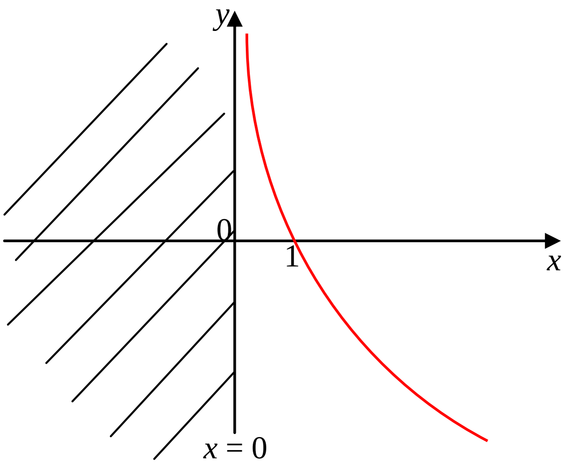
LE FUNZIONI LOGARITMICHE

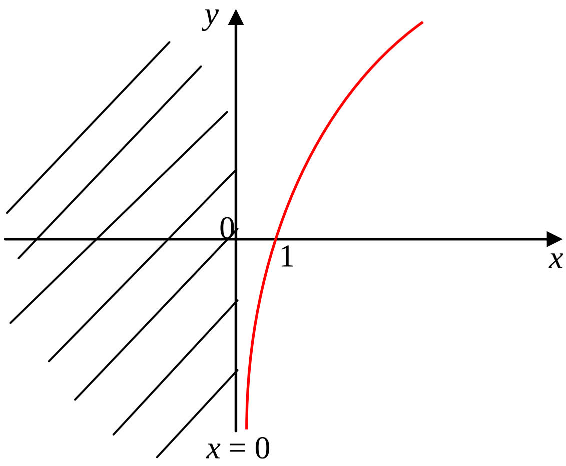
INTRODUZIONE

Osserviamo, in primo luogo, che le funzioni logaritmiche sono della forma $y = \log_a(x)$ con a costante positiva diversa da 1 (il caso $a = 1$ è banale per cui non sarà oggetto del nostro studio).
Si possono allora verificare i seguenti due casi (si raccomanda di analizzare i due casi parallelamente e di effettuarne la lettura in senso verticale):

I CASO	II CASO
$\boxed{0 < a < 1}$	$\boxed{a > 1}$

In entrambi i casi la funzione $y = \log_a(x)$ si può studiare per punti
e constatare che essa presenta i seguenti andamenti





È facile verificare che:

Poiché le funzioni logaritmiche, come si evince dai due grafici precedenti,
sono definite solo per i valori positivi della x, il loro campo di esistenza si ottiene considerando,
non solo il campo di esistenza dell'argomento del logaritmo,
ma anche imponendo che l'argomento stesso sia strettamente positivo

$x = 0 \Rightarrow y = \log_a(0) = -\infty \Rightarrow$ la retta $x = 0$, ovvero l'asse , ovvero l'asse y, è un asintoto verticale
$y = 0 \Rightarrow 0 = \log_a(x) \Rightarrow x = 1 \Rightarrow (1, 0)$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse x

I CASO	II CASO
$\nexists \lim_{x\to-\infty} (\log_a x)$	$\nexists \lim_{x\to-\infty} (\log_a x)$
(la funzione non è definita per $x < 0$)	(la funzione non è definita per $x < 0$)
$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x) = -\infty$	$\lim_{x\to+\infty} (\log_a x) = +\infty$
La funzione è sempre decrescente	La funzione è sempre crescente

La regola di derivazione delle funzioni logaritmiche
verrà illustrata negli esempi che seguono

Osserviamo, infine, che, nel nostro studio, ci occuperemo esclusivamente delle funzioni logaritmiche aventi per base il numero di *Nepero* $e > 1$, ovvero dei cosiddetti *logaritmi naturali*, indicati con il simbolo *ln*.

$$y = ln\left(x^2 - 2x\right)$$

Campo di Esistenza.

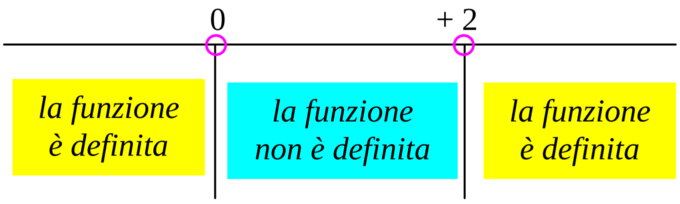
Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è un polinomio, e quindi definito su tutto l'asse reale, essa risulta definita esclusivamente per quei valori della x ove l'argomento è strettamente positivo (è ben noto che, nel campo reale, esiste solo il logaritmo di un numero positivo), cioè:

$\boxed{C.E.} = \{x\in\mathbb{R}: x^2 - 2x > 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x(x - 2) > 0\} = \{x\in\mathbb{R}: x < 0, x > 2\} =$

$= \boxed{\{x\in\mathbb{R}: -\infty < x < 0, +2 < x < +\infty\}}$

Ne segue:

$\boxed{A.V.: x = 0, x = +2}$



Intersezioni con gli Assi.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere, come di consueto, i due sistemi, osservando, però, che, nel caso in esame, in $x = 0$ la funzione non è definita, motivo per cui essa non presenta intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(x^2 - 2x\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln\left(x^2 - 2x\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{ln\left(x^2 - 2x\right)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = +1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = 1 - \sqrt{2} \cong -0,4 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \cong 2,4 \end{cases}$$

Osserviamo che:

- nel terzo passaggio, abbiamo considerato l'esponenziale di ambo i membri dell'equazione;
- nel quarto passaggio, invece, abbiamo tenuto in considerazione sia il fatto che $e^0 = 1$ (ogni numero elevato a zero è sempre uguale ad uno) sia il fatto che l'esponenziale ed il logaritmo sono due funzioni, l'una l'inversa dell'altra, per cui "si annullano a vicenda" (il principio utilizzato è analogo a quello usato per le radici quadrate, che si elidono se elevate al quadrato, o ancora per le radici cubiche, che si elidono se elevate al cubo).

Ne segue allora:

$\boxed{A = \left(1 - \sqrt{2}, 0\right)}$, $\boxed{B = \left(1 + \sqrt{2}, 0\right)}$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse delle x

Osserviamo che tali punti di intersezione appartengono al campo di esistenza della funzione.

Segno della Funzione.

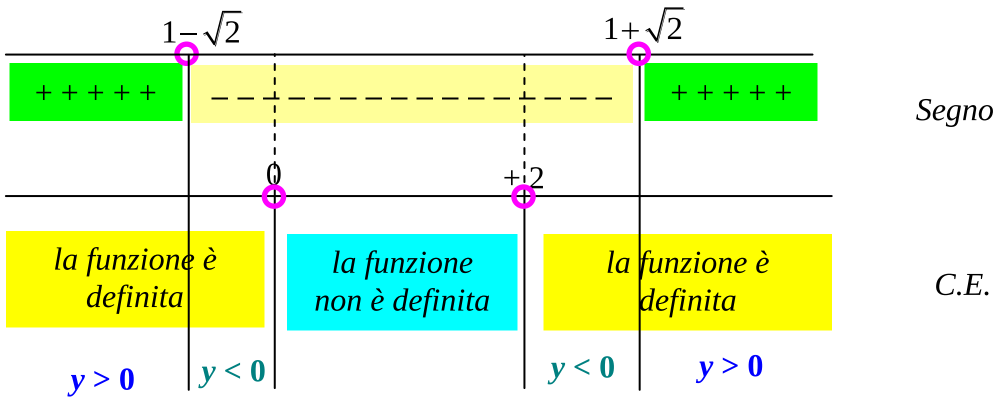
Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Quindi:

$$y > 0 \Rightarrow ln\left(x^2 - 2x\right) > 0 \Rightarrow e^{ln\left(x^2 - 2x\right)} > e^0 \Rightarrow x^2 - 2x > 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0$$

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione sono state trovate precedentemente nello studio delle intersezioni con gli assi.
Risulta, pertanto:



Limiti agli estremi del campo di esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(x^2-2x\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-2x\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)\right] = \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(x^2-2x\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-2x\right)\right] = \ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right)\right] = \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to +\infty$: dunque la funzione non ha asintoti orizzontali.

Studio del segno della derivata prima.

Ricordando che:

$$D\{\ln[f(x)]\} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

si ottiene:

$$D\left[\ln\left(x^2-2x\right)\right] = \frac{1}{x^2-2x} \cdot D\left(x^2-2x\right) = \frac{1}{x^2-2x} \cdot (2x-2) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$$

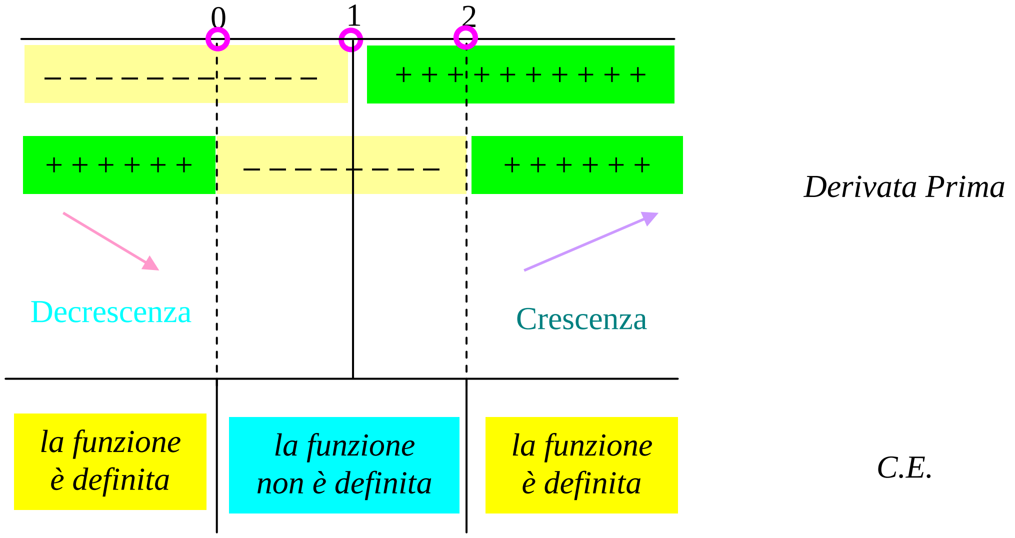
Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

cioè:

$$\frac{2x-2}{x^2-2x} > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x-2>0 \\ x^2-2x>0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x>1 \\ x(x-2)>0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x>1 \\ x<0,\; x>2 \end{cases}$$

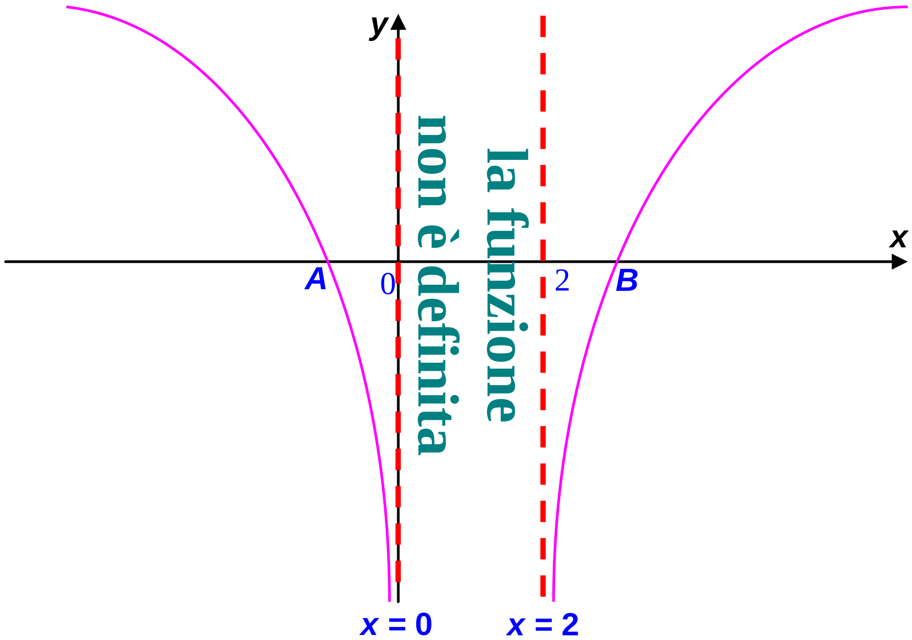
da cui segue:



Poiché in $x = 0$ ed in $x = 2$ la funzione non è definita, essa non ha né massimi né minimi.

Il Grafico.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

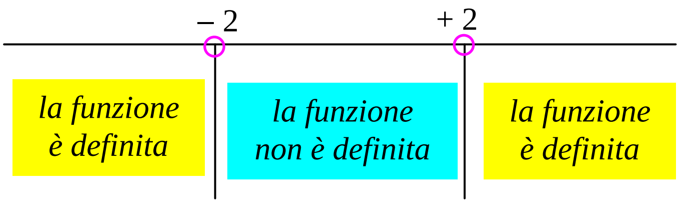
Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è una frazione, occorre considerare contemporaneamente il campo di definizione sia della funzione logaritmica (argomento positivo) che della funzione razionale fratta (denominatore diverso da zero):

$$\boxed{C.E.} = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x^2-4} > 0 \ (per\ il\ logaritmo) \\ x^2-4 \neq 0 \ (per\ la\ frazione) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2+4>0 \\ x^2-4>0 \end{cases} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \\ x<-2,\ x>+2 \end{cases} \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < -2,\ +2 < x < +\infty\}}$$

Ne segue:

$\boxed{A.V.: x = -2,\ x = +2}$



INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Per determinare l'intersezione della funzione con gli assi cartesiani occorre risolvere, come di consueto, i due sistemi, osservando, però, che nel caso in esame in $x = 0$ $(-2 < 0 < 2)$ la funzione non è definita, motivo per cui essa non presenta intersezioni con l'asse y:

$$\begin{cases} y=0 \\ 0 = ln\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ ln\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ e^{ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2+4}{x^2-4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2+4}{x^2-4} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{x^2+4-x^2+4}{x^2-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ \dfrac{8}{x^2-4} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ mai (il\ numeratore\ della\ frazione\ non\ si\ può\ annullare\ mai:\ 8 \neq 0\ sempre) \end{cases}$$

Ne segue allora che la funzione non interseca neanche l'asse x.

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

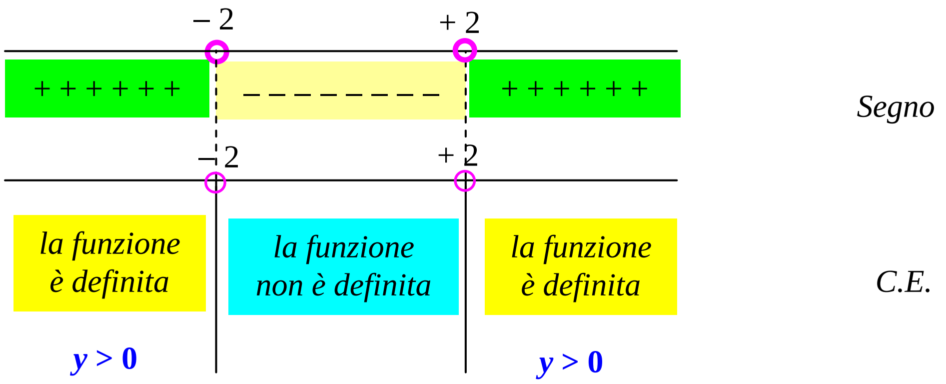
$$y > 0$$

Quindi:

$$y>0 \Rightarrow ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) > 0 \Rightarrow e^{ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)} > e^0 \Rightarrow \frac{x^2+4}{x^2-4} > 1 \Rightarrow \frac{x^2+4}{x^2-4} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{8}{x^2-4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 > 0 \\ x^2 - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sempre \\ x < -2,\ x > 2 \end{cases}$$

Osserviamo, quindi, che la funzione è sempre positiva all'interno del suo campo di esistenza.
Risulta, pertanto:



Limiti agli Estremi del Campo di Esistenza.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln(1) = \boxed{0}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = ln(1) = \boxed{0}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to 0$: dunque la retta $y = 0$, ovvero l'asse x, è un *Asintoto Orizzontale* sia *destro* che *sinistro* della funzione.

$\boxed{A.O.: y = 0}$

Studio del Segno della Derivata Prima.

Si ha:

$$D\left[ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)\right] = \frac{1}{\frac{x^2+4}{x^2-4}} \cdot D\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \left(\frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \left(\frac{2x^3-8x-2x^3-8x}{\left(x^2-4\right)^2}\right) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \cdot \frac{-16x}{\left(x^2-4\right)^2} = \frac{-16x^3+64x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)^2}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

$$D(y) > 0$$

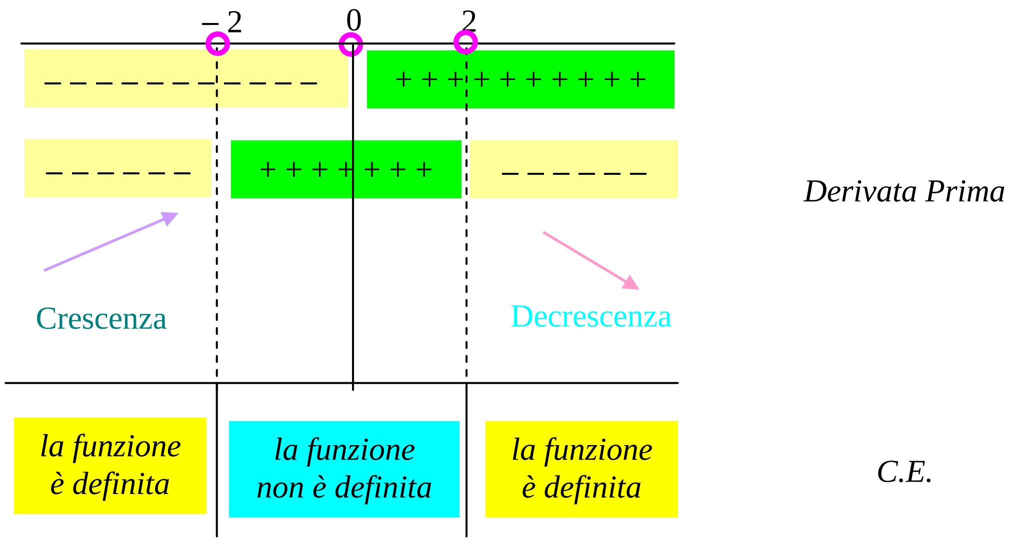
cioè:

$$\frac{-16x^3+64x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-4\right)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -16x^3+64x > 0 \\ x^2+4 > 0 \\ \left(x^2-4\right)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x\left(-x^2+4\right) > 0 \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \Rightarrow \\ sempre\ (quadrato) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x>0 \\ -x^2+4>0 \end{cases} \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \\ sempre\ (quadrato) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x>0 \\ x^2-4<0 \end{cases} \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \\ sempre\ (quadrato) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x>0 \\ -2<x<+2 \end{cases} \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \\ sempre\ (quadrato) \end{cases}$$

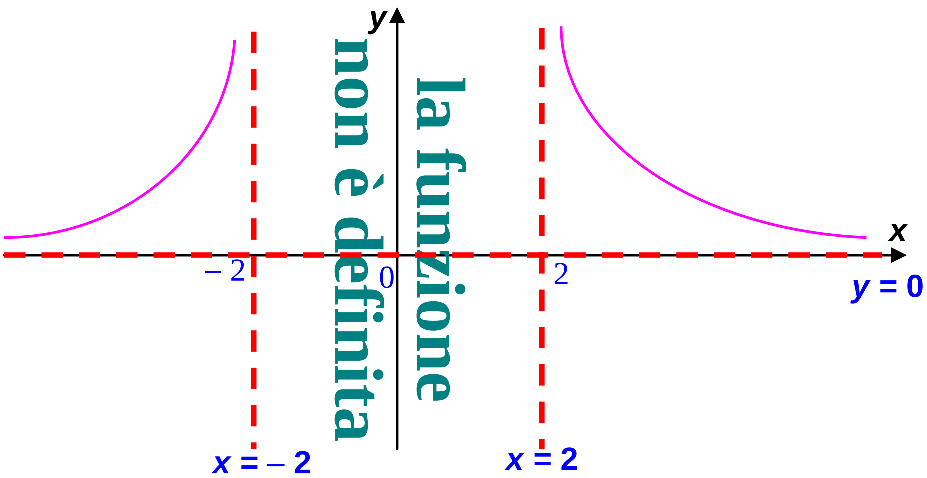
da cui segue:



Poiché in $x = -2$ ed in $x = 2$ la funzione non è definita, essa non ha né massimi né minimi.

Il Grafico.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$$

Campo di Esistenza.

Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è un polinomio, e quindi definito su tutto l'asse reale, essa risulta definita esclusivamente per quei valori della x ove l'argomento è strettamente positivo, cioè:

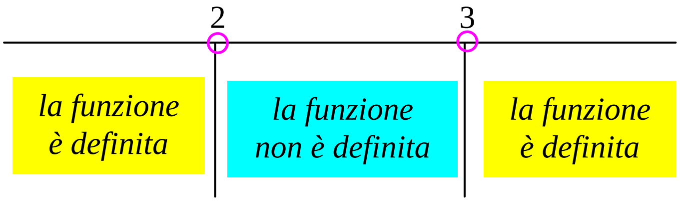
$\boxed{C.E.} = \{x \in \mathbb{R}: x^2 - 5x + 6 > 0\} = \{x \in \mathbb{R}: x < 2, x > 3\} = \boxed{\{x \in \mathbb{R}: -\infty < x < 2, 3 < x < +\infty\}}$

poiché risulta:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5-1}{2} = 2 \quad \text{ed} \quad x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

Ne segue:

$\boxed{A.V.: x = 2, x = 3}$



Intersezioni con gli Assi.

Si ha:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ln(6) \cong 1{,}8 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0, ln\ 6)}$$ è il punto di intersezione della funzione con l'asse delle y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(x^2 - 5x + 6\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{ln\left(x^2 - 5x + 6\right)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 - 5x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_{1,2} = \dfrac{+5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{5}}{2} \cong 1{,}3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{5}}{2} \cong 3{,}6 \end{cases}$$

Ne segue allora:

$\boxed{B = \left(\dfrac{5 - \sqrt{5}}{2}, 0\right)}$, $\boxed{C = \left(\dfrac{5 + \sqrt{5}}{2}, 0\right)}$ sono i punti di intersezione della funzione con l'asse delle x

Osserviamo che tutti i punti di intersezione appartengono al campo di esistenza della funzione.

Segno della Funzione.

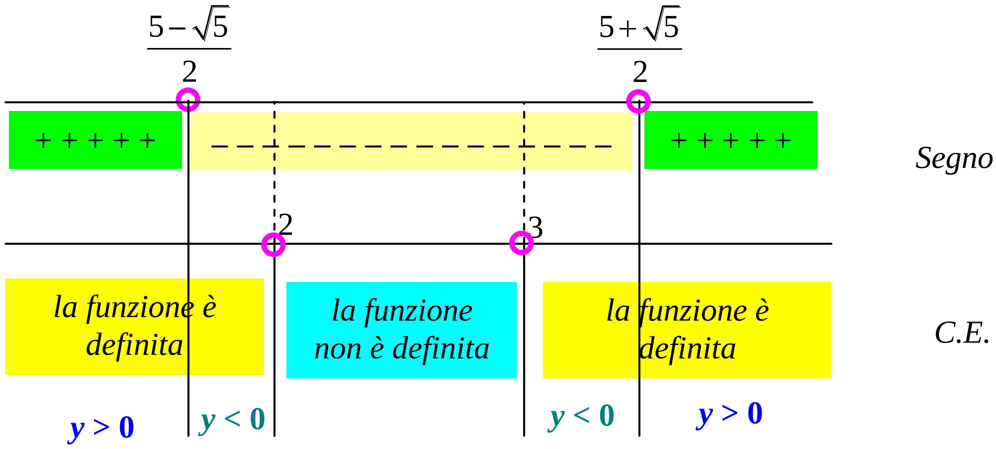
Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Quindi:

$$y > 0 \Rightarrow ln\left(x^2 - 5x + 6\right) > 0 \Rightarrow e^{ln\left(x^2 - 5x + 6\right)} > e^0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 > 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 5 > 0$$

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione associata a tale disequazione sono state trovate precedentemente nello studio delle intersezioni con gli assi.
Risulta, pertanto:



LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(x^2-5x+6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-5x+6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\right)\right] = ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(x^2-5x+6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-5x+6\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(x^2\right)\right] = ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\infty$, la $y \to +\infty$: dunque la funzione non ha asintoti orizzontali.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ha:

$$D\left[ln\left(x^2-5x+6\right)\right] = \frac{1}{x^2-5x+6}\cdot D\left(x^2-5x+6\right) = \frac{1}{x^2-5x+6}\cdot(2x-5) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

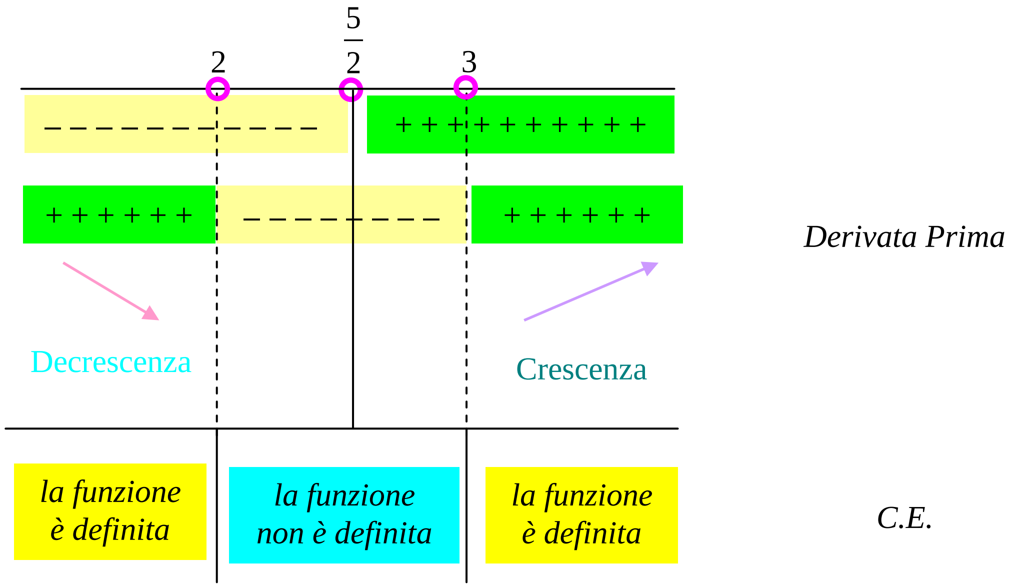
$$D(y) > 0$$

cioè:

$$\frac{2x-5}{x^2-5x+6} > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} 2x-5>0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x > \frac{5}{2} = 2{,}5 \notin C.E. \;\left(2 < \frac{5}{2} < 3\right) \\ x<2,\; x>3 \end{cases}$$

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado che figura nel sistema sono state trovate precedentemente nello studio del campo di esistenza della funzione.

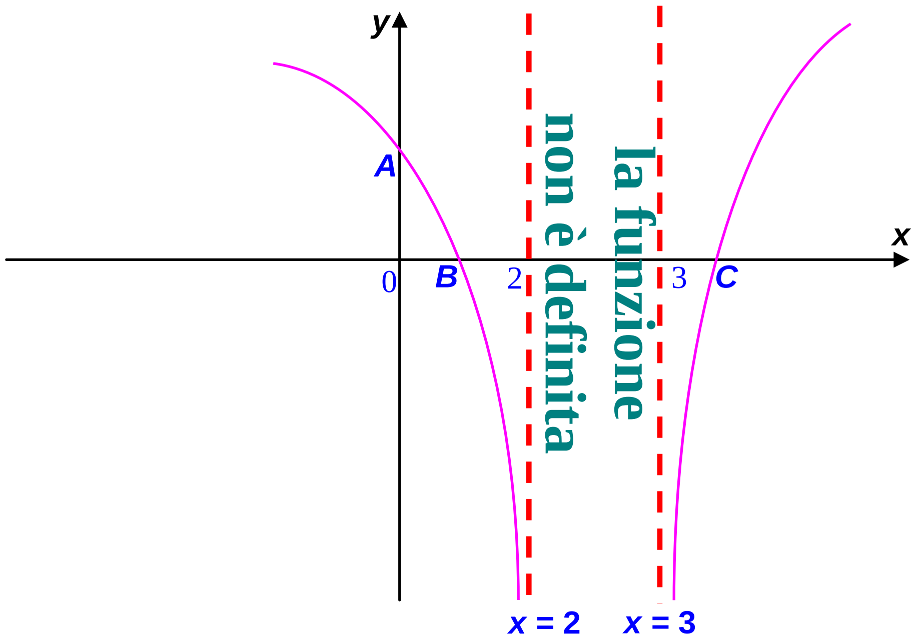
Ne segue:



Poiché in $x = 2$ ed in $x = 3$ la funzione non è definita, essa non ha né massimi né minimi.

Il Grafico.

Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



$$y = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$$

CAMPO DI ESISTENZA.

Poiché la funzione data è logaritmica ed il suo argomento è una frazione, risulta:

$$\boxed{C.E.} = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} > 0 \ (per\ il\ logaritmo) \\ x^2+1 \neq 0 \ (per\ la\ frazione) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 1 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} sempre \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases} \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\{x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty\}}$$

INTERSEZIONI CON GLI ASSI.

Risulta:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = ln\left(\frac{1}{1}\right) = ln(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = (0,0) \equiv O}$$ è il punto di intersezione della funzione con l’asse delle y

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 = ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ e^{ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)} = e^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{x^2+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{x^2+1} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1-x^2-1}{x^2+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{-x^2}{x^2+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\boxed{B = (0,0) \equiv A \equiv O}$ è il punto di intersezione della funzione con l’asse delle x

SEGNO DELLA FUNZIONE.

Anche in questo caso, per lo studio del segno della funzione, occorre risolvere la disequazione:

$$y > 0$$

Quindi:

$$y > 0 \Rightarrow ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right) > 0 \Rightarrow e^{ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)} > e^0 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-x^2}{x^2+1} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < 0 \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mai\ (\text{è un quadrato}) \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases}$$

Osserviamo, quindi, che la funzione è sempre negativa all’interno del suo campo di esistenza.
Risulta, pertanto:

− −	*Segno*
+ +	
la funzione è definita ovunque	*C.E.*

$$y < 0$$

LIMITI AGLI ESTREMI DEL CAMPO DI ESISTENZA.

Risulta:

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} y} = \lim_{x\to+\infty}\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln(0) = \boxed{-\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} y} = \lim_{x\to-\infty}\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln\left[\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = ln(0) = \boxed{-\infty}$$

Ne segue che, per $x \to \pm\,\infty$, la $y \to -\,\infty$: dunque la funzione non ha asintoti orizzontali.

STUDIO DEL SEGNO DELLA DERIVATA PRIMA.

Si ha:

$$D\left[ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right] = \frac{1}{\frac{1}{x^2+1}}\cdot D\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{(x^2+1)}{1}\cdot\left(\frac{-(2x)\cdot 1}{(x^2+1)^2}\right) = (x^2+1)\cdot\frac{-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{x^2+1}$$

Per determinare i punti di massimi e di minimo della funzione, bisogna sempre risolvere la disequazione:

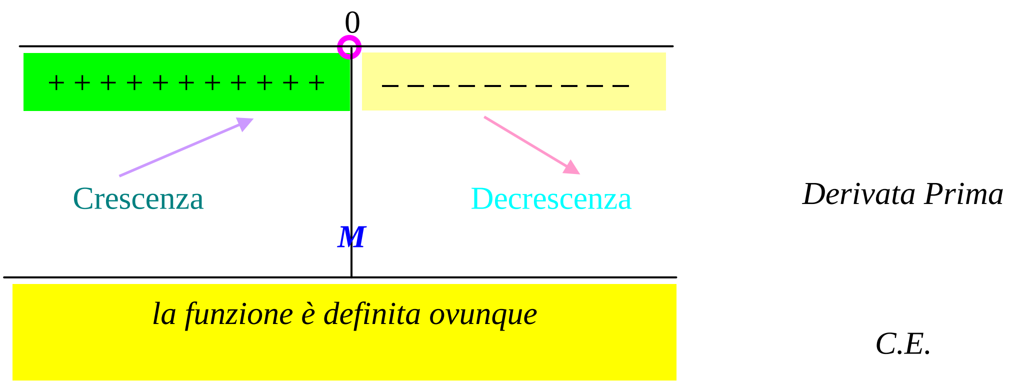
$$D(y) > 0$$

cioè:

$$\frac{-2x}{x^2+1} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x < 0 \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ sempre\ (somma\ di\ due\ quadrati) \end{cases}$$

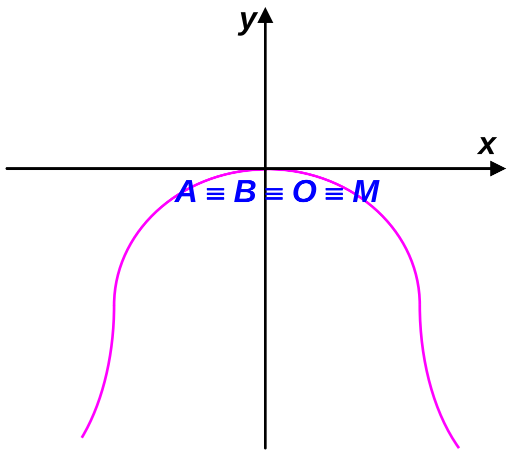
da cui segue:



In x = 0, quindi, la funzione ha un *Massimo M*. L'ordinata corrispondente ad x = 0 è già stata calcolata facendo l'intersezione con l'asse delle y.

Dunque $\boxed{M = (0, 0) \equiv O \equiv A \equiv B}$ è il *punto di Massimo*.

IL GRAFICO.
Unendo tutte le informazioni ottenute, si avrà il seguente grafico della funzione:



ESERCIZI PROPOSTI

Studiare le seguenti funzioni logaritmiche:

$y = ln(2-x)$

$y = ln(x+4)$

$y = ln(x^2-1)$

$y = ln(x^3+1)$

$y = ln(x^2-2x)$

$$y = ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{(x+2)^2}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x}{(x+2)^2}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x^2}{x+4}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x+3}{x}\right)$$

$$y = ln\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}\right)$$

$y = x \cdot ln^2 x$

$y = ln(1-x)^2$

$y = ln(1-x^2)$