FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Nella teoria economica le funzioni svolgono un ruolo fondamentale: basti pensare, infatti, alle funzioni di produzione, di costo, di profitto, di utilità e di domanda che costituiscono proprio la rappresentazione matematica delle relazioni tra le variabili economiche. Si inizierà, pertanto, lo studio delle funzioni di più variabili, fornendone, seppure solo intuitivamente, una giustificazione economica.

Si ricordi, in primo luogo, che una *funzione* dall'insieme *A* all'insieme *B* non è altro che una legge, denotata con $f : A \to B$, che, ad ogni elemento di *A*, detto *dominio*, assegna uno ed un solo elemento di *B*, detto *codominio*. Fino a questo istante, però, ci si è soffermati esclusivamente su funzioni di una variabile reale, senza tener conto del fatto che la maggior parte dei fenomeni del mondo reale è descrivibile da leggi che contengono più di un parametro. Ad esempio, in microeconomia, si considerano principalmente funzioni di una variabile, quali la cosiddetta *curva di domanda* $q = f(p)$ che indica la quantità *q* di un certo bene che un consumatore, o un insieme di consumatori, è disposto ad acquistare al prezzo *p;* la funzione $q(p)$, quindi, indica proprio come si modifica tale quantità al variare del prezzo. In particolare, la *derivata prima*, strumento matematico introdotto nel XVII secolo contemporaneamente, ma indipendentemente, da Leibnitz e Newton, consente di misurare la rapidità con cui avviene la variazione di un certo fenomeno. Ad esempio, l'indice NASDAQ della borsa di Wall Street sta *salendo* o sta *scendendo*? E quanto rapidamente? L'andamento dei prezzi in Italia sta crescendo negli ultimi anni? E di quanto? Se si riduce il prezzo della merce prodotta da una certa azienda, di quanto aumenterà la quota di mercato? Se aumenta il prezzo della birra, di quanto se ne ridurrà il consumo? Se si aumenta la velocità di guida di un auto, con quanto anticipo si arriverà a destinazione? Chiaramente, se si pensa al grafico di una certa funzione $f(x)$, che descrive un dato fenomeno al variare di *x*, si intuisce facilmente che la variazione d'intensità di tale fenomeno in un punto x_0 assegnato è rappresentata dalla pendenza del grafico di *f* nel punto stesso x_0, precisamente tale pendenza, inequivocabilmente individuata dalla retta passante per il punto di coordinate $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^2$, è proprio la retta tangente al grafico di *f* nel punto $(x_0, f(x_0))$. Ad esempio, le funzioni lineari, individuate analiticamente dall'espressione $f(x) = mx + q$ ed i cui grafici, nel piano cartesiano, rappresentano esattamente delle rette, hanno la caratteristica di avere la pendenza, o coefficiente angolare, *m* costante: il tasso di variazione per tali funzioni, cioè, risulta costante. Dal punto di vista economico, la maggiore o minore pendenza della retta tangente, corrisponde al concetto fondamentale di *marginalità* (costo marginale, utilità marginale, …). La stessa derivata del logaritmo di $f(x)$ fornisce una misura percentuale della variazione istantanea di *f*, cioè una misura di sensitività percentuale: molte grandezze economiche, quali il PIL, infatti, sono misurate in termini di variazione percentuale media su un anno intero; se si pensa, però, a variazioni percentuali riferite ad intervalli di tempo molto brevi, si ottiene una misura di variazione percentuale quasi istantanea. Ad esempio, si può dire che l'indice Dow-Jones della Borsa di Wall Street oggi è sceso dello 0.02% tra le 11.00 e le 11.05 del mattino, misura questa che fornisce un'indicazione approssimata della variazione percentuale istantanea.

In un modello più realistico, però, si dovrebbero considerare funzioni di domanda della forma $q = f(p_1, p_2, y)$, che esprimono la dipendenza della quantità domandata dai prezzi di altri beni e dal reddito *y*: in un processo produttivo, infatti, è restrittivo pensare che una funzione di produzione possa dipendere esclusivamente dal capitale *k*, dimenticando il lavoro *l* che contribuisce, invece, alla produzione alla stessa stregua dei macchinari, delle materie prime, del lavoro specializzato e non, … Nasce così l'esigenza di pensare a funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, che descrivano fenomeni dipendenti da più variabili, della forma $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, scrittura questa che sta proprio a sottolineare la dipendenza della variabile *dipendente y* da tutte le *n* variabili *indipendenti* $x_1, x_2, ...x_n$, dove *n* rappresenta un qualsiasi numero naturale: nello studio delle discipline economiche, infatti, si incontrano spesso grandezze dipendenti da più variabili. Se, ad esempio, si considera l'attività di un'azienda che produce una merce, il volume del fattore di produzione *y* dipende dalle quantità $x_1, x_2, ...x_n$ dei fattori impiegati (capitale, lavoro, materie prime, …), dipendenza questa che può essere modellata proprio da una relazione della forma $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, ove il numero *y* è determinato, non da una sola variabile *x*, ma congiuntamente da $x_1, x_2, ...x_n$. Si parla, in questo caso, quindi, di *f* come *funzione di più variabili*, precisamente di *n* variabili, dette anche *argomenti* della funzione.

Le principali funzioni di più variabili della teoria economica sono quelle di produzione e quelle di utilità. Tra le funzioni di produzione di uso più frequente si ricordino le seguenti:

$q = a_1 x_1 + a_2 x_2$ (lineare)

$q = k x_1^{h_1} x_2^{h_2}$ (di Cobb-Douglas)

$q = \min\left\{\frac{x_1}{c_1}, \frac{x_2}{c_2}\right\}$ (di Leontieff)

$q = k\left(c_1 x_1^{-a} + c_2 x_2^{-a}\right)^{-\frac{b}{a}}$ (ad elasticità costante)

Le precedenti funzioni, chiaramente, possono essere generalizzate al caso di più variabili andando, così, a studiare il comportamento del consumatore in un'economia a k beni, indicando con x_i la quantità del bene i. Il vettore $(x_1, x_2, ..., x_k)$, che rappresenta la quantità consumata di ciascuno dei k beni e che prende il nome di *paniere di beni*, consente di definire la *funzione di utilità* come quella funzione che associa ad ogni paniere un numero $u(x_1, x_2, ..., x_k)$ che indica il grado di soddisfazione o di utilità che il consumatore trae dal paniere, ovvero dal consumo di una quantità di un bene. Ad esempio, se c è la quantità, in litri, di birra bevuta dal docente di matematica, $u(c)$ è proprio il conseguente "livello di gioia" del docente. Derivando $u(c)$ si ottiene, così, $u'(c)$, ovvero proprio quella che si chiama *utilità marginale*, cioè la variazione dell'utilità dovuta ad un incremento infinitesimale della quantità consumata. Se x ed y rappresentano le quantità di due fattori produttivi, ad esempio il capitale ed il lavoro, impiegati in un processo di produzione, allora si può indicare con $c(x, y)$ la funzione che associa a ciascuna coppia di fattori (x, y) il loro costo complessivo. Se, invece, x, y, z rappresentassero le quantità consumate di tre beni (pizza, birra, tiramisù), allora si potrebbe indicare con $u(x, y, z)$ il livello di utilità totale generato dal consumo complessivo dei tre beni. La stessa funzione domanda non dipende, in generale, dal solo prezzo p del bene in questione, ma anche dal prezzo di altri n beni sostituti, ovvero aventi caratteristiche analoghe a quelle del bene considerato. Uno dei principali obiettivi della teoria economica, però, è studiare l'effetto della variazione di una grandezza economica su un'altra variabile. Ci si propone, quindi, di estendere il concetto di derivata, già studiato per le funzioni di una variabile reale, alle funzioni di più variabili, della forma:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

In tal caso, pertanto, si parlerà di *derivate parziali*, indicate, a seconda della variabile presa in considerazione, con una delle seguenti notazioni:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = f_{x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} = f_{x_2}, ..., \frac{\partial y}{\partial x_n} = f_{x_n}$$

dove il simbolo $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ indica la derivata parziale della funzione f rispetto alla variabile x_1 e così via.

Osservazione

Le funzioni reali di variabile reale sono state rappresentate sempre graficamente sul piano cartesiano. Aumentando adesso il numero delle variabili, ad esempio a due, la funzione della forma $y = f(x_1, x_2)$ può essere rappresentata nello spazio a tre dimensioni x, y, z, ove x è l'*ascissa*, y è l'*ordinata* e z è la *quota*, ottenendo, così, una superficie. In particolare, la derivata parziale rappresenta la pendenza di una sezione verticale della superficie ottenuta, ovvero il piano tangente alla superficie. Per calcolare le derivate parziali di una qualsiasi funzione sarà, inoltre, sufficiente applicare tutte le regole enunciate per il calcolo delle derivate ordinarie, con l'accortezza di considerare costanti tutte le variabili, ad eccezione di quella rispetto alla quale si sta derivando. Ci si occuperà, in particolare, delle funzioni di due variabili la cui generalizzazione al caso di n variabili è puramente formale e non aggiunge nulla di concettualmente importante.

Esempio

Si consideri la seguente funzione:

$$z = f\left(x, y\right) = 3x^2 y^2$$

Se si vuol calcolare la derivata parziale di f rispetto alla variabile x, occorre assumere l'altra variabile, ovvero la y, come costante, per cui basterà derivare solo x^2 e considerare $3y^2$ come costante; si ottiene, quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \left[D\left(3x^2\right)\right] \cdot y^2 = 6x \cdot y^2 = 6xy^2$$

Analogamente, derivando la f rispetto ad y, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3x^2 \cdot \left[D\left(y^2\right)\right] = 3x^2 \cdot 2y = 6x^2 y$$

Esempio

Si consideri la seguente funzione:

$$z = f\left(x, y\right) = 3x^2 y^2 + 4xy^3 + 7y$$

Per calcolare le derivate parziali, rispetto ad x e ad y, occorre tener conto della regola di derivazione di una somma, già studiata per le funzioni di una variabile; si ottiene, quindi:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \left[D\left(3x^2\right)\right] \cdot y^2 + \left[D\left(4x\right)\right] \cdot y^3 + 0 = 6xy^2 + 4y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3x^2 \cdot \left[D\left(y^2\right)\right] + 4x \cdot \left[D\left(y^3\right)\right] + \left[D\left(7y\right)\right] = 3x^2 \cdot 2y + 4x \cdot 3y^2 + 7 = 6x^2 y + 12xy^2 + 7$$

Esempio

Si consideri la seguente funzione:

$$z = f\left(x, y\right) = \frac{x + y}{x - y}$$

Tenendo conto della regola di derivazione di un quoziente, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial x}(x+y)\right]\cdot(x-y)-(x+y)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}(x-y)\right]}{(x-y)^2} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(1)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x-y-x-y}{(x-y)^2} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial y}(x+y)\right]\cdot(x-y)-(x+y)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}(x-y)\right]}{(x-y)^2} = \frac{1\cdot(x-y)-(x+y)\cdot(-1)}{(x-y)^2} =$$

$$= \frac{x-y+x+y}{(x-y)^2} = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

Esempio

Si consideri la seguente funzione:

$$z = f(x,y) = e^{2x+3y}$$

Tenendo conto della regola di derivazione di una funzione esponenziale, si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = e^{2x+3y}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}(2x+3y)\right] = e^{2x+3y}\cdot 2 = 2e^{2x+3y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = e^{2x+3y}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y)\right] = e^{2x+3y}\cdot 3 = 3e^{2x+3y}$$

Osservazione

Per la funzione di una sola variabile $y = f(x)$, la derivata prima $y' = f'(x)$ misura, in modo approssimato, la variazione di *y* rispetto ad una variazione di *x*. La stessa interpretazione vale per le funzioni di più variabili: ad esempio, la funzione di produzione $Q = F(K,L)$ mette in relazione il prodotto *Q* con due quantità, precisamente fattore capitale *K* e fattore lavoro *L*.

Anche per le funzioni di due variabili, come per quelle in una variabile, risulta possibile calcolare le derivate parziali seconde, in particolare si indicherà con f_{xx} la derivata parziale seconda di *f* rispetto ad *x*, con f_{yy} la derivata parziale seconda di *f* rispetto ad *y* e con $f_{xy}, f_{y,x}$ le derivate parziali seconde miste, rispettivamente di f_x rispetto ad *y* e di f_y rispetto ad *x*.

A tal riguardo, sussiste il seguente:

Teorema di Schwartz. Le derivate parziali seconde miste di una funzione di due variabili, continua e derivabile e con derivate prime e seconde continue, sono coincidenti, ovvero risulta:

$$f_{xy} = f_{y,x}$$

PROBLEMI DI OTTIMIZZAZIONE

Nel descrivere il comportamento di soggetti economici si presentano spesso situazioni in cui un operatore, trovandosi di fronte ad un insieme di possibili decisioni alternative, deve sceglierne una nell'intento di governare in modo ottimo (ottimo secondo criteri precisati di volta in volta) un sistema economico o finanziario che è, almeno in parte, sotto il suo controllo. Spesso questo problema può essere gestito proprio cercando di stabilire quando un'assegnata funzione raggiunge il proprio valore massimo oppure minimo. L'insieme degli strumenti matematici che studiano tali problemi va sotto il nome di *teoria dell'ottimizzazione*.

Occorre distinguere subito tra *problemi di ottimizzazione statistica* e *problemi di ottimizzazione dinamica*. I primi riguardano situazioni considerate in un dato istante nelle quali si prescinde da qualunque variazione nel tempo, mentre nei secondi l'evoluzione temporale delle variabili considerate assume un rilievo determinante. Tra questi ultimi risulta possibile includere, sia i problemi di *calcolo delle variazioni*, sia quelli di *programmazione dinamica* e di *controllo ottimale*, che in un certo senso costituiscono la versione moderna del calcolo delle variazioni.

Nel seguito saranno affrontati, in primo luogo, i problemi di ottimo statico, tralasciando per brevità l'aggettivo "statico", suddivisibili, a loro volta, nelle seguenti due grandi categorie:

- *problemi di ottimo libero*: si tratta di ricercare i punti di massimo e/o minimo di una funzione f (i cosiddetti *estremanti*) che siano interni al suo dominio D. Ne segue, pertanto, che il punto x_0 è di massimo e/o minimo relativo se soddisfa rispettivamente le seguenti condizioni:

$$f\left(x_0\right) \geq f\left(x\right), \forall x \in I\left(x_0\right) \subseteq D$$
$$f\left(x_0\right) \leq f\left(x\right), \forall x \in I\left(x_0\right) \subseteq D$$

  dove $I\left(x_0\right)$ rappresenta un intorno di x_0;

- *problemi di ottimo vincolato* o *condizionato*: si tratta di ricercare i punti *estremanti* di f su un assegnato sottoinsieme S non aperto di D. Solitamente S è dato dall'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni e/o disequazioni, quali, ad esempio:

$$S = \left\{x : x \in \mathbb{R}^n, h_j\left(x\right) = 0,\ j = 1,\dots,r\right\}$$
$$S = \left\{x : x \in \mathbb{R}^n, g_j\left(x\right) \leq 0,\ j = 1,\dots,m\right\}$$

  Tali problemi sono anche detti *problemi di programmazione matematica*; in tal caso f viene anche detta *funzione obiettivo* ed il vettore x raccoglie le *variabili di scelta* o *di decisione*. Le funzioni che generano S sono i *vincoli* o *funzioni vincolari* del problema ed S è detto *insieme ammissibile*.

PROBLEMI DI OTTIMO LIBERO

Si parla di massimi e minimi liberi di una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$ quando le variabili x o y possono essere prese liberamente nel dominio algebrico. Si supporrà di lavorare sempre con funzioni regolari per le quali esistano le derivate parziali di ogni ordine, rispetto ad ogni variabile.

Per studiare i problemi di ottimo libero per le funzioni di due variabili risultano fondamentali i seguenti Teoremi di cui si omette la dimostrazione.

Teorema di Fermat. Sia $f : S \to \mathbb{R}$ $\left(S \subseteq \mathbb{R}^2\right)$ una funzione parzialmente derivabile in *S*. Allora il punto $z_0 = (x, y)$ è un punto *critico* o *stazionario*, ovvero un *punto di massimo* e/o *minimo relativo*, per *f* se risulta:

$$\nabla f(z_0) = \underline{0} = (0,0)$$

dove il simbolo $\nabla f(z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(f_x, f_y\right)$ indica il *gradiente* della funzione *f*.

Per trovare, quindi, gli eventuali punti stazionari della *f* occorre risolvere, in primo luogo, il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

In letteratura, soprattutto economica, le suddette condizioni sono chiamate anche *condizioni* (*necessarie*) *del primo ordine*.

Teorema (condizioni del secondo ordine). Sia $f : S \to \mathbb{R}$ $\left(S \subseteq \mathbb{R}^2\right)$ una funzione derivabile due volte in *S* e sia $z_0 = (x, y)$ un punto interno ad *S*. Allora:

- condizioni necessarie del secondo ordine: se z_0 è un punto di *massimo* (*minimo*) *relativo* per *f*, si ha:

$$\begin{cases} a)\ \nabla f(z_0) = \underline{0} = (0,0) \\ b)\ \begin{cases} Hf(z_0) > 0,\ f_{xx}(z_0) > 0 \Rightarrow \textit{minimo relativo} \\ Hf(z_0) > 0,\ f_{xx}(z_0) < 0 \Rightarrow \textit{massimo relativo} \end{cases} \end{cases}$$

dove:

$$Hf(z_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(z_0) & f_{xy}(z_0) \\ f_{yx}(z_0) & f_{yy}(z_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(z_0)\, f_{yy}(z_0) - f_{xy}(z_0)\, f_{yx}(z_0)$$

è l'hessiano calcolato nel punto, ovvero il determinante della matrice hessiana calcolato nel punto;

- se è $Hf(z_0) < 0$, il punto z_0 è un *punto di sella* o *di colle*;
- se, infine, è $Hf(z_0) = 0$, ci si trova in presenza del cosiddetto *caso dubbio* o *ambiguo*, caso questo che può essere risolto con le cosiddette *curve di livello*, che non saranno trattate in questa sede.

Per calcolare, dunque, i *massimi e minimi relativi e/o assoluti* liberi, si può applicare il cosiddetto *metodo delle derivate parziali*, procedendo come di seguito riportato:

- si determina il dominio della funzione;
- se il dominio non è vuoto si calcolano le derivate parziali prime della funzione $z = f(x, y)$, precisamente f_x, f_y;
- si determina il gradiente della funzione di due variabili eguagliando a zero le derivate parziali prime precedentemente calcolate, ovvero si risolve il seguente sistema:

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 0 \end{cases};$$

- se il sistema ammette soluzioni, allora si ottengono i cosiddetti *punti critici* o *stazionari* della funzione, della forma $z_0 = (x_0, y_0)$;
- si costruisce la matrice hessiana della funzione di due variabili e si calcola il suo determinante:

$$Hf(z) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix};$$

- si calcolano i valori dell'hessiano nei punti critici;
- se risulta $Hf(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, allora $z_0 = (x_0, y_0)$ è un *punto di massimo relativo libero* per la funzione in due variabili; se, invece, risulta $Hf(x_0, y_0) > 0, f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, allora $z_0 = (x_0, y_0)$ è un *punto di minimo relativo libero*; se, poi, $Hf(z_0) < 0$ allora il punto z_0 non è un punto né di massimo né di minimo (relativo libero) per la funzione e, in tal

caso, si dice che z_0 è un *punto di sella* o *di colle*; se, infine, è $Hf(z_0)=0$, allora ogni decisione va rinviata ad ulteriori analisi: ci si trova, infatti, in presenza del cosiddetto *caso dubbio* o *ambiguo* (questo è il caso, ad esempio, in cui la derivata prima e la derivata seconda si annullano entrambe nel punto z_0).

Per determinare, poi, i *massimi e minimi assoluti* liberi, occorre calcolare il valore della funzione nei punti critici e vedere in quali punti interni al dominio la funzione assume rispettivamente il suo valore massimo ed il suo valore minimo.

Esempio

Determinare i punti di massimi e minimo relativi della seguente funzione di due variabili:

$$z = f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$$

Si osservi, in primo luogo, che la funzione data, in quanto polinomiale, è definita su tutto $\mathbb{R}^2$. Occorre, pertanto, risolvere subito il seguente sistema:

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2 + y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 3y^2 + x = 0 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ 3y^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 3\left(-3x^2\right)^2 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ 9x^4 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x\left(9x^3 + 1\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 0, 9x^3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 0, x^3 = -\dfrac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x^2 \\ x = 0, x = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Risulta dunque:

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = -3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -3\left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{3}$$

I punti critici della funzione data sono pertanto:

$$z_1 = (0,0), z_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

L'hessiano è dato da:

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 1$$

Occorre ora calcolare l'hessiano nei punti critici:

$$Hf(z_1) = Hf(0,0) = -1 < 0$$

quindi $z_1 = (0,0)$ è un *punto di sella*.

$$\begin{cases} Hf(z_2) = Hf\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = 36\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-1 = 36\left(\frac{1}{9}\right)-1 = 4-1 = 3 > 0 \\ f_{xx}(z_2) = f_{xx}\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = 6\left(-\frac{1}{3}\right) = -2 < 0 \end{cases}$$

quindi $z_2 = \left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ è un *punto di massimo relativo*.

Esempio

Determinare i punti di massimi e minimo relativi della seguente funzione di due variabili:

$$z = f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3y^2 - 12x$$

In primo luogo occorre risolvere il seguente sistema:

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 6xy + 6y = 0 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ 6xy + 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ 6y(x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ 6y = 0, x+1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ y = 0, x = -1 \end{cases}$$

Risulta dunque:

$$y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x = -1 \Rightarrow 3 + 3y^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 9 = 0 \Rightarrow 3y^2 - 9 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

I punti critici della funzione data sono pertanto:

$$z_1 = (-2,0), z_2 = (+2,0), z_3 = \left(-1,-\sqrt{3}\right), z_4 = \left(-1,\sqrt{3}\right)$$

L'hessiano è dato da:

$$Hf(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x+6 \end{vmatrix} = 36x^2 + 36x - 36y^2$$

Occorre ora calcolare l'hessiano nei punti critici:

$$\begin{cases} Hf(z_1) = Hf(-2,0) = 36(-2)^2 + 36(-2) = 144 - 72 = 72 > 0 \\ f_{xx}(z_1) = f_{xx}(-2,0) = 6(-2) = -12 < 0 \end{cases}$$

quindi $z_1 = (-2,0)$ è un *punto di massimo relativo*.

$$\begin{cases} Hf\left(z_2\right) = Hf\left(2,0\right) = 36\left(2\right)^2 + 36\left(2\right) = 144 + 72 = 216 > 0 \\ f_{xx}\left(z_2\right) = f_{xx}\left(2,0\right) = 6\left(2\right) = 12 > 0 \end{cases}$$

quindi $z_2 = \left(+2,0\right)$ è un *punto di minimo relativo*.

$$Hf\left(z_3\right) = Hf\left(-1,-\sqrt{3}\right) = 36\left(-1\right)^2 + 36\left(-1\right) - 36\left(-\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 36 - 108 = -108 < 0$$

quindi $z_3 = \left(-1,-\sqrt{3}\right)$ è un *punto di sella*.

$$Hf\left(z_4\right) = Hf\left(-1,\sqrt{3}\right) = 36\left(-1\right)^2 + 36\left(-1\right) - 36\left(\sqrt{3}\right)^2 = 36 - 36 - 108 = -108 < 0$$

quindi $z_4 = \left(-1,\sqrt{3}\right)$ è un *punto di sella*.

PROBLEMI DI OTTIMO VINCOLATO

Si parla di massimi e minimi vincolati di una funzione reale di due variabili reali $z = f(x, y)$ quando le variabili x o y non possono essere prese liberamente nel dominio algebrico ma sono legate ad assumere valori condizionati dalla presenza di vincoli I che si traducono con equazioni o disequazioni della forma $g(x, y) = 0, g(x, y) > 0, g(x, y) < 0, g(x, y) \geq 0, g(x, y) \leq 0$.

Per calcolare i *massimi e minimi relativi e/o assoluti* <u>vincolati da un'equazione</u> $g(x, y) = 0$ si può applicare il cosiddetto *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*, procedendo come di seguito riportato:

- si determina il dominio della funzione;
- se il dominio non è vuoto, si scrive la *lagrangiana* data da:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y);$$

- si calcolano le derivate parziali prime della lagrangiana, precisamente $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_\lambda$;
- si determina il gradiente della lagrangiana eguagliando a zero le derivate parziali prime precedentemente calcolate, ovvero si risolve il seguente sistema:

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \mathcal{L}_x = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \mathcal{L}_y = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathcal{L}_\lambda = 0 \end{cases};$$

- se il sistema ammette soluzioni, allora si ottengono i cosiddetti *punti critici* o *stazionari* della lagrangiana, della forma $\mathcal{L}_0 = (x_0, y_0, \lambda_0)$, e, di conseguenza quelli della funzione di due variabili assegnata, della forma $z_0 = (x_0, y_0)$;
- si verifica che tali punti critici appartengano all'insieme *I*, altrimenti vanno scartati;
- si costruisce la matrice hessiana della lagrangiana e si calcola il suo determinante:

$$H\mathcal{L}(x, y, \lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{x\lambda} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{y\lambda} \\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{vmatrix};$$

- si calcolano i valori dell'hessiano nei punti critici;
- se risulta $H\mathcal{L}_0 = (x_0, y_0, \lambda_0) > 0$, allora $z_0 = (x_0, y_0)$ è un *punto di massimo relativo vincolato* per la funzione in due variabili; se, invece, risulta $H\mathcal{L}_0 = (x_0, y_0, \lambda_0) < 0$, allora

$z_0=(x_0,y_0)$ è un *punto di minimo relativo vincolato*; se, infine, si ha $H\mathcal{L}_0=(x_0,y_0,\lambda_0)=0$, allora si è in presenza del cosiddetto *caso dubbio*, ovvero non è possibile stabilire con tale metodo la natura del punto z_0.

Per determinare, poi, i *massimi e minimi assoluti* vincolati da un'equazione, occorre calcolare il valore della funzione nei punti critici e vedere in quali punti, sia interni al dominio del vincolo sia sulla frontiera del vincolo, la funzione assume il suo valore massimo ed il suo valore minimo.

Esempio

Determinare i punti di massimi e minimo relativi ed assoluti della seguente funzione di due variabili:

$$z=f(x,y)=x+y$$

sull'insieme:

$$I=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-1=0\right\}$$

In primo luogo si osservi che la funzione z è definita su tutto $\mathbb{R}^3$ trattandosi di una funzione polinomiale. Occorre costruire, quindi, la funzione Lagrangiana, precisamente:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

con $\lambda\in\mathbb{R}$. Si ha, pertanto:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda)=x+y-\lambda\left(x^2+y^2-1\right)$$

Si risolve poi il seguente sistema:

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=\mathcal{L}_x=1-2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y}=\mathcal{L}_y=1-2\lambda y=0\\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=\mathcal{L}_\lambda=-x^2-y^2+1=0\end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases}2\lambda x=1\\ 2\lambda y=1\\ x^2+y^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=\dfrac{1}{2\lambda}\\ \dfrac{1}{4\lambda^2}+\dfrac{1}{4\lambda^2}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=\dfrac{1}{2\lambda}\\ \dfrac{1+1-4\lambda^2}{4\lambda^2}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2\lambda}\\ y=\dfrac{1}{2\lambda}\\ \dfrac{2-4\lambda^2}{4\lambda^2}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 2 - 4\lambda^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 4\lambda^2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ 2\lambda^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\lambda} \\ \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)} \\ y = \dfrac{1}{2\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)} \\ \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)} \\ y = \dfrac{1}{2\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)} \\ \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\pm\dfrac{2}{\sqrt{2}}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{1}{\pm\dfrac{2}{\sqrt{2}}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

I punti critici della funzione $\mathcal{L}$ sono pertanto:

$$\mathcal{L}_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathcal{L}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

da cui seguono i seguenti punti critici della funzione *z* vincolati sull'insieme *I*:

$$z_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in I, z_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2},\right) \in I$$

Per determinare i massimi e minimi <u>relativi</u> occorre costruire la matrice hessiana e calcolarne il suo determinante, precisamente:

$$H\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{x\lambda} \\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{y\lambda} \\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2\lambda & 0 & -2x \\ 0 & -2\lambda & -2y \\ -2x & -2y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 = 8\lambda\left(x^2 + y^2\right)$$

Occorre ora calcolare l'hessiano nei punti critici:

$$H\mathcal{L}(\mathcal{L}_1) = H\mathcal{L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{2} > 0$$

quindi $z_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ è un *punto di massimo relativo vincolato*. Analogamente:

$$H\mathcal{L}(\mathcal{L}_2) = H\mathcal{L}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right] = -4\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{2} < 0$$

quindi $z_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ è un *punto di minimo relativo vincolato*.

Essendo, inoltre, $z_1 = \left(+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\frac{\sqrt{2}}{2} \right), z_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ gli unici punti di massimo e di minimo, essi sono rispettivamente anche *punti di massimo e di minimo assoluto vincolati* per cui non è necessario determinare il valore della funzione in tali punti.

Per calcolare i *massimi e minimi relativi e/o assoluti* vincolati da una disequazione, ad esempio $g(x, y) \leq 0$, si procede calcolando, prima, i punti critici interni al dominio del vincolo, con il metodo delle derivate parziali prime e seconde, e poi quelli situati sulla frontiera del vincolo stesso, con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esempio

Determinare i punti di massimi e minimo relativi ed assoluti della seguente funzione di due variabili:

$$z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 8\left(x^2 + y^2\right)$$

sull'insieme:

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \right\}$$

In primo luogo si osservi che la funzione z è definita su tutto $\mathbb{R}^2$ trattandosi di una funzione polinomiale. Occorre calcolare, quindi, i punti stazionari interni ad I attraverso le derivate parziali prime:

$$\nabla f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = f_x = 4x^3 - 16x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = f_y = 4y^3 - 16y = 0 \end{cases}$$

da cui si ha:

$$\begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ 4y^3 - 16y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \\ 4y\left(y^2 - 4\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0, x^2 - 4 = 0 \\ 4y = 0, y^2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 2 \\ y = 0, y = \pm 2 \end{cases}$$

I punti critici della funzione data sono pertanto:

$z_1 = (0,0), z_2 = (0,+2), z_3 = (0,-2), z_4 = (+2,0), z_5 = (-2,0),$

$z_6 = (2,2), z_7 = (2,-2) z_8 = (-2,2), z_9 = (-2,-2)$

L'hessiano è dato da:

$$Hf(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 12x^2-16 & 0 \\ 0 & 12y^2-16 \end{vmatrix}=144x^2y^2-192x^2-192y^2+256$$

Occorre ora calcolare l'hessiano nei punti critici:

$$\begin{cases} Hf(z_1)=Hf(0,0)=256>0 \\ f_{xx}(z_1)=f_{xx}(0,0)=6(-2)=-16<0 \end{cases}$$

quindi $z_1=(0,0)$ è un *punto di massimo relativo* per *z* su *I* e risulta:

$$f(0,0)=0$$

$$Hf(z_2)=Hf(0,2)=-192(4)+256=-768+256=-512<0$$

quindi $z_2=(0,2)$ è un *punto di sella* per *z* su *I*.

$$Hf(z_3)=Hf(0,-2)=-192(4)+256=-768+256=-512<0$$

quindi $z_3=(0,-2)$ è un *punto di sella* per *z* su *I*.

$$Hf(z_4)=Hf(2,0)=-192(4)+256=-768+256=-512<0$$

quindi $z_4=(2,0)$ è un *punto di sella* per *z* su *I*.

$$Hf(z_5)=Hf(-2,0)=-192(4)+256=-768+256=-512<0$$

quindi $z_5=(-2,0)$ è un *punto di sella* per *z* su *I*.

$$\begin{cases} Hf(z_6)=Hf(2,2)=144(4)(4)-192(4)-192(4)+256=2304-768-768+256=1024>0 \\ f_{xx}(z_6)=f_{xx}(2,2)=12(4)-16=48-16=32>0 \end{cases}$$

quindi $z_6=(2,2)$ è un *punto di minimo relativo* per *z* su *I* e risulta:

$$f(2,2)=16+16-8(4+4)=32-64=-32$$

$$\begin{cases} Hf(z_7)=Hf(2,-2)=144(4)(4)-192(4)-192(4)+256=2304-768-768+256=1024>0 \\ f_{xx}(z_7)=f_{xx}(2,-2)=12(4)-16=48-16=32>0 \end{cases}$$

quindi $z_7=(2,-2)$ è un *punto di minimo relativo* per *z* su *I* e risulta:

$$f(2,-2)=16+16-8(4+4)=32-64=-32$$

$$\begin{cases} Hf(z_8)=Hf(-2,2)=144(4)(4)-192(4)-192(4)+256=2304-768-768+256=1024>0 \\ f_{xx}(z_8)=f_{xx}(-2,2)=12(4)-16=48-16=32>0 \end{cases}$$

quindi $z_8=(-2,2)$ è un *punto di minimo relativo* per *z* su *I* e risulta:

$$f(-2,2)=16+16-8(4+4)=32-64=-32$$

$$\begin{cases} Hf(z_9) = Hf(-2,-2) = 144(4)(4) - 192(4) - 192(4) + 256 = 2304 - 768 - 768 + 256 = 1024 > 0 \\ f_{xx}(z_9) = f_{xx}(-2,-2) = 12(4) - 16 = 48 - 16 = 32 > 0 \end{cases}$$

quindi $z_9 = (-2,-2)$ è un *punto di minimo relativo* per *z* su *I* e risulta:

$$f(-2,-2) = 16 + 16 - 8(4+4) = 32 - 64 = -32$$

Occorre ora determinare i punti di massimo e di minimo sul bordo di $I = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$ attraverso i moltiplicatori di Lagrange. La funzione Lagrangiana è data da:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Si ha, pertanto:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2) - \lambda(x^2 + y^2 - 9)$$

Risolvendo il seguente sistema:

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \mathcal{L}_x = 4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial y} = \mathcal{L}_y = 4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = \mathcal{L}_\lambda = -x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

si ha:

$$\begin{cases} 4x^3 - 16x - 2\lambda x = 0 \\ 4y^3 - 16y - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 - 8 - \lambda) = 0 \\ 2y(2y^2 - 8 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, 2x^2 - 8 - \lambda = 0 \\ y = 0, 2y^2 - 8 - \lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ \dfrac{8+\lambda}{2} + \dfrac{8+\lambda}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ \dfrac{8 + \lambda + 8 + \lambda - 18}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ \dfrac{16 + 2\lambda - 18}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ 8 + \lambda - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ y = 0, y = \pm\sqrt{\dfrac{8+\lambda}{2}} \\ \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0, x=\pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} \\ y=0, y=\pm\sqrt{\dfrac{9}{2}} \\ \lambda=1 \\ \end{cases}$$

Risulta, in conclusione:

$$x=0, x^2+y^2-9=0, 4y^3-16y-2\lambda y=0 \Rightarrow x=0, y^2-9=0, 4y^3-16y-2\lambda y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0, y=\pm 3, 4y^3-16y-2\lambda y=0 \Rightarrow x=0, y=\pm 3, 4(\pm 27)-16(\pm 3)-2\lambda(\pm 3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0, y=\pm 3, \pm 108 \mp 48 \mp 6\lambda=0 \Rightarrow x=0, y=\pm 3, \lambda=\frac{\pm 108 \mp 48}{\pm 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0, y=\pm 3, \lambda=+18-8 \Rightarrow x=0, y=\pm 3, \lambda=+10 \Rightarrow (0,\pm 3,10);$$

$$y=0, x^2+y^2-9=0, 4x^3-16x-2\lambda x=0 \Rightarrow y=0, x^2-9=0, 4x^3-16x-2\lambda x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0, x=\pm 3, 4x^3-16x-2\lambda x=0 \Rightarrow y=0, x=\pm 3, 4(\pm 27)-16(\pm 3)-2\lambda(\pm 3)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0, x=\pm 3, \pm 108 \mp 48 \mp 6\lambda=0 \Rightarrow y=0, x=\pm 3, \lambda=\frac{\pm 108 \mp 48}{\pm 6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=0, x=\pm 3, \lambda=+18-8 \Rightarrow y=0, x=\pm 3, \lambda=+10 \Rightarrow (\pm 3,0,10);$$

$$\lambda=+1 \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, y=\pm\sqrt{\frac{9}{2}} \Rightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}}, 1\right)$$

I punti critici della funzione $\mathcal{L}$ sono pertanto:

$$\mathcal{L}_{10,11}=(0,\pm 3,10), \mathcal{L}_{12,13}=(\pm 3,0,10), \mathcal{L}_{14,15}=\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}}, 1\right)$$

da cui seguono i seguenti punti critici della funzione *z* vincolati sull'insieme *I*:

$$z_{10,11}=(0,\pm 3)\in I, z_{12,13}=(\pm 3,0)\in I, z_{14,15}=\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}}, \pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)\in I$$

Per determinare i massimi e minimi relativi sulla frontiera del vincolo occorre costruire la matrice hessiana e calcolarne il suo determinante, precisamente:

$$H\mathcal{L}(x,y,\lambda)=\begin{vmatrix}\mathcal{L}_{xx} & \mathcal{L}_{xy} & \mathcal{L}_{x\lambda}\\ \mathcal{L}_{yx} & \mathcal{L}_{yy} & \mathcal{L}_{y\lambda}\\ \mathcal{L}_{\lambda x} & \mathcal{L}_{\lambda y} & \mathcal{L}_{\lambda\lambda}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12x^2-16-2\lambda & 0 & -2x\\ 0 & 12y^2-16-2\lambda & -2y\\ -2x & -2y & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-4x^2\left(12y^2-16-2\lambda\right)-4y^2\left(12x^2-16-2\lambda\right)=$$

$$=-48x^2y^2+64x^2+8\lambda x^2-48x^2y^2+64y^2+8\lambda y^2=$$

$$=-96x^2y^2+64x^2+64y^2+8\lambda x^2+8\lambda y^2$$

Bisogna ora calcolare l'hessiano nei punti critici:

$$H\mathcal{L}\left(\mathcal{L}_{10,11}\right)=H\mathcal{L}\left(0,\pm3,10\right)=64(9)+8(10)(9)+128=576+720=1296>0$$

quindi $z_{1,2}=\left(0,\pm3\right)$ sono *punti di massimo relativo vincolato* e risulta:

$$f\left(0,\pm3\right)=81-8(9)=81-72=9$$

Analogamente:

$$H\mathcal{L}\left(\mathcal{L}_{12,13}\right)=H\mathcal{L}\left(\pm3,0,10\right)=64(9)+8(10)(9)=576+720=1296>0$$

quindi $z_{3,4}=\left(\pm3,0\right)$ sono *punti di massimo relativo vincolato* e risulta:

$$f\left(\pm3,0\right)=81-8(9)=81-72=9$$

$$H\mathcal{L}\left(\mathcal{L}_{14,15}\right)=H\mathcal{L}\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}},1\right)=-96\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)+64\left(\frac{9}{2}\right)+64\left(\frac{9}{2}\right)+8(1)\left(\frac{9}{2}\right)+8(1)\left(\frac{9}{2}\right)=$$

$$=-2916+288+288+36+36=-1296<0$$

quindi $z_{5,6}=\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ sono *punti di minimo relativo vincolato* e risulta:

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)=\frac{81}{4}+\frac{81}{4}-8\left(\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right)=\frac{81}{2}-\frac{144}{2}=-\frac{63}{2}$$

In particolare, essendo:

$$f\left(0,\pm3\right)=f\left(\pm3,0\right)=9>f\left(0,0\right)=0$$

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{9}{2}},\pm\sqrt{\frac{9}{2}}\right)=-\frac{63}{2}>f\left(2,2\right)=f\left(2,-2\right)=f\left(-2,2\right)=f\left(-2,-2\right)=-32$$

si ha che:

$$z_{10,11}=\left(0,\pm3\right)\in I,\, z_{12,13}=\left(\pm3,0\right)\in I$$

rappresentano *punti di massimo assoluto vincolati* per la funzione assegnata e:

$$z_{6,7,8,9}=\left(\pm2,\pm2\right)$$

rappresentano *punti di minimo assoluto vincolati* per la funzione assegnata.

ESERCIZI PROPOSTI

Calcolare le derivate parziali prime e seconde delle seguenti funzioni di due variabili:

a) $f\left(x,y\right)=x^3y-2xy^2+3x-2y+8$

$$\begin{bmatrix} f_x=3x^2y-2y^2+3;\ f_y=x^3-4xy-2; \\ f_{xx}=6xy;\ f_{yy}=-4x;\ f_{xy}=f_{yx}=3x^2-4y \end{bmatrix}$$

b) $f\left(x,z\right)=2xz+x^2z$

$$\begin{bmatrix} f_x=2z+2xz;\ f_z=2x+x^2; \\ f_{xx}=2z;\ f_{zz}=0;\ f_{xz}=f_{zx}=2+2x \end{bmatrix}$$

c) $f\left(x,z\right)=z\left(x-z^2\right)$

$$\begin{bmatrix} f_x=z;\ f_z=x-3z^2; \\ f_{xx}=0;\ f_{zz}=-6z;\ f_{xz}=f_{zx}=1 \end{bmatrix}$$

d) $f\left(x,z\right)=xz-\frac{1}{2}x^2z^2$

$$\begin{bmatrix} f_x=z-xz^2;\ f_z=x-x^2z; \\ f_{xx}=-z^2;\ f_{zz}=-x^2;\ f_{xz}=f_{zx}=1-2xz \end{bmatrix}$$

e) $f\left(x,y\right)=\left(x^2-2xy\right)\left(xy-y^2\right)$

$$\begin{bmatrix} f_x=2y^3+3x^2y-6xy^2;\ f_y=x^3+6xy^2-6x^2y; \\ f_{xx}=6xy-6y^2;\ f_{yy}=12xy-6x^2;\ f_{xy}=f_{yx}=3x^2+6y^2-12xy \end{bmatrix}$$

f) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$

$$\left[\begin{array}{l} f_x=\dfrac{2y}{(x+y)^2};\ f_y=-\dfrac{2x}{(x+y)^2};\\ f_{xx}=-\dfrac{4y}{(x+y)^3};\ f_{yy}=\dfrac{4x}{(x+y)^3};\ f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}\end{array}\right]$$

g) $f(x,y)=\sqrt{x^2-y^2}$

$$\left[\begin{array}{l} f_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}};\ f_y=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2-y^2}};\\ f_{xx}=-\dfrac{y^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}};\ f_{yy}=-\dfrac{x^2}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}};\\ f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{xy}{(x^2-y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\end{array}\right]$$

h) $f(x,y)=y^2e^{\frac{x}{y}}$

$$\left[\begin{array}{l} f_x=ye^{\frac{x}{y}};\ f_y=e^{\frac{x}{y}}(2y-x);\\ f_{xx}=e^{\frac{x}{y}};\ f_{yy}=e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{2y^2-2xy+x^2}{y^2}\right);\ f_{xy}=f_{yx}=e^{\frac{x}{y}}\left(\dfrac{y-x}{y}\right)\end{array}\right]$$

i) $f(x,y)=\log(x-e^y)$

$$\left[\begin{array}{l} f_x=\dfrac{1}{x-e^y};\ f_y=-\dfrac{e^y}{x-e^y};\\ f_{xx}=-\dfrac{1}{(x-e^y)^2};\ f_{yy}=-\dfrac{xe^y}{(x-e^y)^2};\ f_{xy}=f_{yx}=\dfrac{e^y}{(x-e^y)^2}\end{array}\right]$$

Determinare i massimi e minimi relativi delle seguenti funzioni di due variabili:

a) $f(x,y)=x^3-y^3+xy$

$$\left[\begin{array}{l}(0,0)\ \textit{punto di sella};\\ \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\ \textit{punto di minimo relativo}\end{array}\right]$$

b) $f(x,y)=4x^4-16x^2y+x$

$$\left[\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\ \textit{punto di sella}\right]$$

c) $f(x,y)=2\left(x^2+y^2+1\right)-\left(x^4+y^4\right)$

$$\left[\begin{array}{l}(0,0)\ \textit{punto di minimo relativo};\\ (0,\pm1),(\pm1,0)\ \textit{punti di sella};\\ (1,\pm1),(-1,\pm1)\ \textit{punto di massimo relativo}\end{array}\right]$$

d) $f(x,y)=2\left(x^4+y^4+1\right)-(x+y)^2$

$$\left[\begin{array}{l}(0,0)\ \textit{hessiano nullo};\\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \textit{punti di minimo relativo}\end{array}\right]$$

Determinare i massimi e minimi assoluti delle seguenti funzioni di due variabili sugli insiemi specificati:

a) $f(x,y)=x^2+y^2, I=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2+(y-2)^2-20=0\right\}$

$$\left[\begin{array}{l}(3,6)\ \textit{punto di massimo assoluto};\\ (-1,-2)\ \textit{punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

b) $f(x,y)=xy, I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2+xy-1=0\}$

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \textit{ punti di massimo assoluto};\\ (1,-1),(-1,1) \textit{ punti di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

c) $f(x,y)=2x^2+y^2-x, I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$

$$\left[\begin{array}{l}(-1,0) \textit{ punto di massimo assoluto};\\ \left(\frac{1}{4},0\right) \textit{ punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$

d) $f(x,y)=3x^2+4y^2-6x-12, I=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4\leq 0\}$

$$\left[\begin{array}{l}(-2,0) \textit{ punto di massimo assoluto};\\ (1,0) \textit{ punto di minimo assoluto}\end{array}\right]$$