

# L'ALGEBRA LINEARE

*Daniela Tondini*  
*dtondini@unite.it*

**Facoltà di Scienze politiche**

**CdS in Economia**

**Università degli Studi di Teramo**



# OPERAZIONI TRA MATRICI: SOMMA E DIFFERENZA

Due matrici qualsiasi sono

***sommabili*** o ***sottraibili***

se hanno lo stesso ordine  $m \times n$



La matrice somma  
avrà ordine  $m \times n$



La matrice differenza  
avrà ordine  $m \times n$

# LA SOMMA

La **matrice somma** si ottiene sommando  
gli elementi che si trovano nella medesima posizione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = B_{3 \times 3}$$



**A e B sono sommabili**

**(entrambe quadrate di ordine 3)**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 3}$$



***matrice somma***

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 3+1 & 2+2 & 1+0 \\ -1-4 & -1+3 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

**$\mathbf{A} + \mathbf{B}$  quadrata di ordine 3**

# LA DIFFERENZA

La **matrice differenza** si ottiene sottraendo  
gli elementi che si trovano nella medesima posizione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = B_{3 \times 3}$$



**A e B sono sottraibili**

**(entrambe quadrate di ordine 3)**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 3}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 3}$$



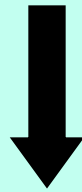
***matrice differenza***

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & 3-0 \\ 3-1 & 2-2 & 1-0 \\ -1-(-4) & -1-3 & 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

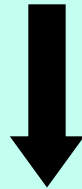
***A-B* quadrata di ordine 3**

## Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = A_{3 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B_{3 \times 2}$$



***A* e *B* sono sommabili e sottraibili**  
(entrambe rettangolari di ordine 3×2)



***A+B*, *A-B* rettangolari di ordine 3×2**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 2}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 2}$$



$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

***matrice somma***

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1-5 & -1-1 \\ -3-(-1) & 3-(-2) \\ -4-(-1) & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

***matrice differenza***



## Esempio 2

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{2 \times 3}$$



**$\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  non sono né sommabili né sottraibili:**

**$\mathbf{A}$  ha ordine 3**

**$\mathbf{B}$  ha ordine  $2 \times 3$**



***Non esiste la matrice somma  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$***

***Non esiste la matrice differenza  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$***

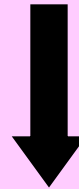
**N.B.!**

$$**A+B = B+A**$$

**la somma tra matrici è commutativa**

$$**A** = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = **A**_{3 \times 2}$$

$$**B** = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = **B**_{3 \times 2}$$



$$**A+B** = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$**B+A** = \begin{pmatrix} 5+1 & 1-1 \\ -1-3 & -2+3 \\ -1-4 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$



$$**A+B = B+A**$$

# OPERAZIONI TRA MATRICI: PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Due matrici qualsiasi sono

***moltiplicabili***

se il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda matrice

In generale:

$A$  è di ordine  $m \times n$

$B$  è di ordine  $n \times k$



$A$  e  $B$  sono *moltiplicabili*



$AB$  ha ordine  $m \times k$

# Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_{3 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_{2 \times 4}$$



$A$  e  $B$  sono *moltiplicabili*

$AB$  ha ordine  $3 \times 4$

## Regola pratica!

**Per calcolare il prodotto di due matrici moltiplicabili  
basta sommare i prodotti degli elementi di  
ciascuna riga della prima matrice per  
i corrispondenti elementi di ciascuna colonna  
della seconda matrice**



**PRODOTTO RIGHE PER COLONNE**

## Esempio 1 (segue dalla slide 13)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 2} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{2 \times 4}$$

↓ (cfr. slide 12)

***A* e *B* sono *moltiplicabili***

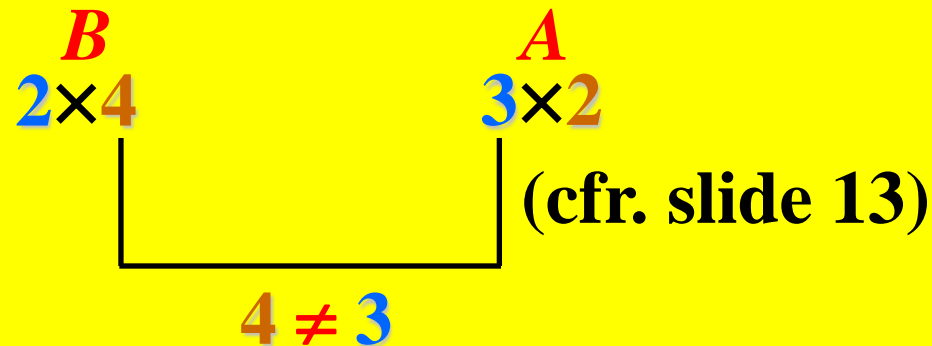
***AB* ha ordine  $3 \times 4$**

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{AB}_{3 \times 4}$$

***N.B.!***

$$***AB \neq BA***$$

**il prodotto tra matrici non è commutativo**



***B e A non sono *moltiplicabili****



## Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{3 \times 4}$$



**A e B sono *moltiplicabili***

**AB ha ordine  $3 \times 4$**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{3 \times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 4}$$



$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{AB}_{3 \times 4}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{3 \times 4} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3}$$



$$\begin{array}{cc} B & A \\ 3 \times 4 & 3 \times 3 \end{array}$$

4  $\neq$  3

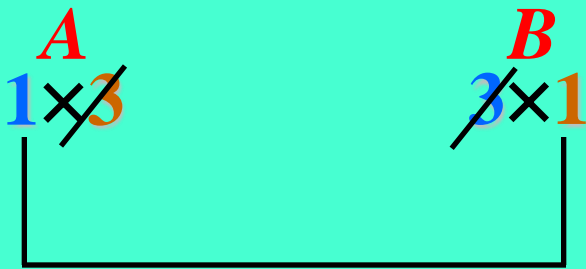


***B*** ed ***A*** non sono ***moltiplicabili***

## Esempio 3

$$A = (4 \ 5 \ 6) = A_{1 \times 3}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = B_{3 \times 1}$$



***A e B sono moltiplicabili***

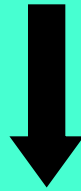
***AB ha ordine 1x1***



***B e A sono moltiplicabili***

***BA ha ordine 3x3***

$$\mathbf{A} = (4 \quad 5 \quad 6) = \mathbf{A}_{1 \times 3} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 1}$$



$$\mathbf{AB} = [4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot (-1)] = \mathbf{17} = \mathbf{AB}_{1 \times 1}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 5 & 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 5 & (-1) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = \mathbf{BA}_{3 \times 3}$$



$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

## Esempio 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{2 \times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = B_{2 \times 2}$$



$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB_{2 \times 2}$$



**$AB = \mathbf{0} \not\Rightarrow A = \mathbf{0}$  oppure  $B = \mathbf{0}$**   
**(cfr. esempio 4:  $A \neq \mathbf{0}$ ,  $B \neq \mathbf{0}$ ,  $AB = \mathbf{0}$ )**

## Esempio 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{2 \times 2} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = B_{2 \times 2}$$



$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB_{2 \times 2}$$



$$A = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad AB = \mathbf{0}$$

oppure

$$A \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad B = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad AB = \mathbf{0}$$

(cfr. esempio 5:  $A = \mathbf{0}$ ,  $B \neq \mathbf{0}$ ,  $AB = \mathbf{0}$ )