Le scelte «ottimali» di consumo

L'approccio matematico

Lezione del 13 marzo 2024

Il problema di ottimizzazione del consumatore

$$\max_{x_i} U = f(x_i)$$

Preferenze

Funzione di utilità

$$sub \quad \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i = R$$

Vincolo di Bilancio

- Una funzione di utilità associa un numero a ciascun paniere in modo tale che ai panieri giudicati migliori venga assegnato un numero più elevato rispetto ai panieri giudicati inferiori.
- Una funzione di utilità è analoga a una mappa di curve di indifferenza poiché entrambe forniscono una descrizione completa dell'ordinamento delle preferenze del consumatore.
- L'utilità è un concetto ordinale e non cardinale.
- Differenze nella grandezza dell'utilità non hanno alcuna interpretazione di per se stesse.
- L'utilità tra individui diversi non è in alcun modo comparabile.
- Qualsiasi trasformazione di una funzione di utilità che preservi l'ordinamento originale dei panieri è una rappresentazione altrettanto buona delle preferenze quanto la rappresentazione originaria.

Come lo risolviamo?

È un problema che in matematica viene definito di **ottimizzazione vincolata**.

Noi lo trasformiamo in un problema di ottimizzazione libera utilizzando il metodo di Lagrange. Questo assume la seguente forma:

$$\max_{x_i,\lambda} L = f(x_i) + \lambda \cdot \left(R - \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i \right)$$

Si risolve imponendo le condizioni del primo (FOC) e del secondo (SOC) ordine per un massimo, ma per come è costruita la funzione di utilità, la FOC è necessaria ed anche sufficiente per identificare un massimo:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \forall\, i \qquad\qquad \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} - p_i \cdot \lambda = 0 \qquad \forall\, i$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad\qquad R - \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot x_i = 0$$

Il problema con 2 beni

$$\max_{A,B} U = U(A,B)$$

$$sub \qquad p_A \cdot A + p_B \cdot B = R$$

Trasformiamo questo problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione libera con la funzione lagrangiana:

$$\max_{A,B,\lambda} L = U(A,B) + \lambda \cdot (R - p_A \cdot A - p_B \cdot B)$$

Le cui FOC sono:

Utilità Marginale di A

$$\frac{\partial L}{\partial A} = 0 \longrightarrow U_A - \lambda \cdot p_A = 0 \longrightarrow \frac{U_A}{p_A} = \lambda$$

Utilità Marginale di B

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 0 \longrightarrow U_B - \lambda \cdot p_B = 0 \longrightarrow \frac{U_B}{p_B} = \lambda$$

$$\frac{U_A}{p_A} = \frac{U_B}{p_B} \longrightarrow \frac{U_B}{U_A} = \frac{p_B}{p_A}$$

SMS

Pendenza del vincolo

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow R - p_A \cdot A - p_B \cdot B = 0$$

Nota bene: la soluzione non è un "numero", ma una regola che suggerisce quella che deve essere la combinazione ottimale di consumo tra i due beni

Diamo una forma alle preferenze:
la funzione Cobb-Douglas

$$\max_{A,B} U = A^{\alpha} \cdot B^{\beta} \qquad 0 < \alpha, \beta < 1 \qquad \alpha + \beta = 1$$

$$sub \quad p_A \cdot A + p_B \cdot B = R$$

α e β sono i pesi che attribuiamo ai beni nell'ambito delle nostre preferenze

Trasformiamo questo problema di ottimizzazione vincolata in un problema di ottimizzazione libera con la funzione lagrangiana:

$$\max_{A,B,\lambda} L = A^{\alpha} \cdot B^{\beta} + \lambda \cdot (R - p_A \cdot A - p_B \cdot B)$$

le cui FOC sono:

$$\frac{\partial L}{\partial A} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial A} - \lambda \cdot p_A = 0 \longrightarrow \alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^{\beta} - \lambda \cdot p_A = 0 \longrightarrow \frac{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^{\beta}}{p_A} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 0 \longrightarrow \frac{\partial U}{\partial B} - \lambda \cdot p_B = 0 \longrightarrow \beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^{\alpha} - \lambda \cdot p_B = 0 \longrightarrow \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^{\alpha}}{p_B} = \lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \longrightarrow R - p_A \cdot A - p_B \cdot B = 0$$

Rapporto ottimale di consumo

$$\frac{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^{\beta}}{p_A} = \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^{\alpha}}{p_B} \longrightarrow \frac{\beta \cdot B^{\beta-1} \cdot A^{\alpha}}{\alpha \cdot A^{\alpha-1} \cdot B^{\beta}} = \frac{p_B}{p_A} \longrightarrow \boxed{\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A}}$$

Soluzione e analisi di statica comparata

Una volta noto il rapporto di consumo ottimale, esplicitiamo rispetto ad un bene e sostituiamo nel vincolo di bilancio.

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A} \longrightarrow A = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{p_B}{p_A} \cdot B \qquad \text{oppure} \qquad B = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_A}{p_B} \cdot A$$

$$p_A \cdot A + p_B \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{p_A}{p_B} \cdot A\right) = R \longrightarrow p_A \cdot A + \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot p_A \cdot A\right) = R \longrightarrow p_A \cdot A \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = R$$

$$A = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{R}{p_A}$$

Soluzione esplicita per A, e sostituendo avremo:

$$B = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{R}{p_B}$$

Soluzione esplicita per B.

Le soluzioni possono anche essere scritte come funzioni, con relativi segni di statica comparata

$$A = f(\overset{+}{\alpha}, \overset{-}{\beta}, \overset{-}{p_A}, \overset{+}{R}) \qquad B = f(\overset{-}{\alpha}, \overset{+}{\beta}, \overset{-}{p_B}, \overset{+}{R})$$