L'ALGEBRA LINEARE

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

OPERAZIONI TRA MATRICI: SOMMA E DIFFERENZA

Due matrici qualsiasi sono

sommabili* o *sottraibili

se hanno lo stesso ordine $m \times n$

La matrice somma avrà ordine $m \times n$

La matrice differenza avrà ordine $m \times n$

LA SOMMA

La *matrice somma* si ottiene <u>sommando</u>

gli elementi che si trovano nella medesima posizione

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{3}\times\mathbf{3}} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_{\mathbf{3}\times\mathbf{3}}$$

$\Downarrow$

A **e** ***B*** **sono <u>sommabili</u>**

(entrambe quadrate di ordine 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = B_{3\times 3}$$

$$\Downarrow$$

matrice somma

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 3+0 \\ 3+1 & 2+2 & 1+0 \\ -1-4 & -1+3 & 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$A+B$ quadrata di ordine 3

LA DIFFERENZA

La *matrice differenza* si ottiene <u>sottraendo</u>

gli elementi che si trovano nella medesima posizione

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = B_{3\times 3}$$

$\Downarrow$

***A* e *B* sono <u>sottraibili</u>**

(entrambe quadrate di ordine 3)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -4 \end{pmatrix} = B_{3\times 3}$$

$$\Downarrow$$

matrice differenza

$$A - B = \begin{pmatrix} 1-1 & 2-0 & 3-0 \\ 3-1 & 2-2 & 1-0 \\ -1-(-4) & -1-3 & 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

A–B **quadrata di ordine 3**

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B_{3\times 2}$$

$\Downarrow$

A e B sono <u>sommabili</u> e <u>sottraibili</u>

(entrambe rettangolari di ordine 3×2)

$\Downarrow$

$A+B$, $A-B$ rettangolari di ordine 3×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B_{3\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

matrice somma

$$A-B = \begin{pmatrix} 1-5 & -1-1 \\ -3-(-1) & 3-(-2) \\ -4-(-1) & 8-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 5 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

matrice differenza

Esempio 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_{3\times 3} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{B}_{2\times 3}$$

$\Downarrow$

A **e** ***B*** **<u>non</u> sono né <u>sommabili</u> né <u>sottraibili</u>:**

A **ha ordine 3**

B **ha ordine 2×3**

$\Downarrow$

Non esiste la matrice somma A+B

Non esiste la matrice differenza A–B

N.B.!

$A+B = B+A$

la somma tra matrici è commutativa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B_{3\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+5 & -1+1 \\ -3-1 & 3-2 \\ -4-1 & 8+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B+A = \begin{pmatrix} 5+1 & 1-1 \\ -1-3 & -2+3 \\ -1-4 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ -4 & 1 \\ -5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A+B = B+A$$

OPERAZIONI TRA MATRICI:
PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Due matrici qualsiasi sono

moltiplicabili

se il numero delle colonne della prima matrice è

uguale al numero delle righe della seconda matrice

In generale:

A è di ordine $m \times n$ *B* è di ordine $n \times k$

$$\Downarrow$$

A e *B* sono ***moltiplicabili***

$$\Downarrow$$

$$\underset{m\times\cancel{n}}{A} \qquad \underset{\cancel{n}\times k}{B}$$

AB ha ordine $m \times k$

Esempio 1

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_{2\times 4}$$

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ 3\times\cancel{2} & & \cancel{2}\times 4 \end{array}$$

A **e** ***B*** **sono** ***moltiplicabili***

AB **ha ordine** 3×4

Regola pratica!

Per calcolare il prodotto di due matrici moltiplicabili basta sommare i prodotti degli elementi di ciascuna riga della prima matrice per i corrispondenti elementi di ciascuna colonna della seconda matrice

$\Downarrow$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Esempio 1 (segue dalla slide 13)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_{2\times 4}$$

$\Downarrow$ **(cfr. slide 12)**

A **e** ***B*** **sono** ***moltiplicabili***

AB **ha ordine 3×4**

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot 2+1\cdot 3 & 2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 3+1\cdot 1 \\ 3\cdot 1+0\cdot 4 & 3\cdot 2+0\cdot 3 & 3\cdot 1+0\cdot 0 & 3\cdot 3+0\cdot 1 \\ 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 3 & 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 3+2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} = AB_{3\times 4}$$

N.B.!

$$AB \neq BA$$

<u>il prodotto tra matrici non è commutativo</u>

$$\begin{array}{ccc} B & & A \\ 2\times\underline{4} & & \underline{3}\times 2 \end{array}$$

(cfr. slide 13)

$$4 \neq 3$$

$$\Downarrow$$

B **e** ***A*** **<u>non</u> sono** ***moltiplicabili***

Esempio 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{3\times 4}$$

$$\underset{3\times\cancel{3}}{A} \qquad\qquad \underset{\cancel{3}\times 4}{B}$$

A **e** ***B*** **sono** ***moltiplicabili***

AB **ha ordine 3×4**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = B_{3\times 4}$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 2 & 2\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1 & 2\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot 2 \\ 3\cdot 1+2\cdot 2+0\cdot 2 & 3\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 3 & 3\cdot 1+2\cdot 1+0\cdot 1 & 3\cdot 0+2\cdot 0+0\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 2 & 1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 3 & 1\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 1 & 1\cdot 0+0\cdot 0+1\cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 0 \\ 7 & 5 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = AB_{3\times 4}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\2&1&1&0\\2&3&1&2\end{pmatrix}=B_{3\times 4}\qquad A=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=A_{3\times 3}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{3\times 4}{B}\qquad\qquad \underset{3\times 3}{A}$$

$$4\neq 3$$

$$\Downarrow$$

B **ed** ***A*** **<u>non</u> sono** ***moltiplicabili***

Esempio 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A_{1\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = B_{3\times 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underset{1\times \cancel{3}}{A} \qquad \underset{\cancel{3}\times 1}{B} \qquad\qquad \underset{3\times \cancel{1}}{B} \qquad \underset{\cancel{1}\times 3}{A}$$

A **e** ***B*** **sono** ***moltiplicabili*** — ***B*** **e** ***A*** **sono** ***moltiplicabili***

AB **ha ordine** 1×1 — ***BA*** **ha ordine** 3×3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = A_{1\times 3} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = B_{3\times 1}$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \left[4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 6\cdot(-1)\right] = \mathbf{17} = AB_{1\times 1}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 6 \\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} = BA_{3\times 3}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{AB \neq BA}$$

Esempio 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = B_{2\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB_{2\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$AB = 0 \quad \not\Rightarrow \quad A = 0 \quad \text{oppure} \quad B = 0$$

(cfr. esempio 4: $A \neq 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$)

Esempio 5

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{2\times 2} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = B_{2\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = AB_{2\times 2}$$

$$\Downarrow$$

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B \neq 0 \quad \Rightarrow \quad AB = 0$$

oppure

$$A \neq 0 \quad \text{e} \quad B = 0 \quad \Rightarrow \quad AB = 0$$

(cfr. esempio 5: $A = 0$, $B \neq 0$, $AB = 0$)