L'ALGEBRA LINEARE

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

LE MATRICI:
IL DETERMINANTE

Ad ogni matrice quadrata *A* di ordine *n* risulta sempre possibile associare un numero reale che chiameremo ***determinante*** di *A*

$$A_n \longmapsto detA = |A|$$

DETERMINANTI DEL PRIMO ORDINE

$$\boxed{n = 1}$$

$A_1 = (a_{11})$ ➡ $\det A_1 = |A_1| = a_{11}$

$A_1 = (2)$ ➡ $\det A_1 = |A_1| = 2$

DETERMINANTI DEL SECONDO ORDINE

$$n = 2$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = |A_2| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(3) = -1 - 3 = -4$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (4)(0) - (1)(3) = 0 - 3 = -3$$

DETERMINANTI DEL TERZO ORDINE

$$\boxed{n = 3}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

Regola pratica!

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata *A*

di ordine 3 basta riscrivere, accanto alla matrice *A*,

le sue prime due colonne, sommare tra di loro i prodotti

degli elementi situati sulle diagonali principali

ed infine <u>sottrarre</u> a questi la somma di tutti i prodotti

degli elementi situati sulle diagonali secondarie

↓

METODO DI SARRUS

Esempio 1

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$detA_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{matrix} =$$

$$= (1)(7)(3) + (3)(4)(6) + (5)(2)(8) - \left[(5)(7)(6) + (1)(4)(8) + (3)(2)(3) \right] =$$

$$= 21 + 72 + 80 - (210 + 32 + 18) = 173 - 260 = -87$$

Esempio 2

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 4 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -7 & 5 & 3 & -7 \end{array}\right. =$$

$$= (3)(4)(5) + (2)(2)(3) + (-1)(-5)(-7) - \left[(-1)(4)(3) + (3)(2)(-7) + (2)(-5)(5)\right] =$$

$$= 60 + 12 - 35 - (-12 - 42 - 50) = 37 - (-104) = +141$$

LE MATRICI:
IL MINORE COMPLEMENTARE

Data una matrice <u>quadrata</u> *A* di ordine *n* si definisce

minore complementare m_{ij}

dell'elemento generico a_{ij} **della matrice *A* il**

determinante della sottomatrice ottenuta da *A*

cancellando la *i*-esima riga e la *j*-esima colonna

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 2}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{11} = |4| = 4$$

è il minore complementare di $a_{11} = 1$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{12} = |3| = 3$$

è il minore complementare di $a_{12} = 2$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{21} = |2| = 2$$

è il minore complementare di $a_{21} = 3$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{22} = |1| = 1$$

è il minore complementare di $a_{22} = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 3}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 32 = -11$$

è il minore complementare di $a_{11} = 1$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 24 = -18$$

è il minore complementare di $a_{12} = 3$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 42 = -26$$

è il minore complementare di $a_{13} = 5$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 40 = -31$$

è il minore complementare di $a_{21} = 2$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 30 = -27$$

è il minore complementare di $a_{22} = 7$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

è il minore complementare di $a_{23} = 4$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 35 = -23$$

è il minore complementare di $a_{31} = 6$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 10 = -6$$

è il minore complementare di $a_{32} = 8$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow m_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 6 = 1$$

è il minore complementare di $a_{33} = 3$

LE MATRICI:
IL COMPLEMENTO ALGEBRICO

Data una matrice quadrata A di ordine n si definisce

complemento algebrico c_{ij}

dell'elemento generico a_{ij} della matrice A il minore complementare di a_{ij}, preso con il segno positivo o negativo a seconda che $i+j$ sia rispettivamente pari o dispari

$$\boxed{c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 2}$$

$\Downarrow$ **(cfr. slide 2 per i minori complementari)**

$c_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4$ **è il complemento algebrico di $a_{11} = 1$**

$c_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 3 = -3$ **è il complemento algebrico di $a_{12} = 2$**

$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$ **è il complemento algebrico di $a_{21} = 3$**

$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$ **è il complemento algebrico di $a_{22} = 4$**

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 3}$$

$\Downarrow$ (cfr. slide 3 per i minori complementari)

$$c_{11} = (-1)^{i+j} \cdot m_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = +(21-32) = -11$$

è il complemento algebrico di $a_{11} = 1$

$$c_{12} = (-1)^{i+j} \cdot m_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(6-24) = +18$$

è il complemento algebrico di $a_{12} = 3$

$$c_{13} = (-1)^{i+j} \cdot m_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = +(16-42) = -26$$

è il complemento algebrico di $a_{13} = 5$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ **(cfr. slide 4 per i minori complementari)**

$$c_{21} = (-1)^{i+j} \cdot m_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -(9-40) = +31$$

è il complemento algebrico di a_{21} = 2

$$c_{22} = (-1)^{i+j} \cdot m_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = +(3-30) = -27$$

è il complemento algebrico di a_{22} = 7

$$c_{23} = (-1)^{i+j} \cdot m_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -(8-18) = +10$$

è il complemento algebrico di a_{23} = 4

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ **(cfr. slide 5 per i minori complementari)**

$$c_{31} = (-1)^{i+j} \cdot m_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = +(12-35) = -23$$

è il complemento algebrico di a_{31} = 6

$$c_{32} = (-1)^{i+j} \cdot m_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4-10) = +6$$

è il complemento algebrico di a_{32} = 8

$$c_{33} = (-1)^{i+j} \cdot m_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = +(7-6) = +1$$

è il complemento algebrico di a_{33} = 3

DETERMINANTI DEL QUARTO ORDINE

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata *A* di ordine $n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, 6, \ldots$) occorre fissare una riga (o colonna) a piacere e poi sommare i prodotti degli elementi della riga (o colonna) scelta per i rispettivi complementi algebrici

Osservazione!

La regola precedente è applicabile anche per matrici quadrate di ordine 3, cioè per:

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

....

Regola pratica!

Per calcolare il determinante di una matrice quadrata *A*

di ordine $n \geq 3$ ($n = 3, 4, 5, 6, \ldots$) si procede come segue:

- **si fissa una riga (o colonna) a proprio piacere**
  (generalmente quella con un maggior numero di zeri)
- **si applica la *regola dei segni* (cfr. slide 20)**
- **si sommano i prodotti ottenuti moltiplicando gli elementi della riga (o colonna) scelta per i propri minori complementari**

$\Downarrow$

METODO DI LAPLACE

Regola dei segni!

Data una matrice quadrata A di ordine $n \geq 3$,

all'elemento a_{11} si attribuisce sempre il segno positivo;

si procede, per righe e per colonne, mai per diagonali,

a segni alterni;

il procedimento si arresta nel momento in cui,

a ciascun elemento della riga (o colonna) scelta a priori,

sia stato attribuito un segno

RIEPILOGO

A **è una matrice quadrata di ordine** ***n*** **= 1**

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{detA_1} = a_{11}$$

A **è una matrice quadrata di ordine** ***n*** **= 2**

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{detA_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

A è una matrice quadrata di ordine $n = 3$

Sarrus

Laplace

A è una matrice quadrata di ordine $n \geq 4$ ($n = 4, 5, 6, \ldots$)

Laplace

Esempio 1

$$n = 3$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Sarrus

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 141$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

fissiamo, ad esempio, la prima riga

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

per la regola dei segni

$$A_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Laplace

$$detA_3 = +3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -5 & 4 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= +3 \cdot (20 + 14) - 2 \cdot (-25 - 6) + (-1) \cdot (35 - 12) =$$

$$= 102 + 62 - 23 = 164 - 23 = 141$$

Se l'ordine della matrice è 3 risulta <u>sempre</u> possibile calcolare il suo determinante applicando *indifferentemente* Sarrus o Laplace

Esempio 2

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 4}$$

$$\Downarrow$$

fissiamo, ad esempio, la terza riga

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

per la regola dei segni

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Laplace

$$\det A_4 = +0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 \cdot (-2-2) - 0 \cdot (2+2) + (-1) \cdot (1-2-3) + (-1) \cdot (-2-4-6) =$$

$$= +4 + 12 = +16$$

Osservazioni!

I determinanti del terzo ordine dell'esempio 2 possono essere calcolati utilizzando indifferentemente *Sarrus* o *Laplace*

Nell'esempio 2 è stato sufficiente calcolare gli ultimi due determinanti del terzo ordine (gli altri sono moltiplicati per 0!!!)

Quando si utilizza *Laplace* conviene fissare sempre una riga (o una colonna) nella quale ci sia un maggior numero di zeri (i calcoli si semplificano!!!)