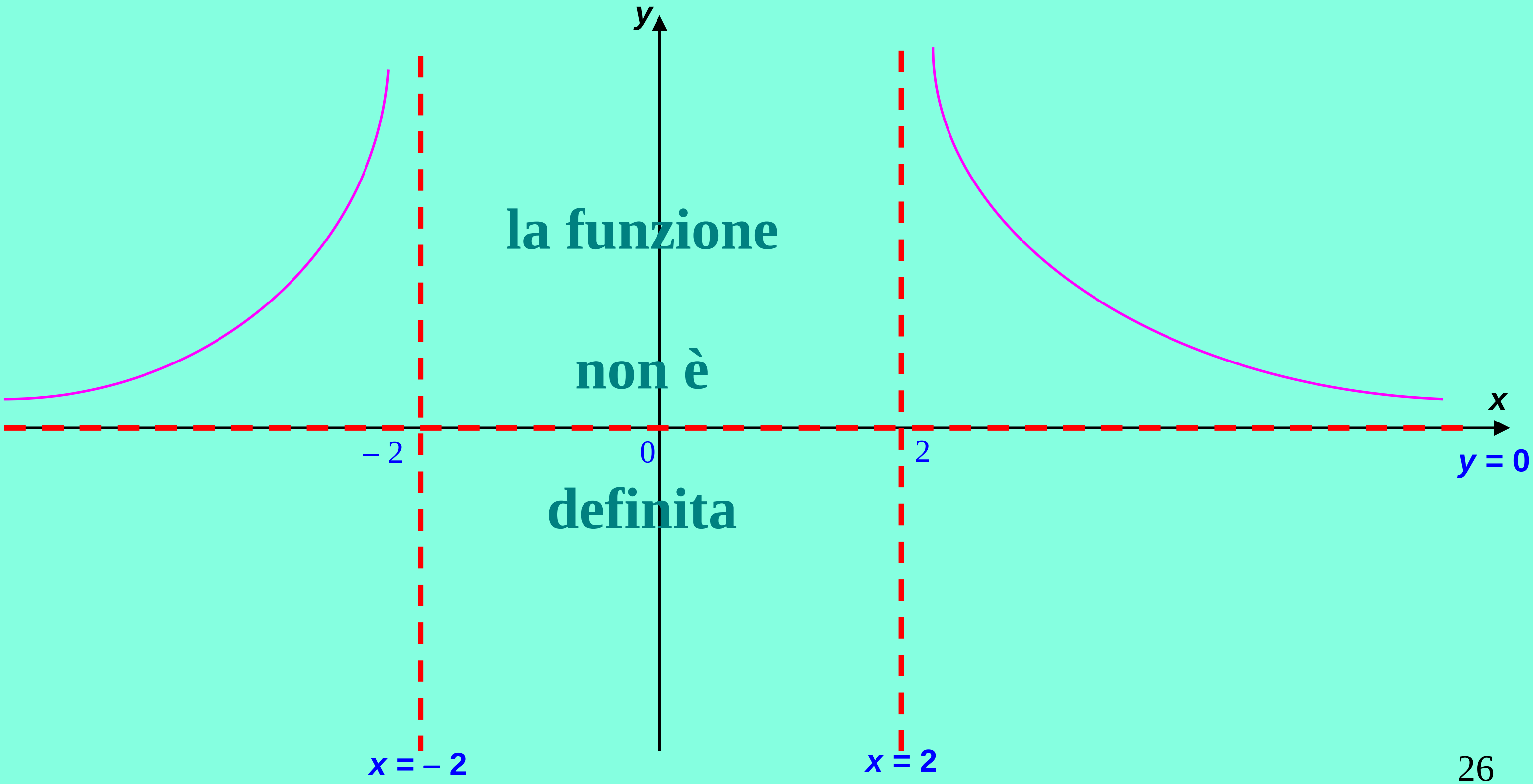
per –2 < *x* < 2 la funzione non è definita

⬇

la funzione non ha né Massimi né minimi

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

7) Grafico della funzione



Esempio 4

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

⬇

1) Determinazione del campo di esistenza (*C.E.*)

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x^2+1} > 0, x^2+1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2+1 > 0, x^2+1 \neq 0\right\} =$$

$$= \left\{x \in \mathbb{R} : sempre, sempre\right\} = \mathbb{R}$$

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\right\}$$

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

2) Intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ln(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = (0,0) \equiv O$$ **intersezione con l'asse *y***

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln(1) = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 1 = \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{x^2+1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1 - x^2 - 1}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow -\frac{x^2}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow B = (0,0) \equiv A \equiv O$$

intersezione con l'asse *x*

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

3) Studio del segno della funzione

$$y > 0 \iff ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) > 0 = ln(1) \iff \frac{1}{x^2+1} > 1 \iff \frac{1}{x^2+1} - 1 > 0$$

$$\iff \frac{1-x^2-1}{x^2+1} > 0 \iff \frac{-x^2}{x^2+1} > 0 \iff \frac{x^2}{x^2+1} < 0 \iff \begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} sempre \\ sempre \end{cases}$$

+ + + + + + + + + + +

+ + + + + + + + + + +

+

$y < 0$

→ **la funzione è sempre negativa**

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

4) Limiti agli estremi del *C.E.*

$$C.E. = \left\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\right\}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln(0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln(0) = -\infty$$

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

5) Calcolo della derivata prima

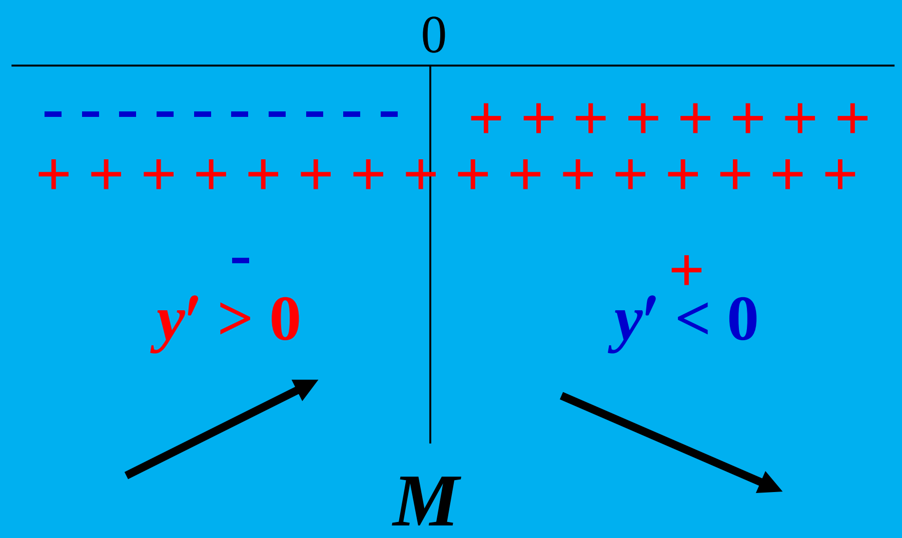
$$y' = D\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}} \cdot D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{x^2+1}{1} \cdot \frac{0\left(x^2+1\right)-1\left(2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{1} \cdot \frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} = -\frac{2x}{x^2+1}$$

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

6) Studio del segno della derivata prima

$$y' > 0 \iff -\frac{2x}{x^2+1} > 0 \iff \frac{2x}{x^2+1} < 0 \iff \begin{cases} 2x > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ sempre \end{cases}$$



$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

⬇

$x = 0$ è un *Massimo* per la funzione

⬇

$O = (0, 0)$ è un *punto di Massimo* per la funzione

$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

7) Grafico della funzione