L'ALGEBRA LINEARE

Daniela Tondini

dtondini@unite.it

Facoltà di Scienze politiche

CdS in Economia

Università degli Studi di Teramo

LE MATRICI

Si definisce *matrice* di ordine $m \times n$

una tabella della forma

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots n}}$$

m = numero delle righe

n = numero delle colonne

LE MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

***prima* riga**

***i-esima* riga**

***m-esima* riga**

***m* = numero delle righe**

***n* = numero delle colonne**

LE MATRICI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prima colonna

i-esima colonna

n-esima colonna

m **= numero delle righe**

n **= numero delle colonne**

MATRICI RETTANGOLARI

Si definisce ***rettangolare***

una matrice in cui $m \neq n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} = A_{3\times 2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} m = 3 \\ n = 2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad A \text{ ha ordine } 3\times 2$$

MATRICI QUADRATE

Si definisce *quadrata*

una matrice in cui $m = n$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = A_{3\times 3}$$

$\Rightarrow$

$m = 3$

$n = 3$

$\Rightarrow$

A ha ordine 3×3

(equivalentemente

A ha ordine $3=3$)

DIAGONALI DI MATRICI QUADRATE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 8 & 5 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix} = A_{3\times 3}$$

diagonale principale

diagonale secondaria

N.B.!

Si può parlare di diagonali sono nel caso di matrici quadrate

$$\boxed{m = n}$$

DIAGONALI DI MATRICI QUADRATE

$A = (2)$

è una matrice quadrata di ordine 1
(1 riga ed 1 colonna coincidono!)

Se *A* è una matrice quadrata di ordine 1,
ovvero se essa è costituita da un unico elemento,
allora le due diagonali coincidono
con l'unico elemento della matrice data

MATRICE DIAGONALE

Si definisce *diagonale* una matrice <u>quadrata</u> *D* avente tutti gli elementi nulli ad eccezione di quelli situati sulla diagonale principale

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D_{3\times 3}$$ **è una matrice diagonale di ordine 3**

MATRICE IDENTITA'

Si definisce *matrice identità* una matrice diagonale *I* in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono uguali ad 1

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice identità di ordine 3

MATRICE NULLA

Si definisce ***matrice nulla*** una matrice, rettangolare o quadrata, O, in cui tutti gli elementi sono uguali a 0

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è una matrice nulla di ordine 3

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{3\times 2}$$ è una matrice nulla di ordine 3×2

MATRICE TRASPOSTA

Si definisce *trasposta* una matrice A^T ottenuta dalla matrice di partenza A scambiando le righe con le colonne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} = A_{2\times 3} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = A^T_{3\times 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & -4 & -3 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -4 \\ 5 & 7 & -3 \end{pmatrix} = A^T_{3\times 3}$$

MATRICE TRASPOSTA

Regola pratica!

Per costruire la matrice A^T è sufficiente scrivere, come colonne di A^T, tutte le righe della matrice A

$$\Downarrow$$

A di ordine $m \times n$ $\rightarrow$ A^T di ordine $n \times m$

MATRICE SIMMETRICA

Si definisce ***simmetrica*** una matrice A tale che $A^T=A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} = A^T_{3\times 3} = A$$

N.B.!

Ogni matrice diagonale è simmetrica

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D_{3\times 3} \quad \Rightarrow \quad D^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = D_3 \quad \Rightarrow \quad D^T = D$$

MATRICE ANTISIMMETRICA

Si definisce *antisimmetrica*

una matrice *A* tale che $-A^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A^T_{3\times 3} = -A$$

$$\Downarrow$$

$$-A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A$$