- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione lineare**
  - **Funzione polinomiale**
  - **Funzione valore assoluto**
  - **Funzione potenza**
  - **Funzione esponenziale**
  - **Funzione logaritmo**
  - **Funzioni trigonometriche**

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione lineare**

Funzione lineare

Si definisce **funzione lineare** una funzione espressa dalla legge generale:

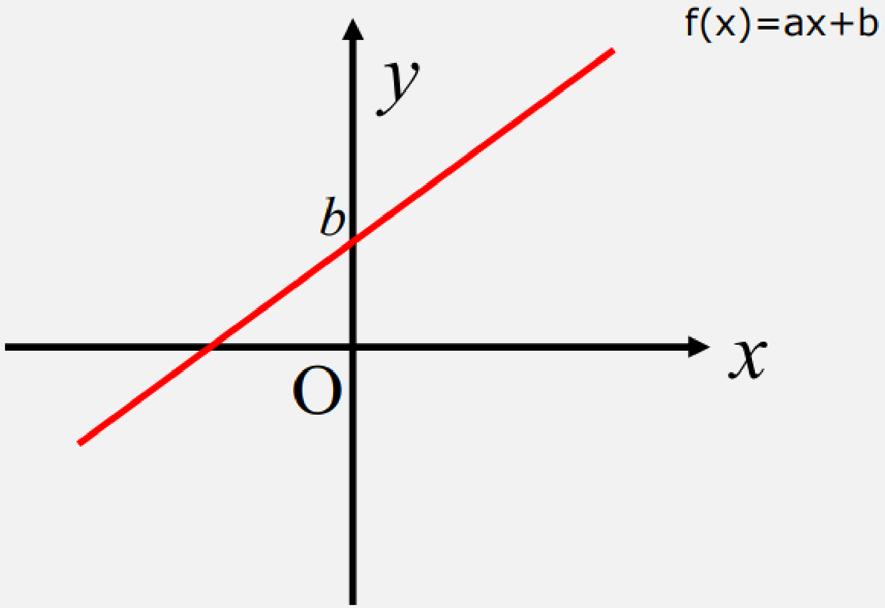
$$f(x) = ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to (ax + b) \in \mathbb{R}$$

a viene definito **coefficiente angolare**

b viene definito **termine noto**

Ogni funzione lineare ha per grafico una **retta**



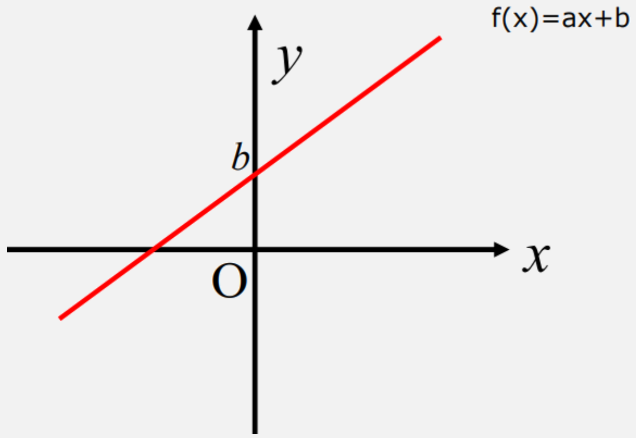
Il termine noto b

La funzione lineare è caratterizzata dalle due costanti a e b.

Se $x = 0 \rightarrow \ y = b$, e quindi il punto $P(0, b)$ che si trova sull'asse verticale della y appartiene al grafico della funzione.

Il termine noto b è l'ordinata dell'intersezione del grafico della funzione con l'asse y e prende il nome di **INTERCETTA**

Nel caso in cui la variabile indipendente è il tempo, e la legge quindi è $f(t) = at + b$, il coefficiente $b = f(0)$ si chiama VALORE INIZIALE

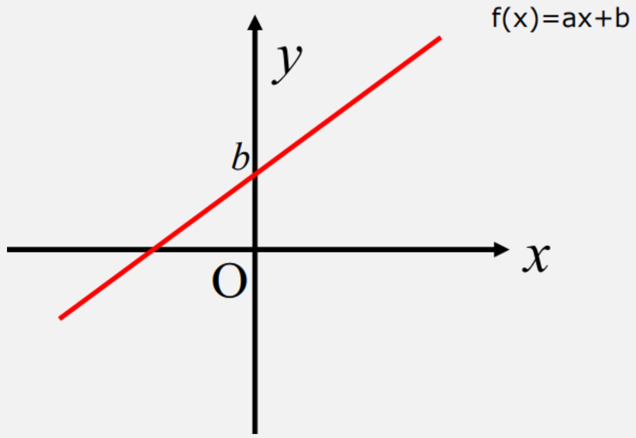


Il coefficiente angolare a

Data la funzione $f(x) = ax + b$, il coefficiente a rappresenta la **VARIAZIONE** delle ordinate di due punti qualunque del grafico rispetto alla corrispondente variazione delle ascisse:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Il coefficiente a quantifica l'**inclinazione** della retta rispetto all'asse orizzontale
- Il coefficiente a è <u>costante</u>

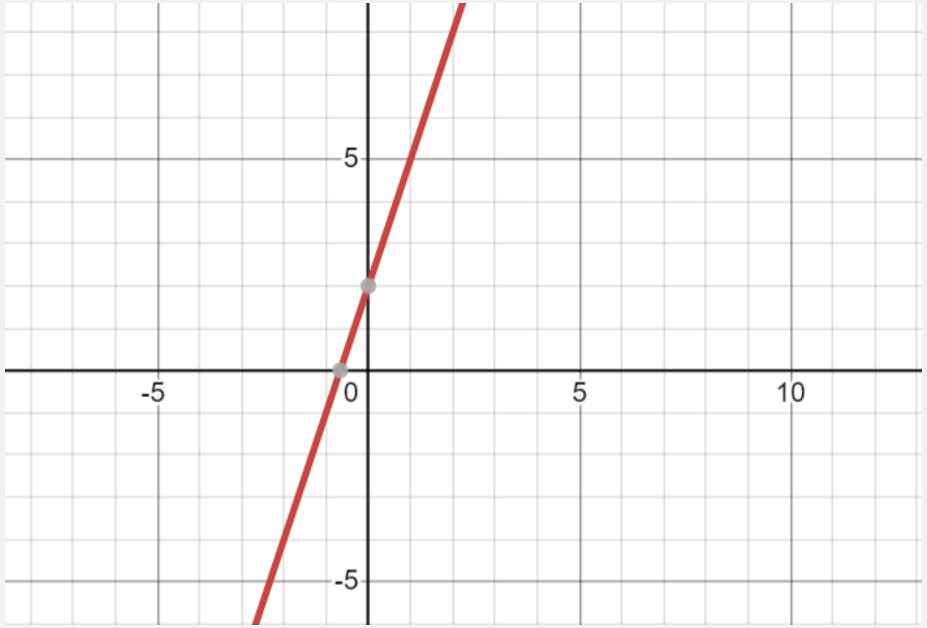


Esempio.

Sia data la funzione $f(x) = 3x + 2$, prendo i punti $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 8$ e calcolo la variazione tra i punti x_1, x_2 e tra i punti x_2, x_3

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{17 - 8}{5 - 2} = \frac{9}{3} = 3$$

$$a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{26 - 17}{8 - 5} = \frac{9}{3} = 3$$

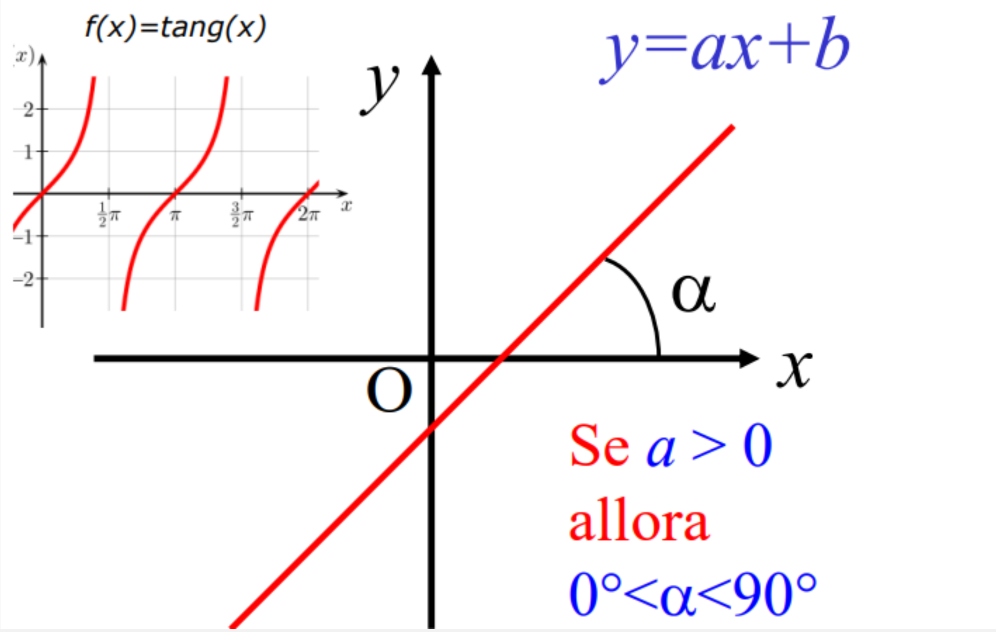


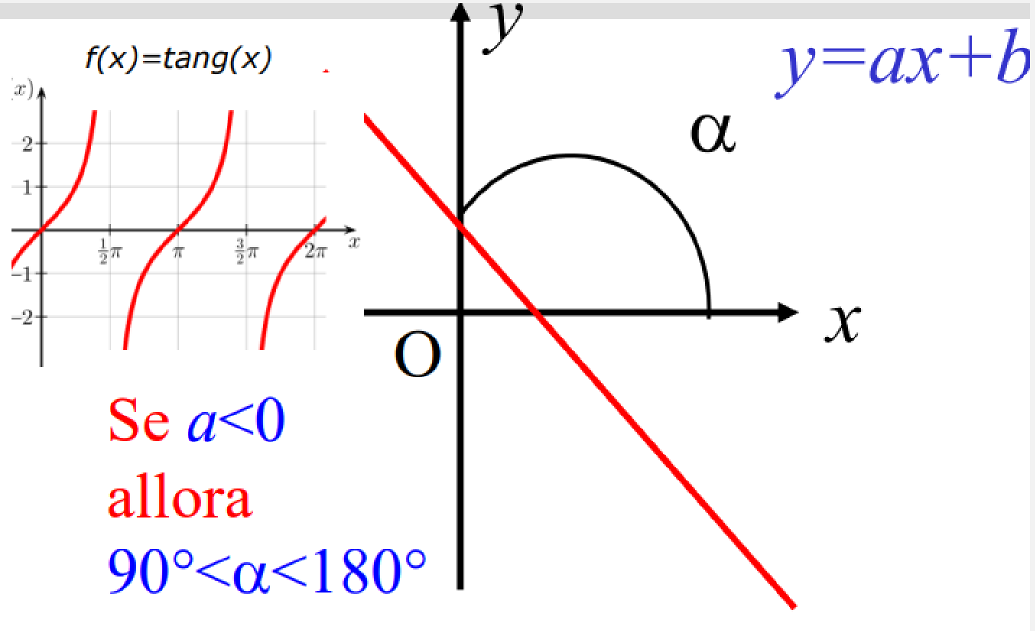
Il coefficiente angolare a

Il coefficiente angolare a vale:

$$a = \tan \alpha$$

Dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario





f strettamente crescente in R

$\sup(ax+b) = +\infty; \inf(ax+b) = -\infty$

f strettamente decrescente in R

$\sup(ax+b) = +\infty; \inf(ax+b) = -\infty$

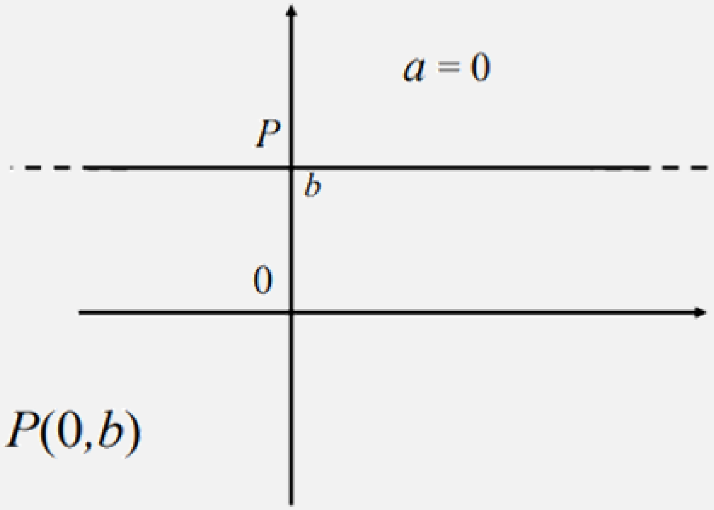
Il coefficiente angolare a

Il coefficient angolare a vale:

$$a = \tan \alpha$$

Dove α è l'angolo che la retta forma con l'asse orizzontale, misurato in senso antiorario

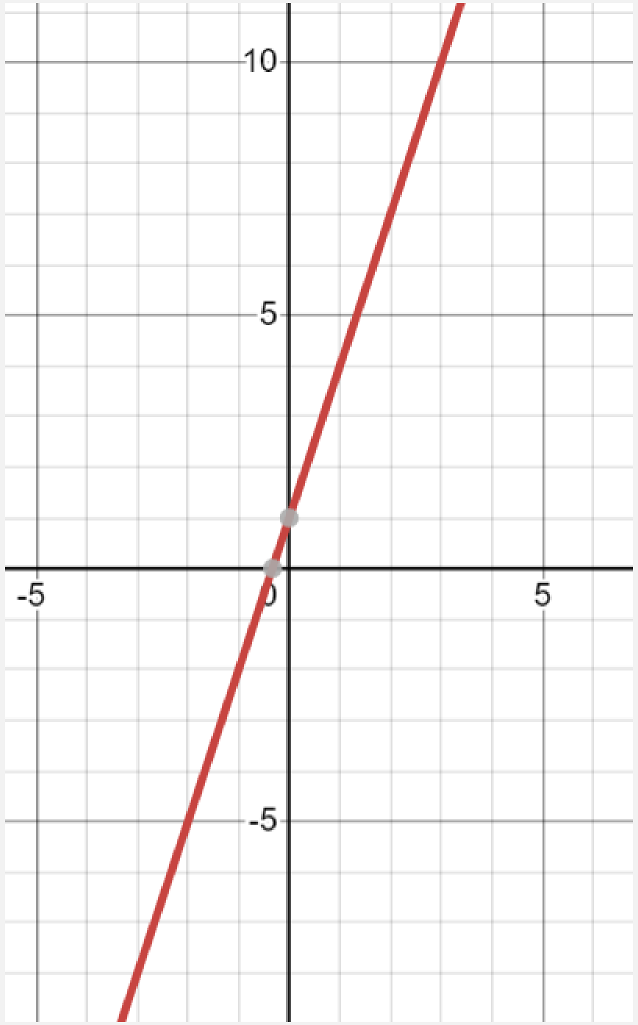
$$f(x) = b, \quad b \in R$$



f costante in R per $P(0,b)$

Esempio.

Verificare se il punto $P = (1{,}4)$ appartiene alla retta r di equazione $y = 3x + 1$



Soluzione.

Se il punto P appartiene alla retta r, le sue coordinate verificano l'equazione di r. Andiamo perciò a sostituire le coordinate di P all'interno dell'equazione e verifichiamo se sussiste l'identità.

$$y = 3x + 1 \rightarrow 4 = 3 \cdot 1 + 1 \rightarrow 4 = 4$$

Il punto P appartiene alla retta r

A partire dall'espressione analitica di una funzione lineare è possibile tracciare il suo grafico individuando due suoi punti.

Viceversa, conoscendo le coordinate cartesiane di due punti appartenenti al grafico di una funzione lineare oppure le coordinate cartesiane di un solo punto ed il coefficiente angolare, è possibile determinare l'espressione analitica di una funzione lineare

- se $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ appartengono al grafico di una funzione lineare, la sua espressione analitica è:

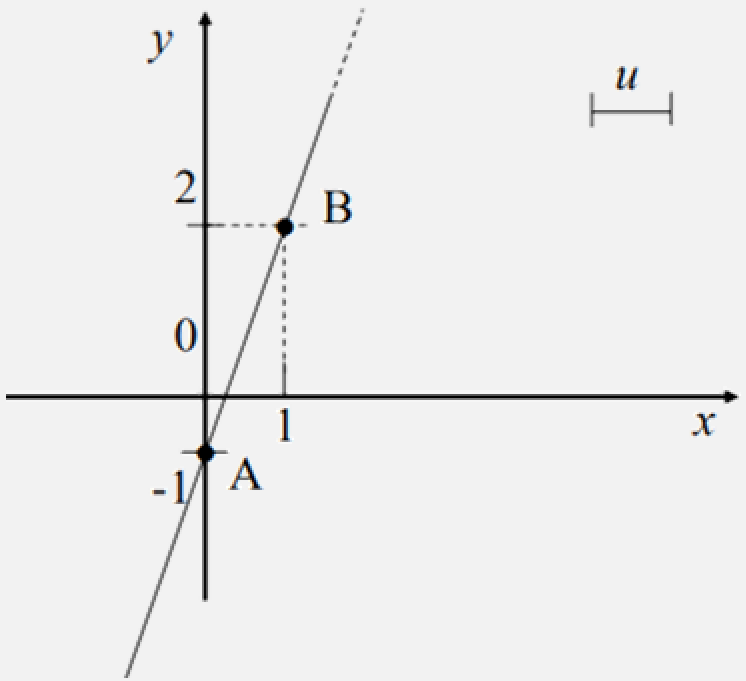
$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_2}, \qquad con\ y_2 \neq y_1\ e\ x_2 \neq x_1$$

- se $P(x_1, y_1)$ appartiene al grafico della funzione lineare (retta non parallela all'asse delle ordinate) ed m è il coefficiente angolare, la sua espressione analitica è:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Esempio.

Determinare l'espressione analitica della funzione avente come grafico la retta passante per il punto $B(1{,}2)$ e di coefficiente angolare $m = 3$ e rappresentarla graficamente.



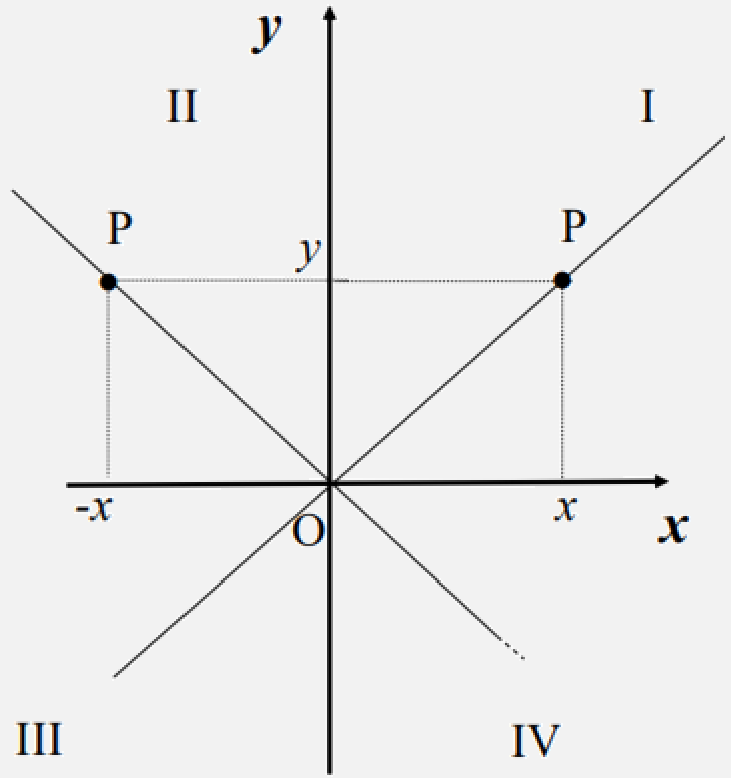
Dalla formula $y - y_1 = m(x - x_1)$
segue che l'espressione analitica richiesta è:

$$y - 2 = 3(x - 1) \rightarrow y - 2 = 3x - 3 \rightarrow y = 3x - 3 + 2 \rightarrow y = 3x - 1$$

Due particolari funzioni lineari sono le funzioni che hanno come grafico le **bisettrici**.

- Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del I e III quadrante hanno ascissa e ordinata uguali.

- Tutti i punti che si trovano sulla bisettrice del II e IV quadrante hanno ascissa e ordinata opposte



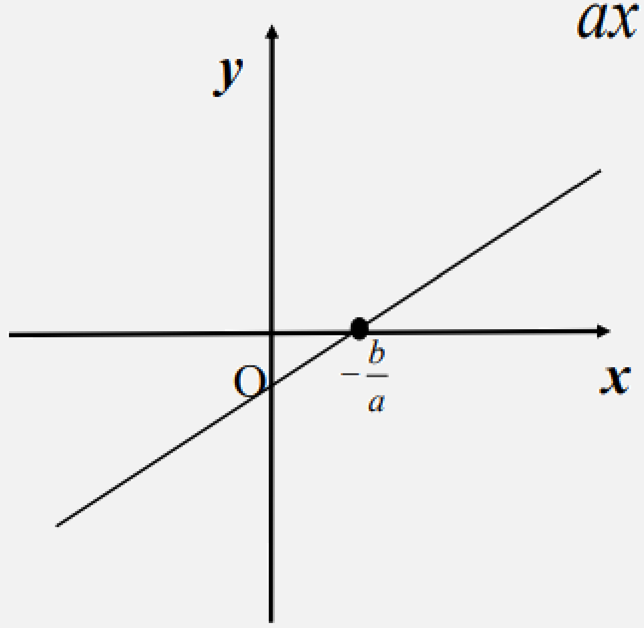
Bisettrice del I e III quadrante	Bisettrice del II e IV quadrante
$f(x)=x$	$f(x)=-x$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$m=1$ e $q=0$	$m=-1$ e $q=0$
f strettamente crescente	f strettamente decrescente

Risoluzione grafica di un'equazione di I grado

Risolvere graficamente un'equazione di I grado del tipo $ax + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ vuol dire determinare i punti di intersezione fra l'asse delle ascisse e il grafico della funzione lineare $f(x) = ax + b$ avente per grafico una retta del piano di coefficiente angolare a e ordinata all'origine b

$a > 0$

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

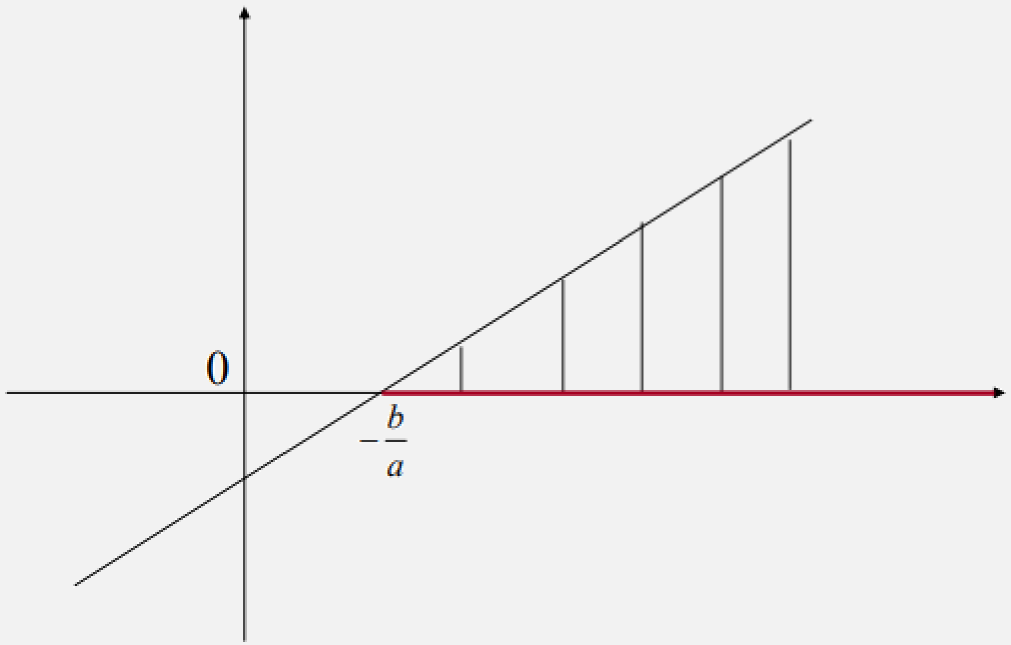


Risoluzione grafica di una disequazione di I grado

Risolvere graficamente una disequazione di I grado del tipo $ax + b > 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$ vuol dire determinare le ascisse dei punti del grafico della funzione lineare $f(x) = ax + b$ che si trovano sopra l'asse delle ascisse

$a > 0$

$$ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$$



- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione valore assoluto**

Funzione valore assoluto

Si definisce **funzione valore assoluto** una funzione espressa dalla legge generale:

$$f(x) = |x|$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to |x| \in [0, +\infty)$$

Dove

$$|x| = \begin{cases} x \; se \; x \geq 0 \\ -x \; se \; x < 0 \end{cases}$$

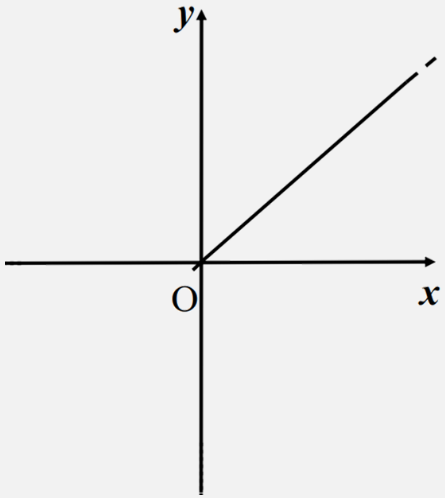
Il grafico della funzione valore assoluto è composto da due semirette passanti per l'origine e di equazione rispettivamente

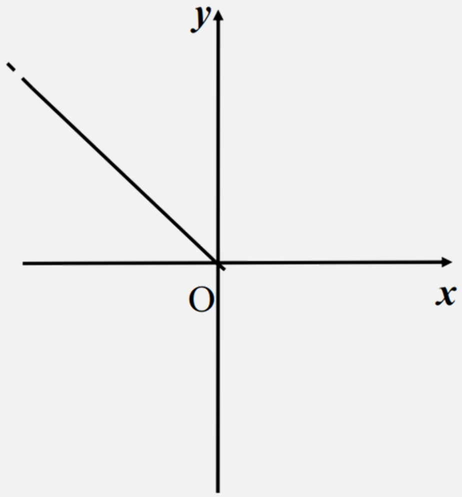
$$f(x) = x \text{ e } f(x) = -x$$

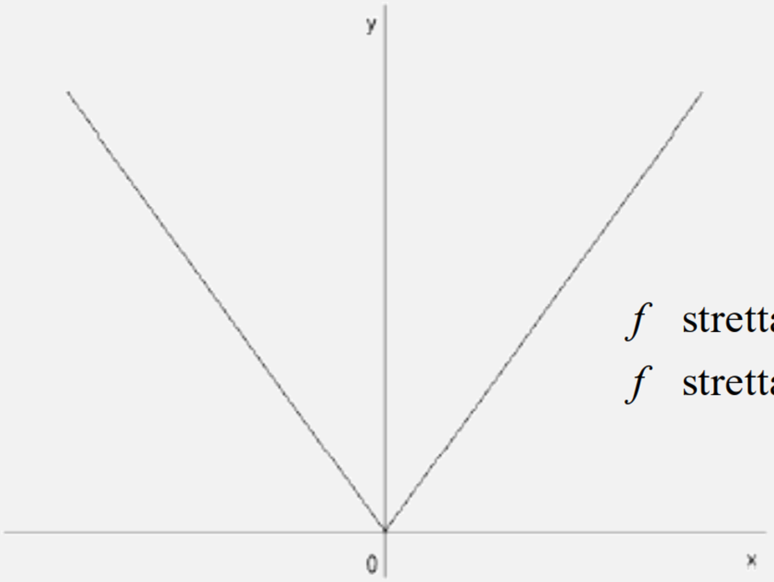
$$f(x) = |x|$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to |x| \in [0, +\infty)$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \; se \; x \geq 0 \\ -x \; se \; x < 0 \end{cases}$$







f strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$

f strettamente crescente in $[0, +\infty)$

$$\sup|x| = +\infty; \inf|x| = 0$$

Proprietà della funzione valore assoluto

1. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

2. $|x| = 0 \iff x = 0$

3. $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$

4. $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

5. $|x_1/x_2| = \frac{|x_1|}{|x_2|}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0$

In termini più generali, data una funzione f, vale che:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) se\, f(x) \geq 0 \\ -f(x) se\, f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^2 + |x-2|} = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + (x-2)} & \text{se} \quad (x-2) \geq 0 \\ \dfrac{1}{x^2 + (-(x-2))} & \text{se} \quad (x-2) < 0 \end{cases}$$

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione potenza**

Funzione potenza

Categorie:

1. Funzione potenza ad esponente naturale
   - Esponente naturale pari
   - Esponente naturale dispari

2. Funzione radice ennesima (esponente razionale)
   - Esponente razionale con base pari
   - Esponente razionale con base dispari

3. Funzione potenza ad esponente reale
   - $b > 0$
   - $b < 0$

Funzione potenza ad esponente naturale

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in codominio\ che\ varia\ a\ seconda\ di\ n$$

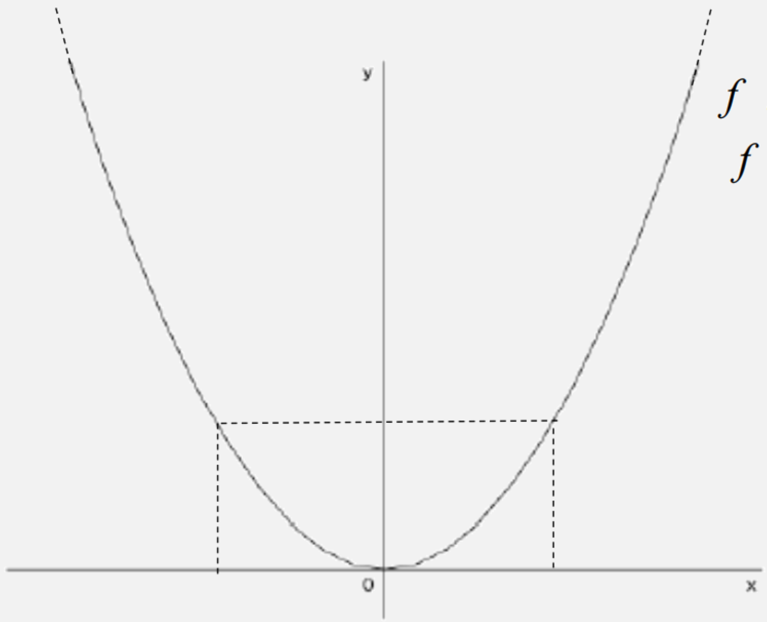
x è la **base** della funzione potenza e varia nel dominio
n è l'**esponente** della funzione potenza e viene fissato

base positiva → qualunque esponente
base negativa → esponente intero o razionale (frazione) con denominatore dispari

Funzione potenza ad esponente naturale pari

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato\ e\ pari$$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow x^n \in [0, +\infty)$$

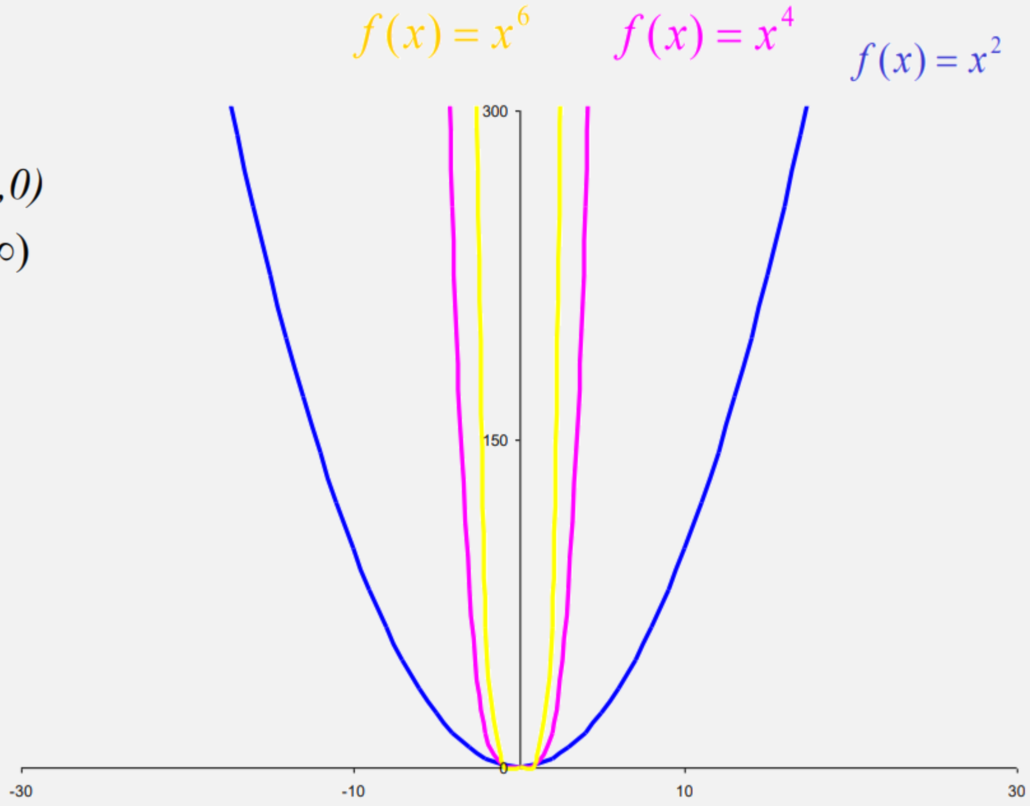


f strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$

f strettamente crescente in $(0, +\infty)$

f pari : $x^n = (-x)^n$

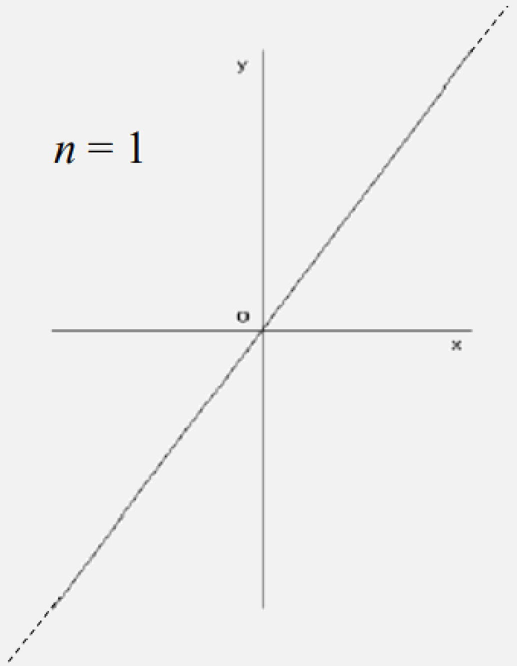
$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$

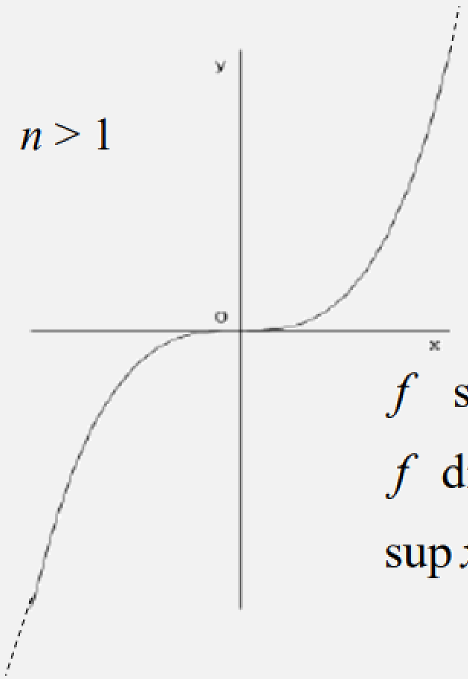


Funzione potenza ad esponente naturale dispari

$$f(x) = x^n, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato\ e\ dispari$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R}$$

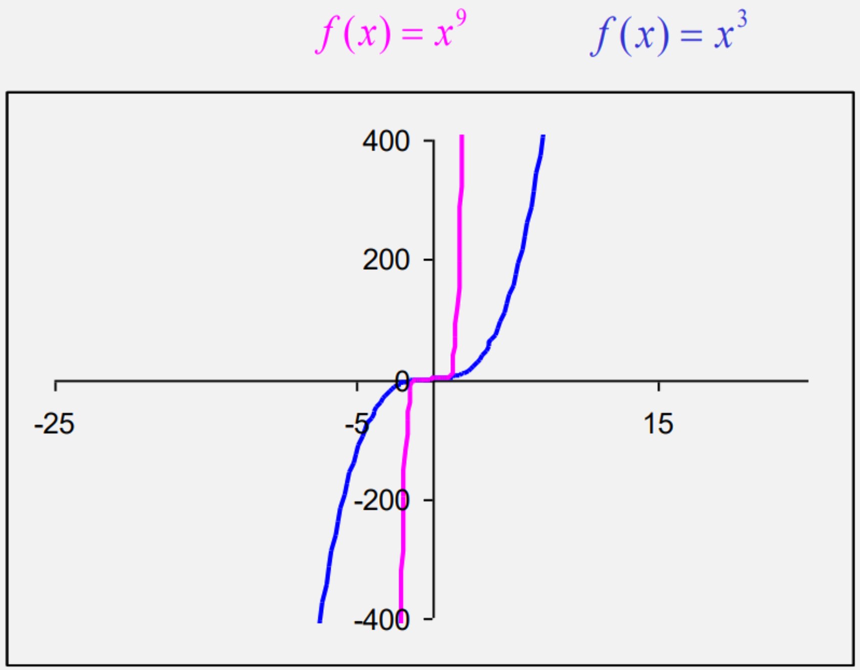




f strettamente crescente in R

f dispari : $-x^n = (-x)^n$

$\sup x^n = +\infty$; $\inf x^n = -\infty$



Funzione potenza ad esponente naturale

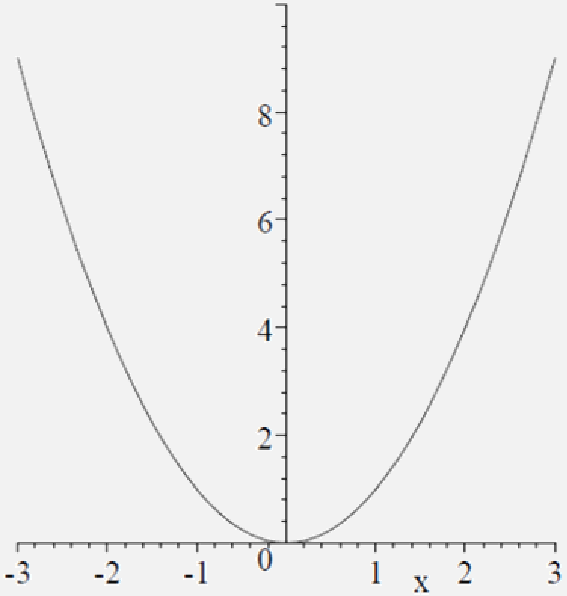
***n* pari**

$$f(x) = x^n$$

$$f : x \in R \rightarrow x^n \in [0,+\infty[$$

$$f \;\; \text{NON str. crescente in} \;\;]-\infty,+\infty[$$

$$f \;\; \text{NON invertibile in} \;\;]-\infty,+\infty[$$



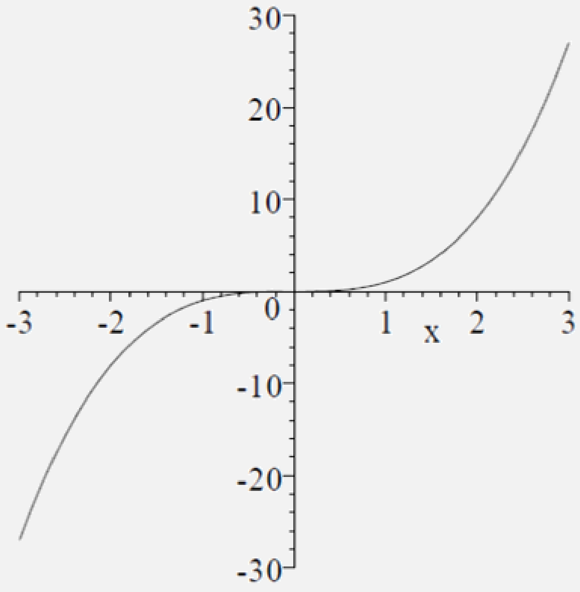
***n* dispari**

$$f(x) = x^n$$

$$f : x \in R \rightarrow x^n \in R$$

$$f \;\; \text{str. crescente in} \;\;]-\infty,+\infty[$$

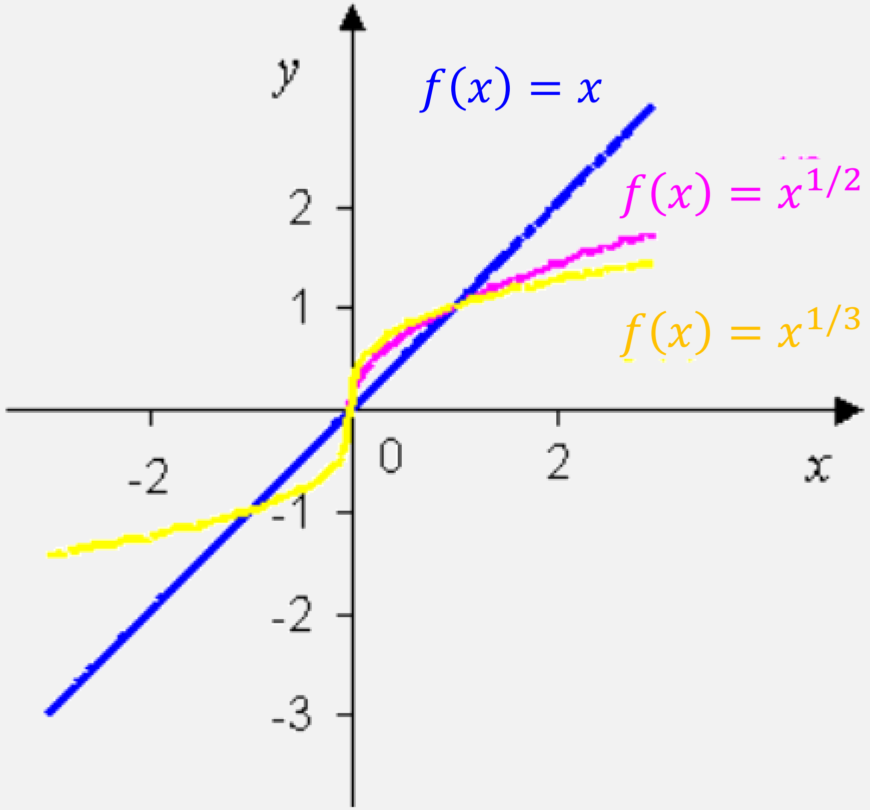
$$f \;\; \text{invertibile in} \;\;]-\infty,+\infty[$$



Funzione potenza ad esponente $1/n$ (funzione radice)

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato, n \geq 2$$

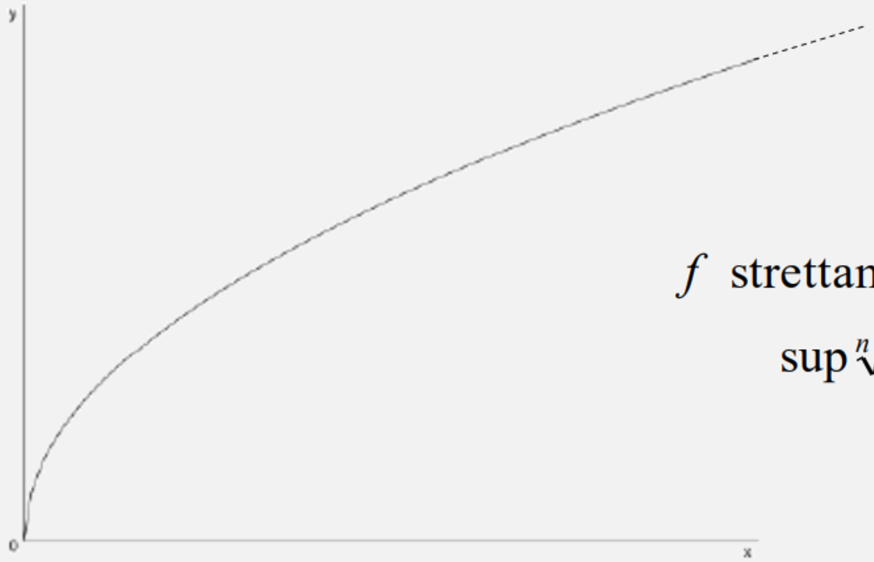
dominio e codominio variano a seconda di n



Funzione radice n pari

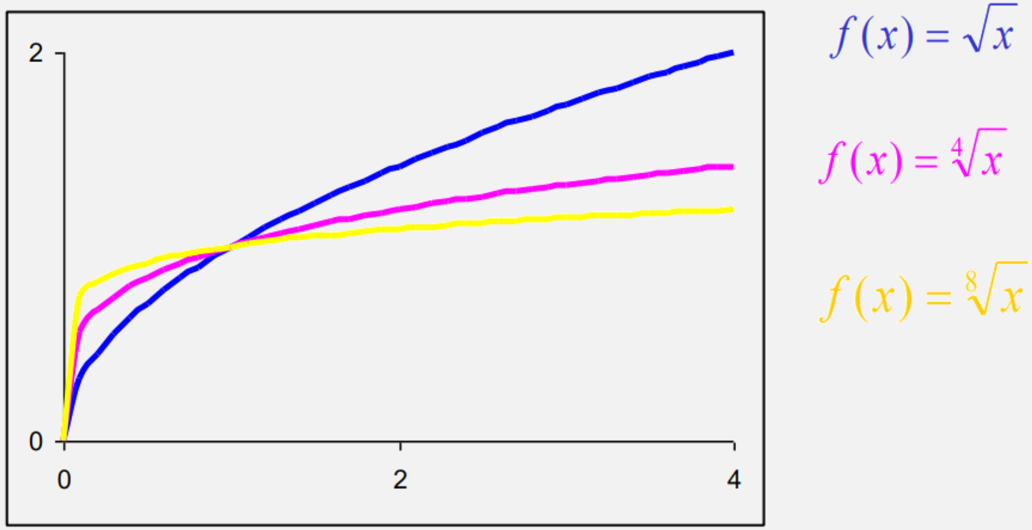
$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato, n \geq 2\ e\ pari$$

$$f : x \in [0, +\infty) \to \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty)$$



f strettamente crescente in $[0,+\infty)$

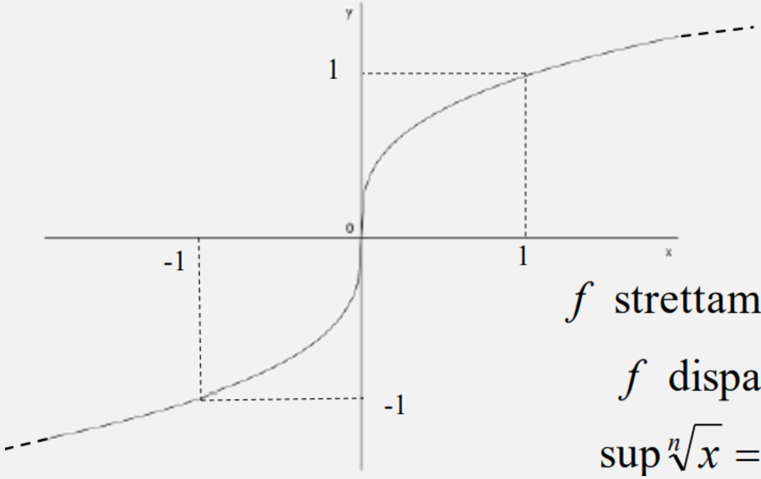
$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty$; $\inf \sqrt[n]{x} = 0$



Funzione radice n dispari

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, \qquad n \in \mathbb{N}\ fissato, n \geq 2\ e\ dispari$$

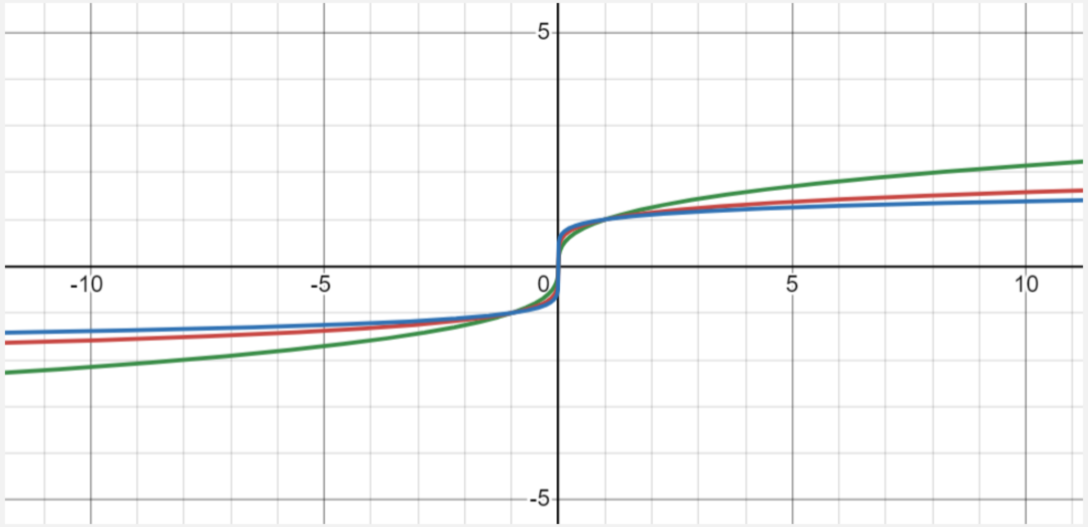
$$f : x \in \mathbb{R} \to \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}$$



f strettamente crescente in R

f dispari : $-\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{-x}$

$\sup \sqrt[n]{x} = +\infty$; $\inf \sqrt[n]{x} = -\infty$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f(x) = \sqrt[5]{x}$

$f(x) = \sqrt[7]{x}$

Funzione potenza ad esponente reale

$$f(x) = x^b, \qquad b \in \mathbb{R}\ fissato$$

$$dominio\ e\ codominio\ variano\ a\ seconda\ di\ b$$

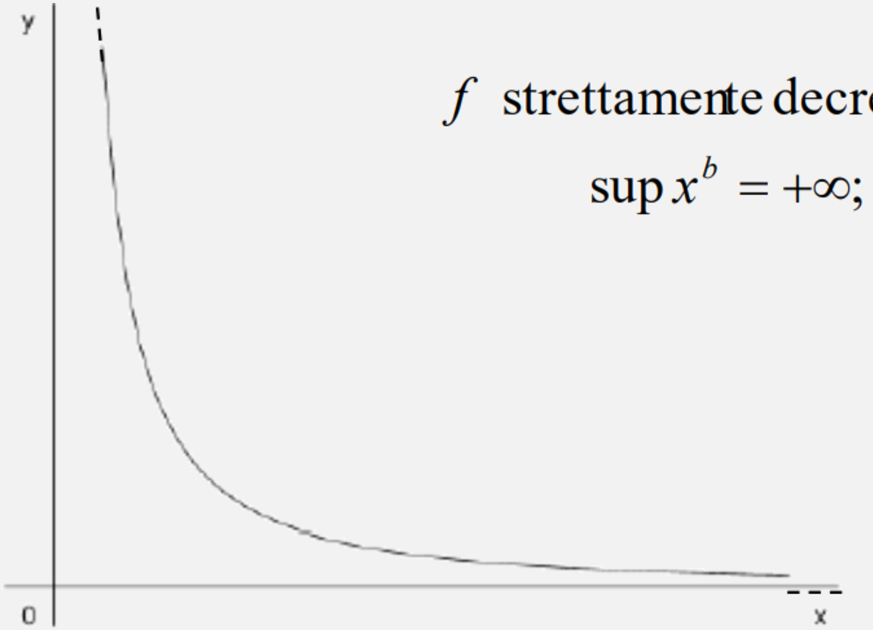
x è la **base** della funzione potenza e varia nel dominio

b è l'**esponente** della funzione potenza e viene fissato

Funzione potenza ad esponente reale $b < 0$

$$f(x) = x^b, \qquad b \in \mathbb{R}\ fissato\ , b < 0$$

$$f : x \in (0, +\infty) \to x^b \in (0, +\infty)$$



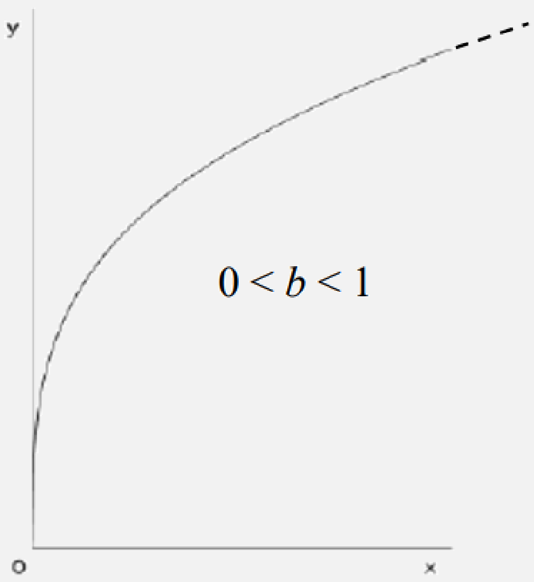
f strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

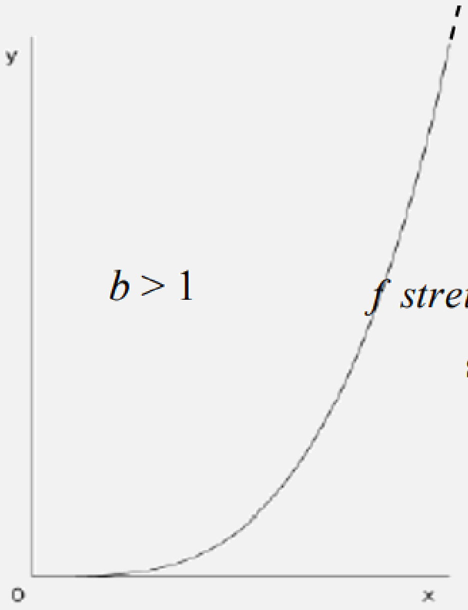
$$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$$

Funzione potenza ad esponente reale $b > 0$

$$f(x) = x^b, \qquad b \in \mathbb{R}\ fissato\ , b > 0$$

$$f : x \in [0, +\infty) \to x^b \in [0, +\infty)$$





f *strettamente crescente in* $(0, +\infty)$

$\sup x^b = +\infty; \inf x^b = 0$

Funzione potenza ad esponente intero (pari, negativo)

Per definizione:

$$f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}\, fissato, n\, pari, n < 0$$

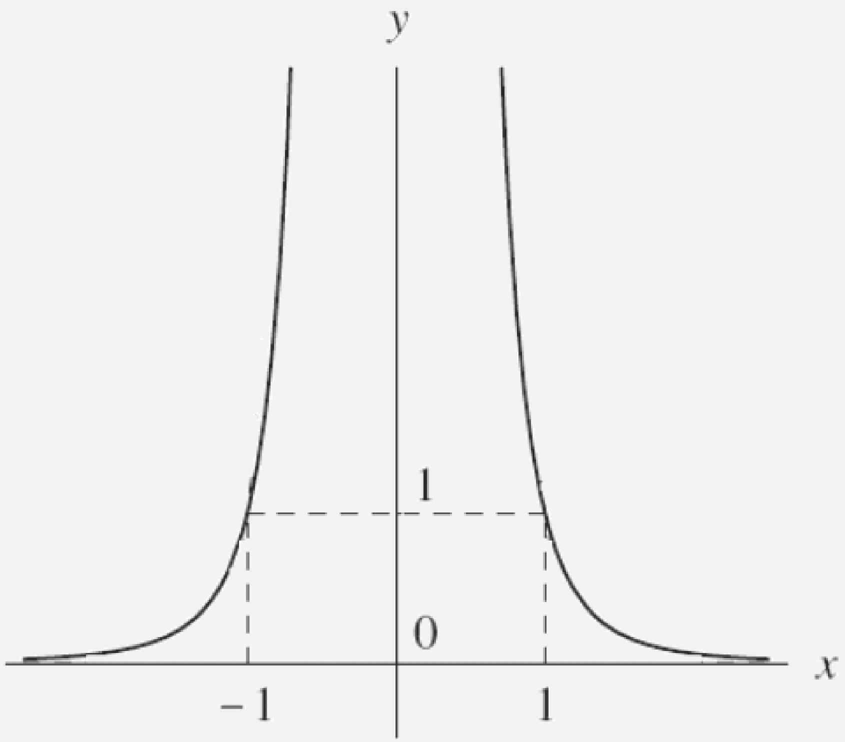
$$f : x \in \mathbb{R} - \{0\} \to x^n \in (0, +\infty)$$

f *strettamente crescente in* $(-\infty, 0)$

f *strettamente decrescente in* $(0, +\infty)$

f *pari* $: x^n = (-x)^n$

$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = 0$



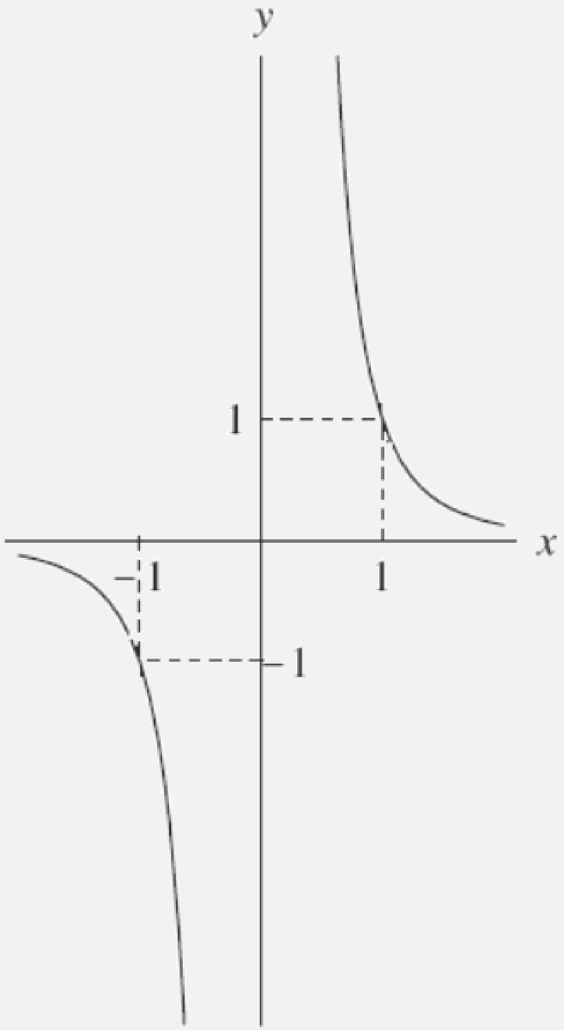
Funzione potenza ad esponente intero (dispari, negativo)

Per definizione:

$$f(x) = x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}\ fissato, n\ dispari, n < 0$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow x^n \in \mathbb{R} - \{0\}$$



f strettamente decrescente in R

f dispari : $-x^n = (-x)^n$

$\sup x^n = +\infty; \inf x^n = -\infty$

Proprietà delle potenze

1. $x^0 = 1, \forall x \in (0, +\infty) \;\; e \;\; 1^a = 1, \forall a \in \mathbb{R}$

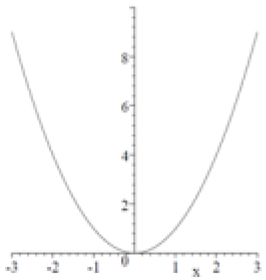
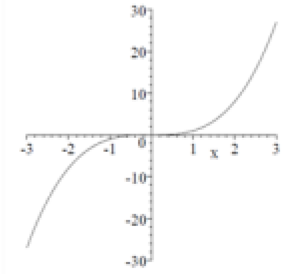
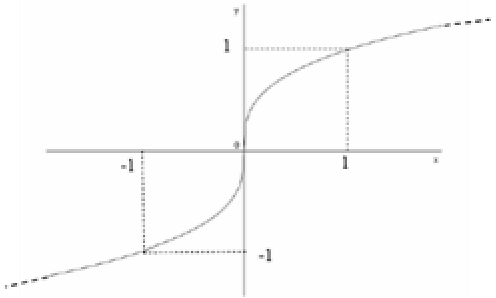
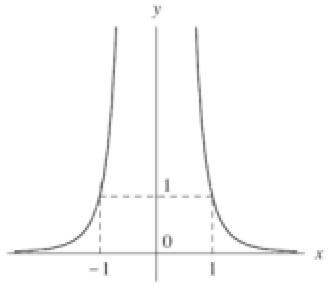
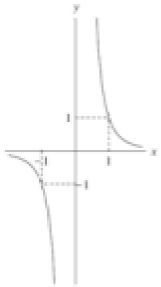
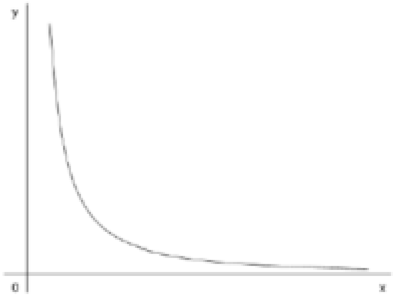
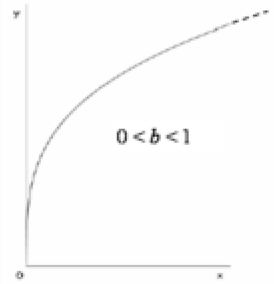
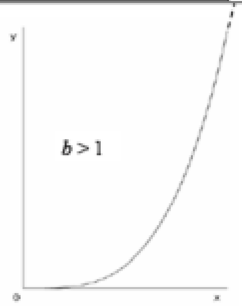
2. $x^a \cdot x^b = x^{a+b}, \forall x \in (0, +\infty), \forall a, b \in \mathbb{R}$

3. $(x^a)^b = x^{a \cdot b}, \forall x \in (0, +\infty), \forall a, b \in \mathbb{R}$

4. $x^b > 0, \forall x \in (0, +\infty), \forall b \in \mathbb{R}$

5. $se\; x > 1 \;\; e \;\; a < b \Rightarrow x^a < x^b, \forall a, b \in \mathbb{R}$

6. $se\; x < 1 \;\; e \;\; a < b \Rightarrow x^a > x^b, \forall a, b \in \mathbb{R}$

	n pari	n dispari
x^n		
$X^{(1/n)}$		
x^n, $n<0$		
x^b, *b reale*	 b<0	 

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione polinomiale**

Funzione polinomiale/quadratica

Si definisce **funzione polinomiale** una funzione non monotona espressa dalla legge generale:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$f : D \to \mathbb{R}$$

$n \in \mathbb{N}$ è il grado del polinomio

$a_n, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ sono i coefficienti; il coefficiente direttore a_n è $\neq 0$

Se il grado del polinomio che definisce f è uguale a 2:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

- Se $a > 0$, allora la parabola ha la concavità verso alto, mentre, se $a < 0$, la concavità è verso il basso

- $x = -\frac{b}{2a}$ è l'ascissa del vertice $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a})$ e rappresenta l'asse di simmetria della parabola

- Se $a > 0$ l'ordinata del vertice rappresenta il valore minimo della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$, mentre se $a < 0$ ne rappresenta il massimo

- $(0, c)$ è l'intersezione della parabola con l'asse delle ordinate

- Le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ danno le intersezioni della parabola con l'asse delle ascisse

Se il grado del polinomio che definisce f è uguale a 2:

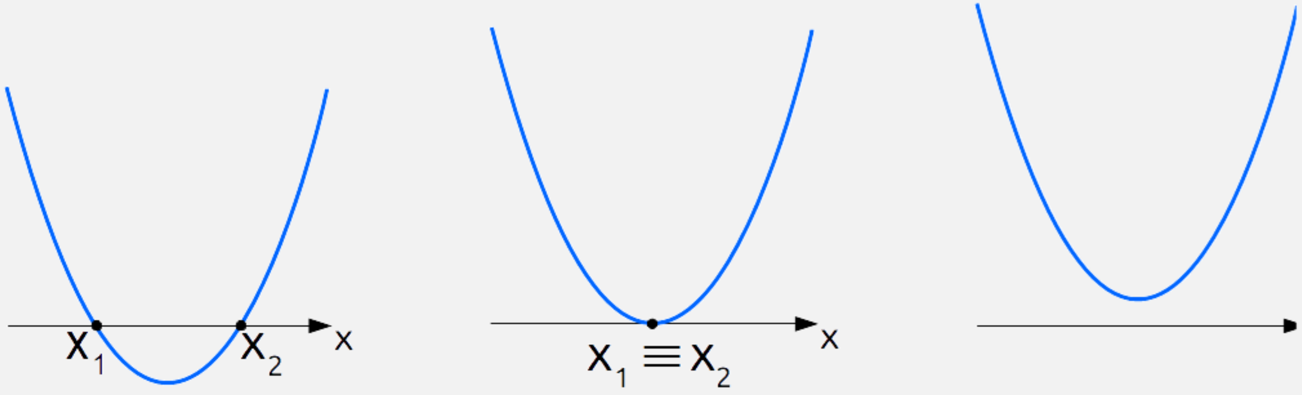
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

- $\Delta = b^2 - 4ac$ è il discriminante dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$

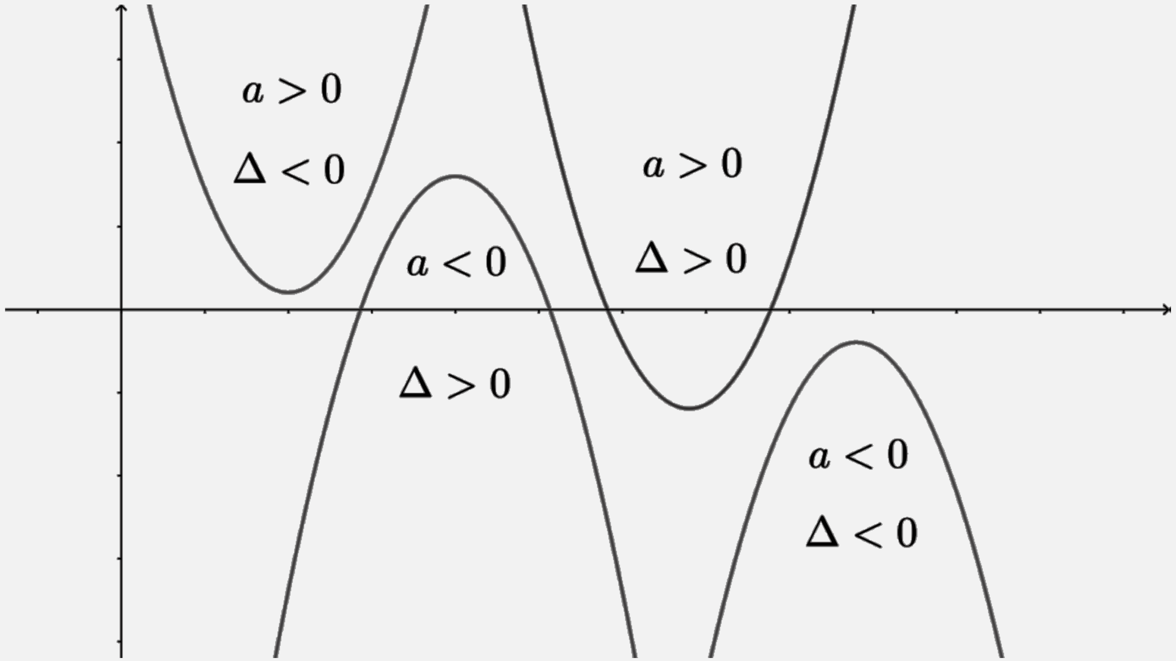
- Se $\Delta > 0$, allora la parabola interseca l'asse delle ascisse in due punti con ascissa x_1 e x_2. Se la concavità della parabola è verso l'alto, allora il grafico si trova al di sopra dell'asse delle x per valori esterni, cioè per $x < x_1$ e $x > x_2$

- Se $\Delta = 0$, allora la parabola interseca l'asse orizzontale in un solo punto. Se la concavità è verso l'alto, il grafico si troverà sempre al di sopra dell'asse delle x, eccetto il punto di contatto. Se la concavità è verso il basso, allora il grafico sarà sempre sotto l'asse delle ascisse

- Se $\Delta < 0$, allora la parabola non interseca l'asse orizzontale e, se la concavità è verso l'alto, il grafico sarà sempre sopra l'asse x, altrimenti si troverà al di sotto



$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$



- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione esponenziale**

Funzione esponenziale

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}\, fissato, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in \mathbb{R} \to a^x \in (0, +\infty)$$

a è la **base** della funzione esponenziale e viene fissato
x è l'**esponente** della funzione esponenziale e varia nel dominio

La funzione esponenziale è **sempre positiva**

Funzione esponenziale $a > 1$

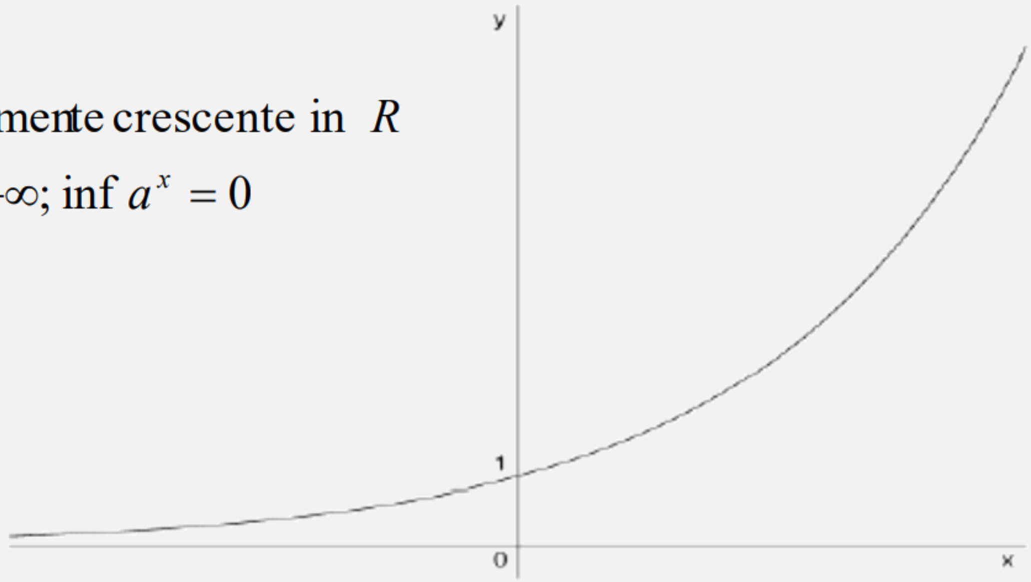
$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

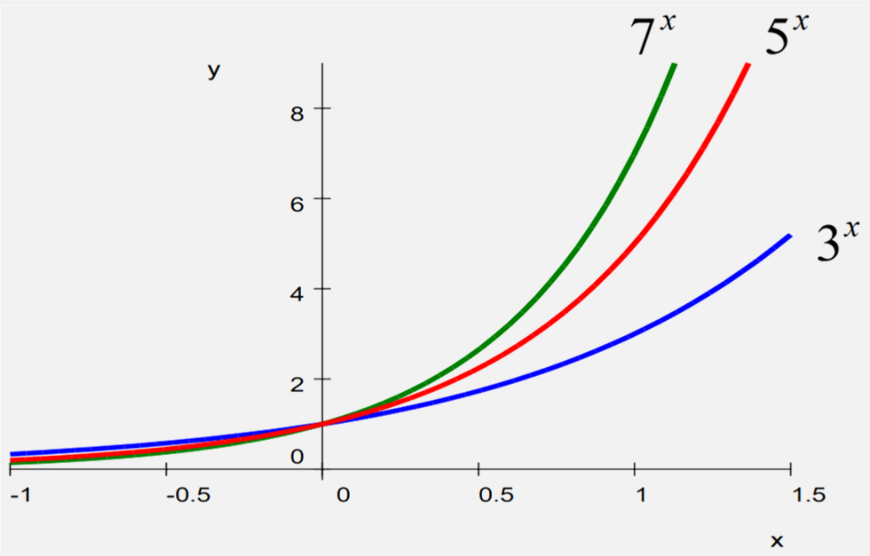
caso $a > 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \to a^x \in (0, +\infty)$$

f strettamente crescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$



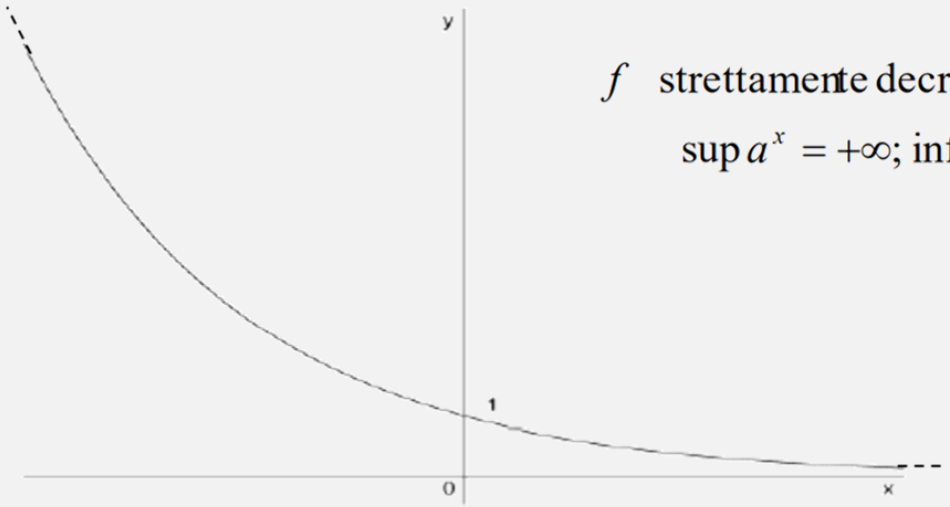


Funzione esponenziale $0 < a < 1$

$$f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

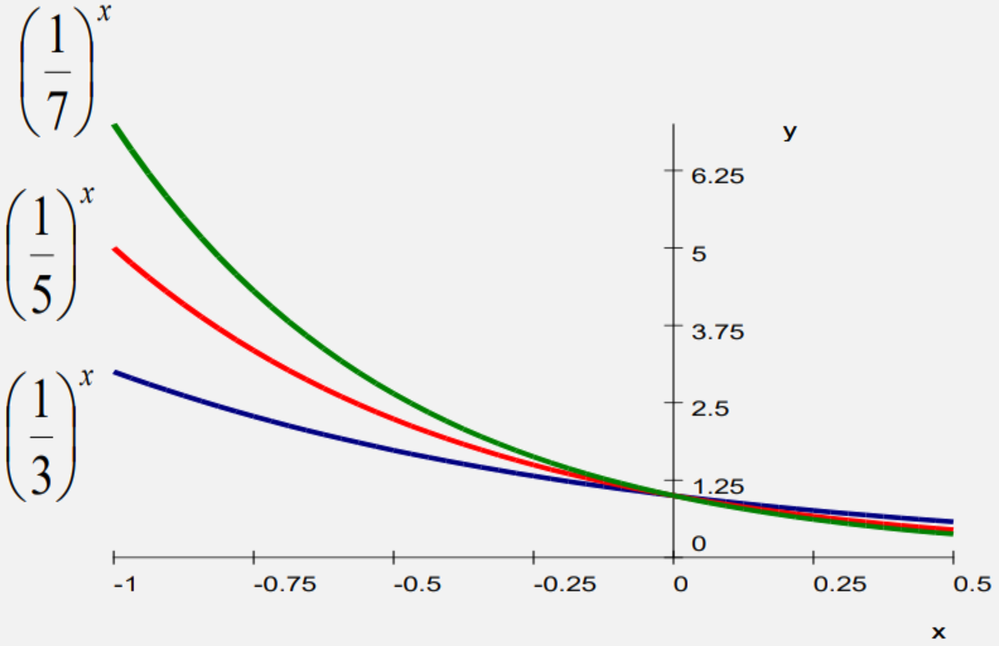
caso $0 < a < 1$

$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty)$$



f strettamente decrescente in R

$\sup a^x = +\infty; \inf a^x = 0$



Funzione esponenziale con base e

Una funzione esponenziale molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2.7182$$

detto numero di Nepero

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è una funzione strettamente crescente poiché $e > 1$

Funzione esponenziale: proprietà

1. $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$

2. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

3. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

4. $a^x > 0, \forall a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

5. $se\ a > 1\ e\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

6. $se\ 0 < a < 1\ e\ x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzione logaritmo**

Funzione logaritmo

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}\, fissato, a > 0, a \neq 1$$

$$f : x \in (0, +\infty) \to \log_a x \in \mathbb{R}$$

a è la **base** della funzione logaritmo e viene fissata
x è l'**argomento** della funzione logaritmo e varia nel dominio

$$a^x = b \iff x = \log_a b$$

Il logaritmo è la funzione inversa dell'esponenziale:

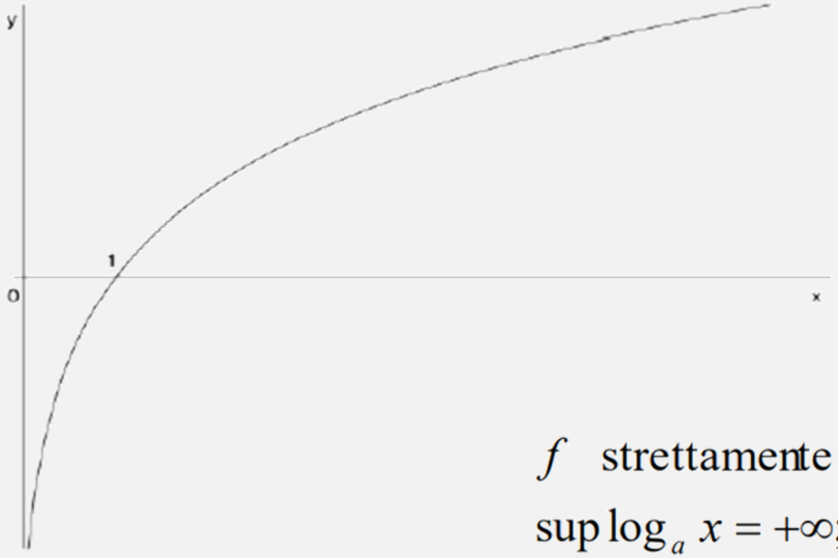
$$x = a^{\log_a x} \qquad x = \log_a(a^x)$$

Funzione logaritmo con $a > 1$

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

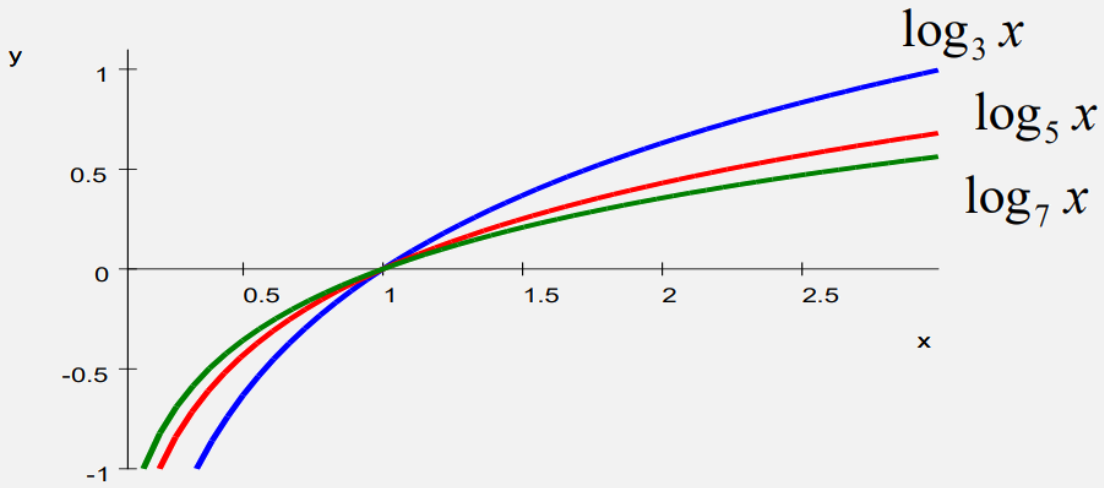
caso $a > 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente crescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty; \inf \log_a x = -\infty$

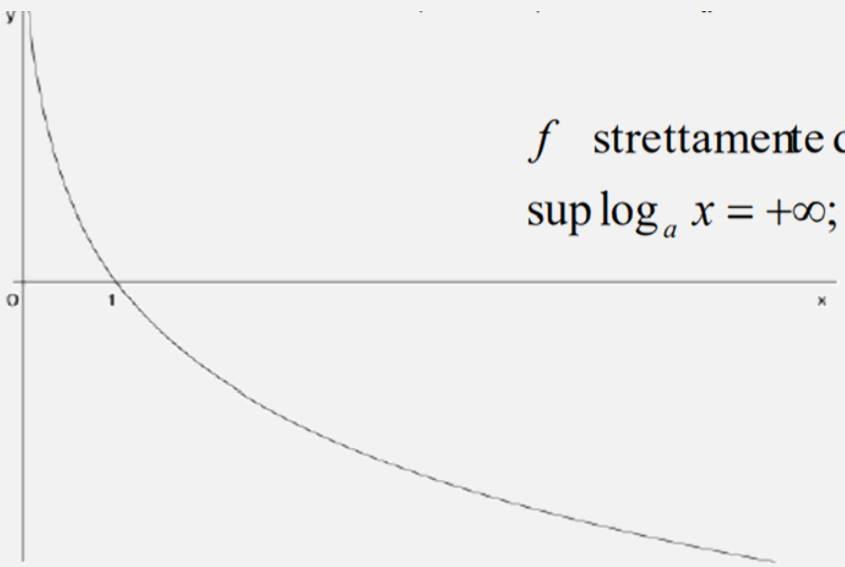


Funzione logaritmo con $0 < a < 1$

$$f(x) = \log_a x\,, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

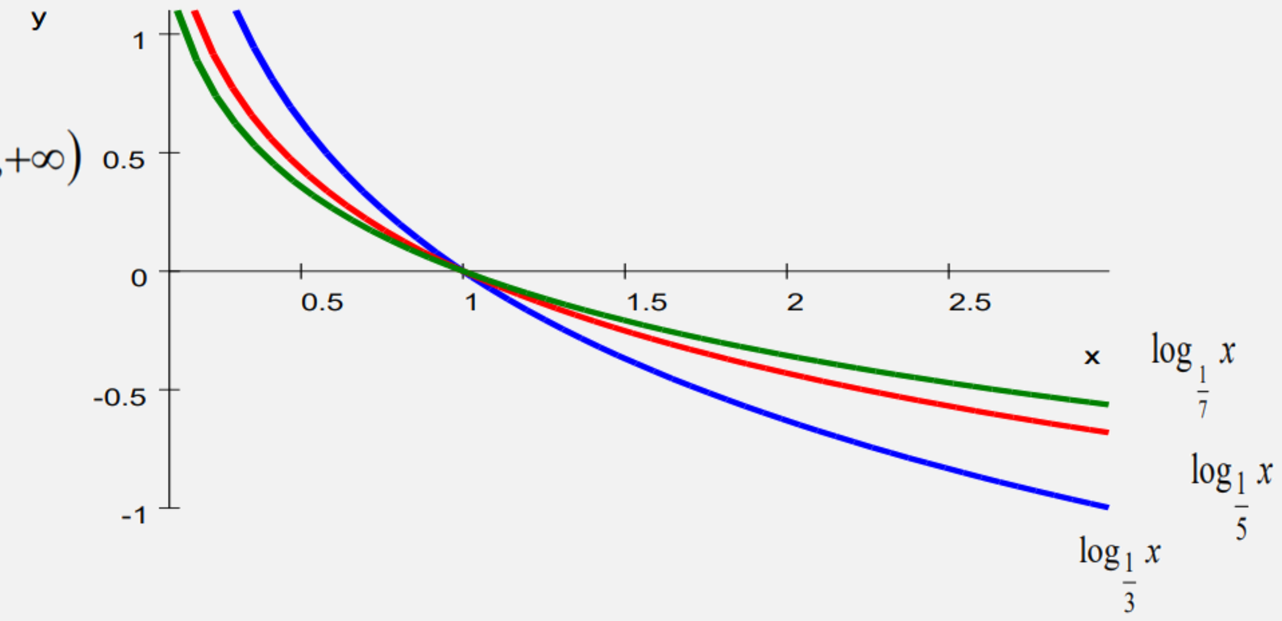
caso $0 < a < 1$

$$f : x \in (0, +\infty) \rightarrow \log_a x \in \mathbb{R}$$



f strettamente decrescente in $(0,+\infty)$

$\sup \log_a x = +\infty$; $\inf \log_a x = -\infty$



Funzione logaritmo con base e

Una funzione esponenziale molto utilizzata è quella che ha per base il numero irrazionale

$$e = 2.7182$$

detto numero di Nepero

La funzione esponenziale $f(x) = \log_e x$ è una funzione strettamente crescente poiché $e > 1$

$$f(x) = \log_e x = \log x = \ln x$$

Funzioni esponenziale e logaritmo

La funzione logaritmo è l'inversa della funzione esponenziale (e viceversa). Ciò vuol dire che, se:

$y = a^x$ dove a è la base dell'esponenziale

$\Downarrow$

$x = \log_a y$ dove a è la base del logaritmo

Quindi, affermare che $x = \log_a y$ equivale a dire che x è l'esponente da dare alla base del logaritmo per avere l'argomento

$\log_e 1 = x$	$e^x=1$	$x=0$
$\log_2 8 = x$	$2^x=8$	$x=3$
$\log_4 2 = x$	$4^x=2$	$x=1/2$
$\log_3 \frac{1}{3} = x$	$3^x=1/3$	$x=-1$
$Log_{10} 0 = x$	$10^x=0$	$x=$ non esiste

Funzioni esponenziale e logaritmo

La funzione logaritmo e la funzione esponenziale sono l'una l'inversa dell'altra.

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad e \quad f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

quindi

$$a^{\log_a x} = x \quad e \quad \log_a a^x = x$$

$$\log_e e^x = \qquad x$$

$$\log_2 2^{3x} = \qquad 3x$$

$$\log_4 4^{x^2} = \qquad x^2$$

$$3^{\log_3 2x} = \qquad 2x$$

$$\frac{1}{2}^{\log_{\frac{1}{2}} x} = \qquad x$$

Funzione logaritmo: proprietà

1. $\log_a x^b = b \cdot \log_a x \qquad \forall x > 0,\ \forall b \in \mathbb{R},\ a > 0, a \neq 1$

2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall x > 0, \forall y > 0, a > 0, a \neq 1$

3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \qquad \forall x > 0, \forall y > 0, a > 0, a \neq 1$

4. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \qquad a, b > 0, a \neq 1$

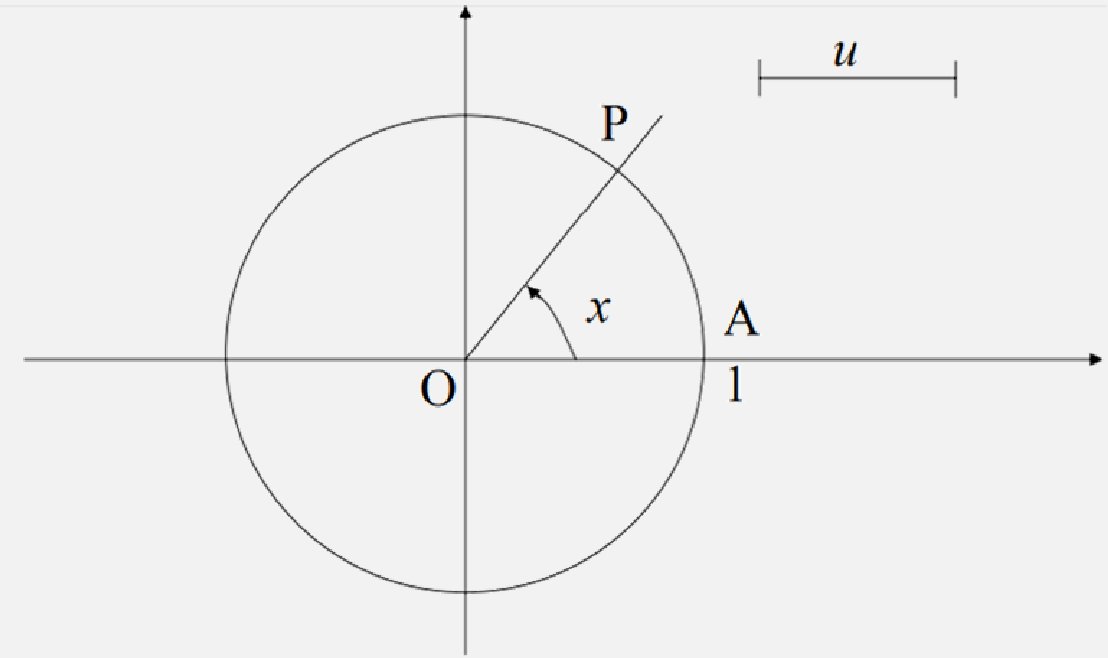
5. $\log_a x = -\log_{\frac{1}{a}} x$

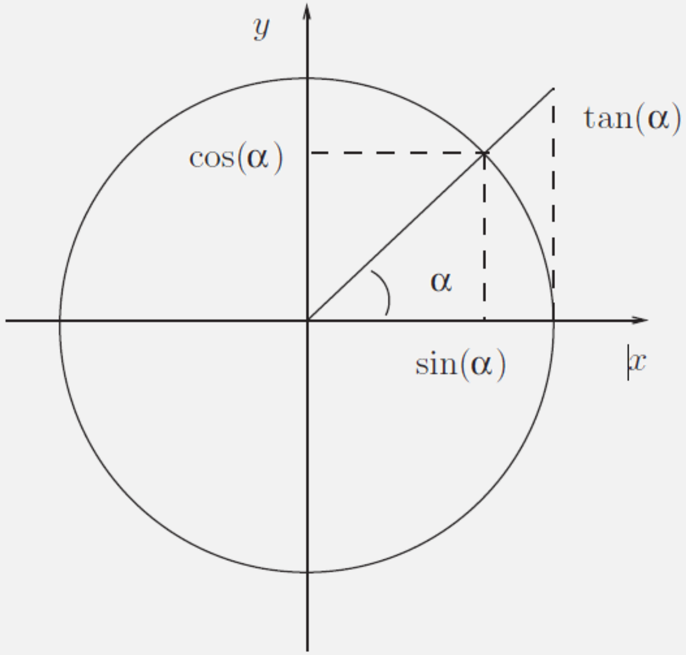
$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{-1} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

- **FUNZIONI ELEMENTARI**
  - **Funzioni trigonometriche**

Circonferenza goniometrica

Sia dato un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica a partire dal punto A origine degli archi e sia x l'angolo sotteso dal punto P

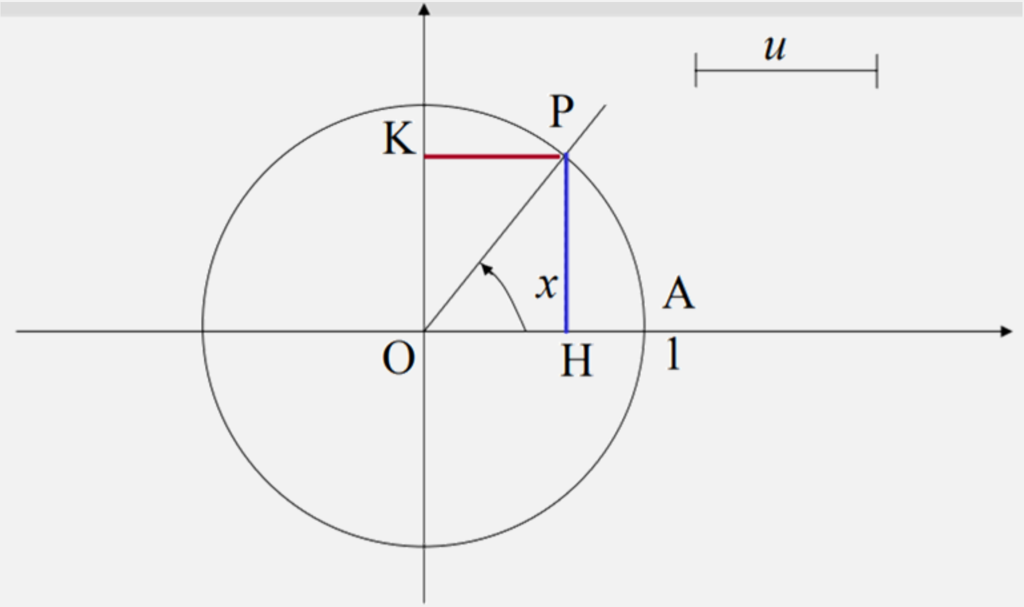


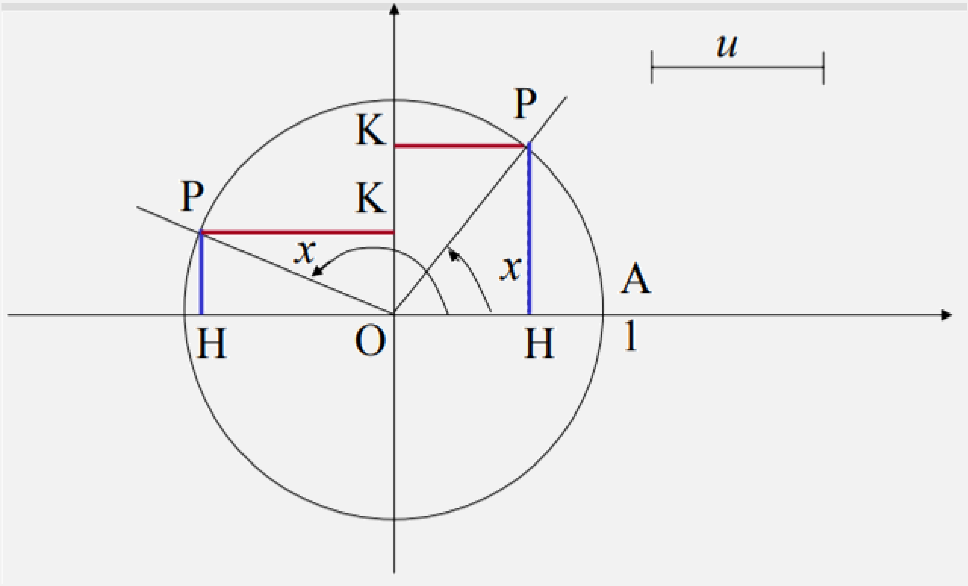


Equazione fondamentale della trigonometria: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Circonferenza goniometrica

Si definisce $\sin x$ l'ordinata del punto P (cioè il segmento PH)
Si definisce $\cos x$ l'ascissa del punto P (cioè il segmento PK)

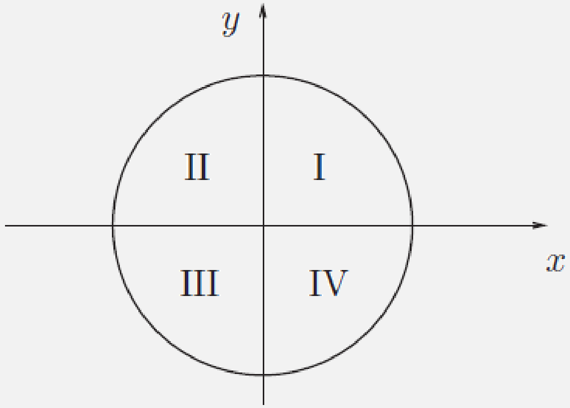




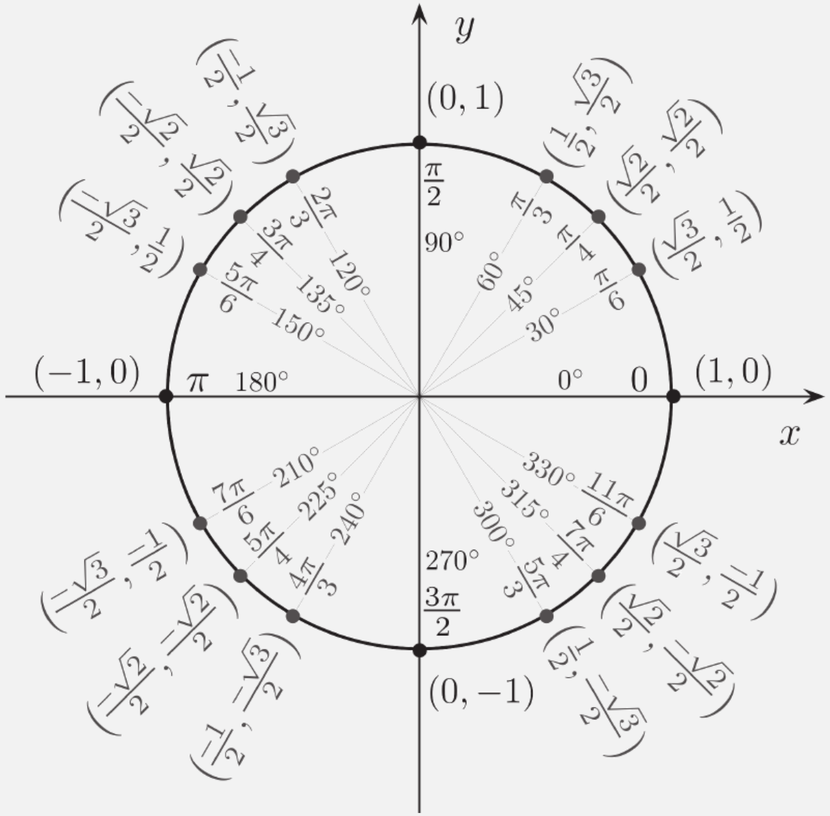
Al variare della posizione di P sulla circonferenza, variano l'ampiezza dell'angolo x e ascissa e ordinata del punto P. Variando x, variano $\sin x$ e $\cos x$

Gradi	Radianti
30	$\frac{\pi}{6}$
45	$\frac{\pi}{4}$
60	$\frac{\pi}{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$
120	$\frac{2}{3}\pi$
150	$\frac{5}{6}\pi$
180	π

Gradi	Radianti
210	$\frac{7}{6}\pi$
240	$\frac{4}{3}\pi$
270	$\frac{3}{2}\pi$
300	$\frac{5}{3}\pi$
330	$\frac{11}{6}\pi$
360	2π



Primo e secondo quadrante					
α	cos	sin	α	cos	sin
0	1	0	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$



Terzo e quarto quadrante					
α	cos	sin	α	cos	sin
π	-1	0	$\frac{3}{2}\pi$	0	-1
$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Funzione seno

$$f(x) = \sin x$$

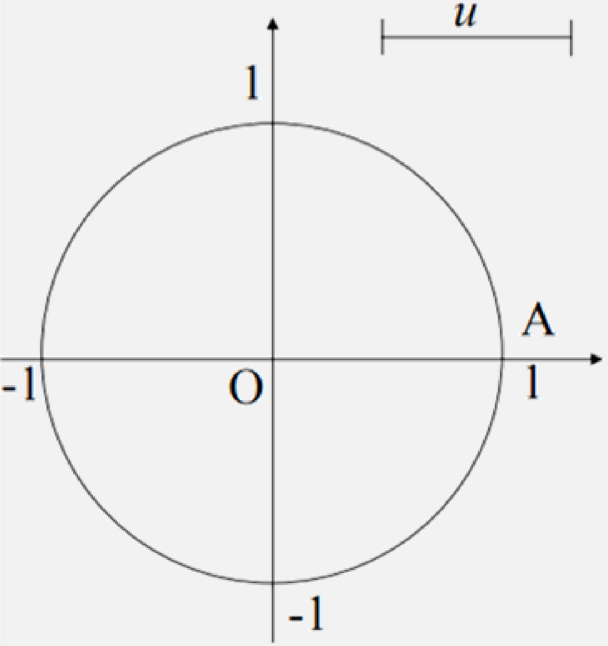
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \sin x \in [-1, +1]$$

Il **dominio** della funzione seno è tutto $\mathbb{R}$ poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri
(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)

Il **codominio** della funzione seno è l'intervallo $[-1, +1]$ poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto P è -1, mentre il massimo valore è $+1$

Funzione seno

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione seno assume un corrispondente valore numerico



x	$\text{sen } x$
0	0
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	1
π	0
$\pi/6$	1/2
$\pi/3$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$3/2\ \pi$	-1
$2\ \pi$	0

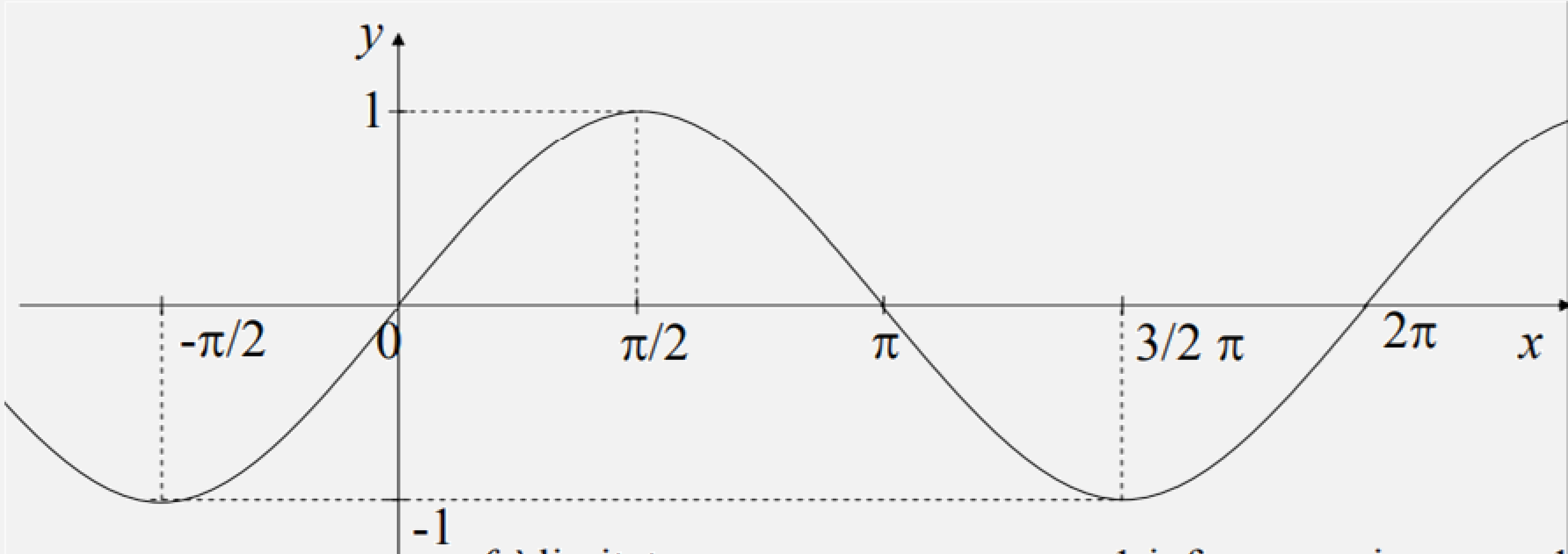
Periodicità
Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π) la funzione $\sin x$ assume gli stessi valori

→ La funzione seno è PERIODICA di periodo 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x\, , \forall x \in \mathbb{R}$$

Punti importanti

- $(0,0) \rightarrow f(0) = 0$
- $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $(\pi, 0) \rightarrow f(\pi) = 0$
- $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
- $(2\pi, 0) \rightarrow f(2\pi) = 0$



f è limitata: $\sup\, senx = \max\, senx = 1; \inf\, senx = \min\, senx = -1$

f strettamente crescente in $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right], k \in Z$

f strettamente decrescente in $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right], k \in Z$

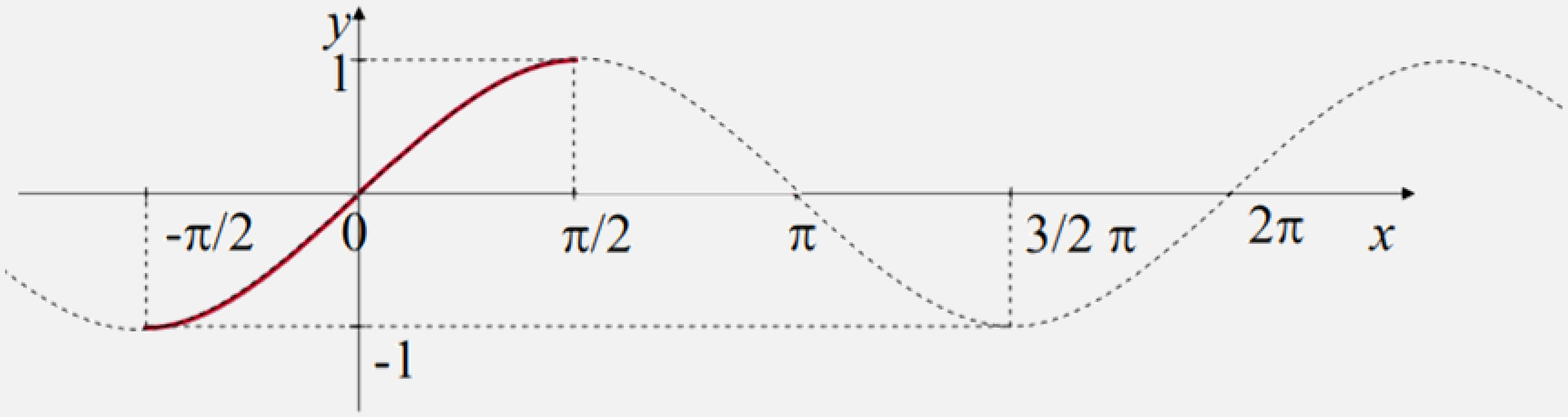
$\Downarrow$

f dispari: $-senx = sen(-x)$

Non è invertibile su R!

Non invertibilità in $\mathbb{R}$

La funzione seno non è invertibile su $\mathbb{R}$.
Se però, invece di considerare come dominio tutto $\mathbb{R}$ consideriamo solo una parte di esso e cioè l'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, allora in tale intervallo la funzione seno risulta strettamente crescente e quindi invertibile



Funzione coseno

$$f(x) = \cos x$$

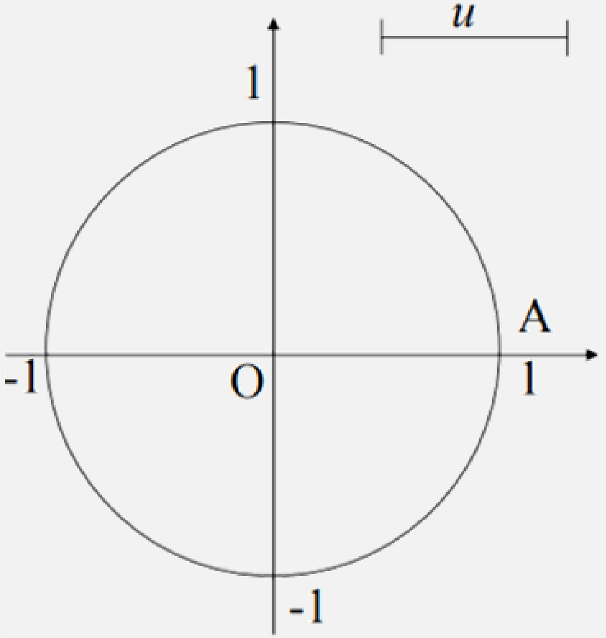
$$f : x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x \in [-1, +1]$$

Il **dominio** della funzione coseno è tutto $\mathbb{R}$ poiché un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica può percorrerla infinite volte compiendo infiniti giri
(ad ogni giro, l'angolo individuato aumenta di un'ampiezza pari a 2π)

Il **codominio** della funzione seno è l'intervallo $[-1, +1]$ poiché il minimo valore che può assumere l'ordinata del punto P è -1, mentre il massimo valore è $+1$

Funzione coseno

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione coseno assume un corrispondente valore numerico



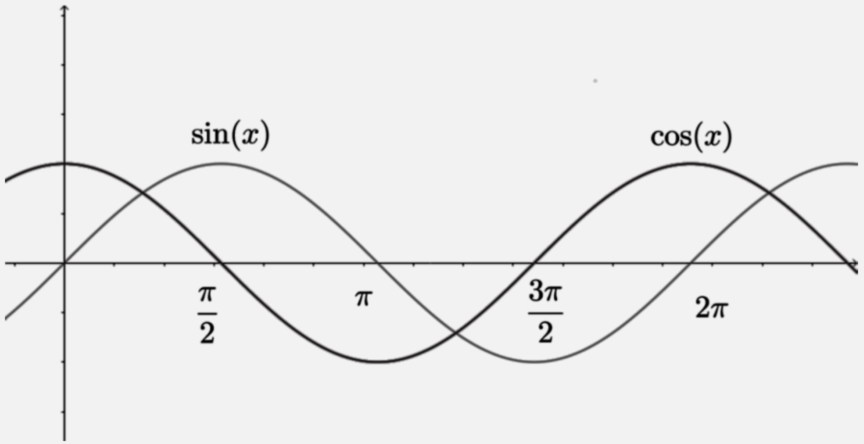
x	$\cos x$
0	1
$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\pi/2$	0
π	-1
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\pi/3$	1/2
$3/2\ \pi$	0
$2\ \pi$	1

Periodicità
Ogni giro (pari ad un arco che misura 2π) la funzione $\cos x$ assume gli stessi valori

→ La funzione seno è PERIODICA di periodo 2π:

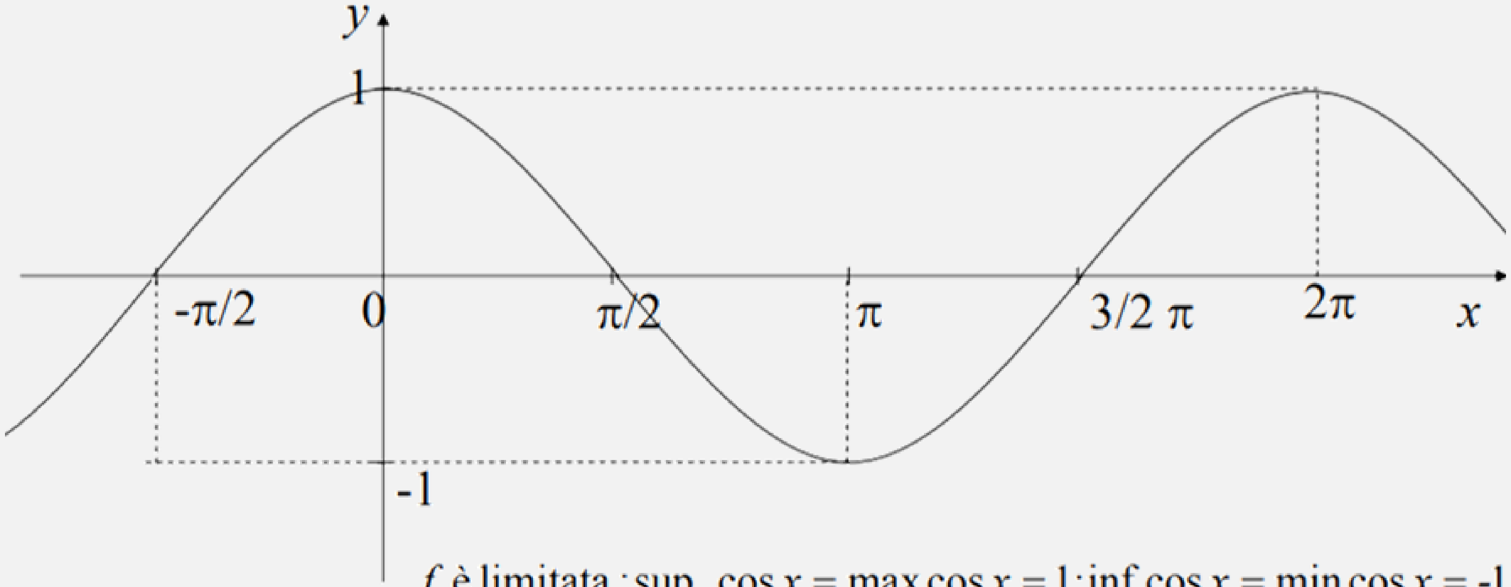
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\ , \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione $\cos x$ risulta uguale a $\sin x$ traslata di $\frac{\pi}{2}$: $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$



Punti importanti

- $(0,1) \rightarrow f(0) = 1$
- $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $(\pi, -1) \rightarrow f(\pi) = -1$
- $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) \rightarrow f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $(2\pi, 1) \rightarrow f(2\pi) = 1$



f è limitata : $\sup \cos x = \max \cos x = 1$; $\inf \cos x = \min \cos x = -1$

f strettamente crescente in $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

f strettamente decrescente in $[2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in Z$

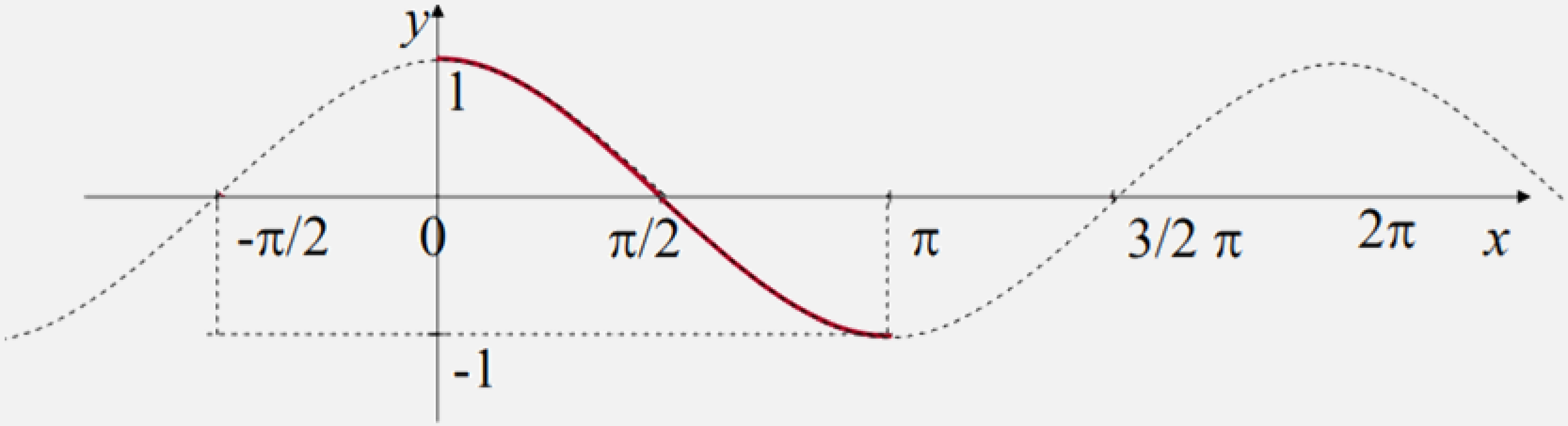
f pari : $\cos x = \cos(-x)$

$\Downarrow$

Non è invertibile su R!

Non invertibilità in $\mathbb{R}$

La funzione coseno non è invertibile su $\mathbb{R}$.
Se però, invece di considerare come dominio tutto $\mathbb{R}$ consideriamo solo una parte di esso e cioè l'intervallo $[0, \pi]$, allora in tale intervallo la funzione seno risulta strettamente crescente e quindi invertibile

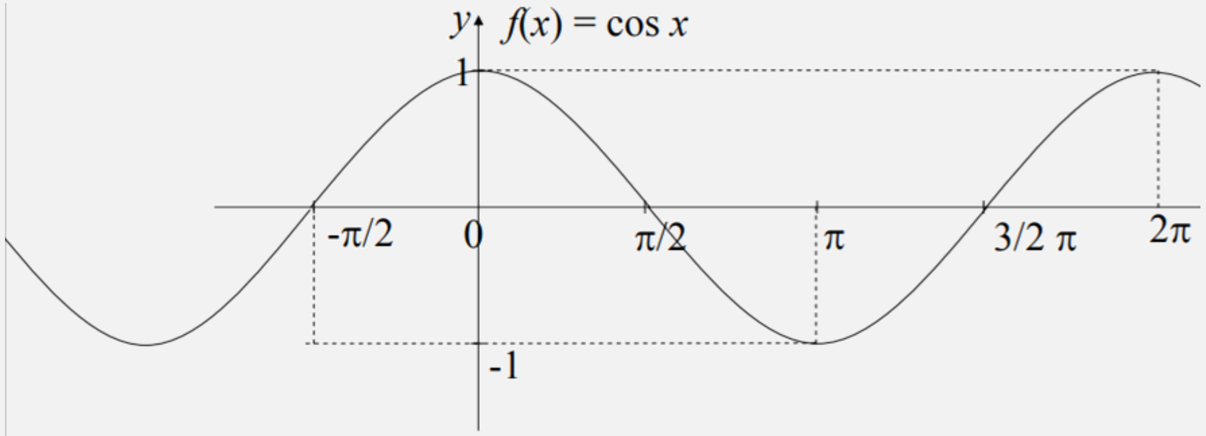


Funzione tangente

$$f(x) = \tan x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, con \cos x \neq 0$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \right\}$$

Il **dominio** della funzione coseno è tutto $\mathbb{R}$ privato dei valori x che annullano il coseno al denominatore



$$\cos x \neq 0 \text{ se } x \neq \dots, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

$$\Downarrow$$

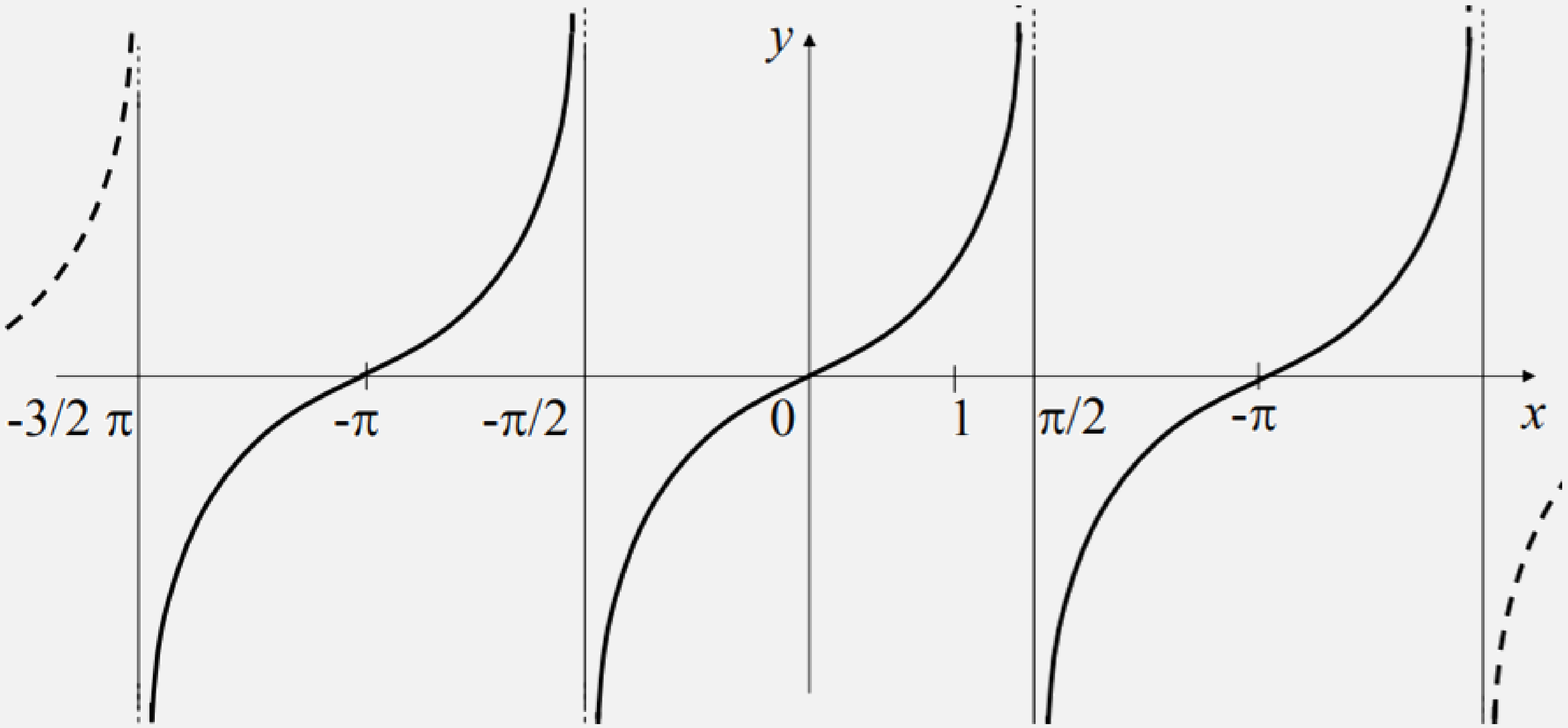
$$\cos x \neq 0 \text{ se } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

Funzione tangente

$$f(x) = \tan x = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, con \cos x \neq 0$$

$$f : x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots \right\} = f : x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \to \tan x \in \mathbb{R}$$

Il **codominio** della funzione tangente è tutto $\mathbb{R}$



Funzione tangente

Per ogni valore fissato dell'arco x, la funzione tangente assume un corrispondente valore numerico

x	$tan\ x$
0	0
$\pi/4$	1
$\pi/2$	/
π	0
$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi/3$	$\sqrt{3}$
$3/2\ \pi$	/
$2\ \pi$	0

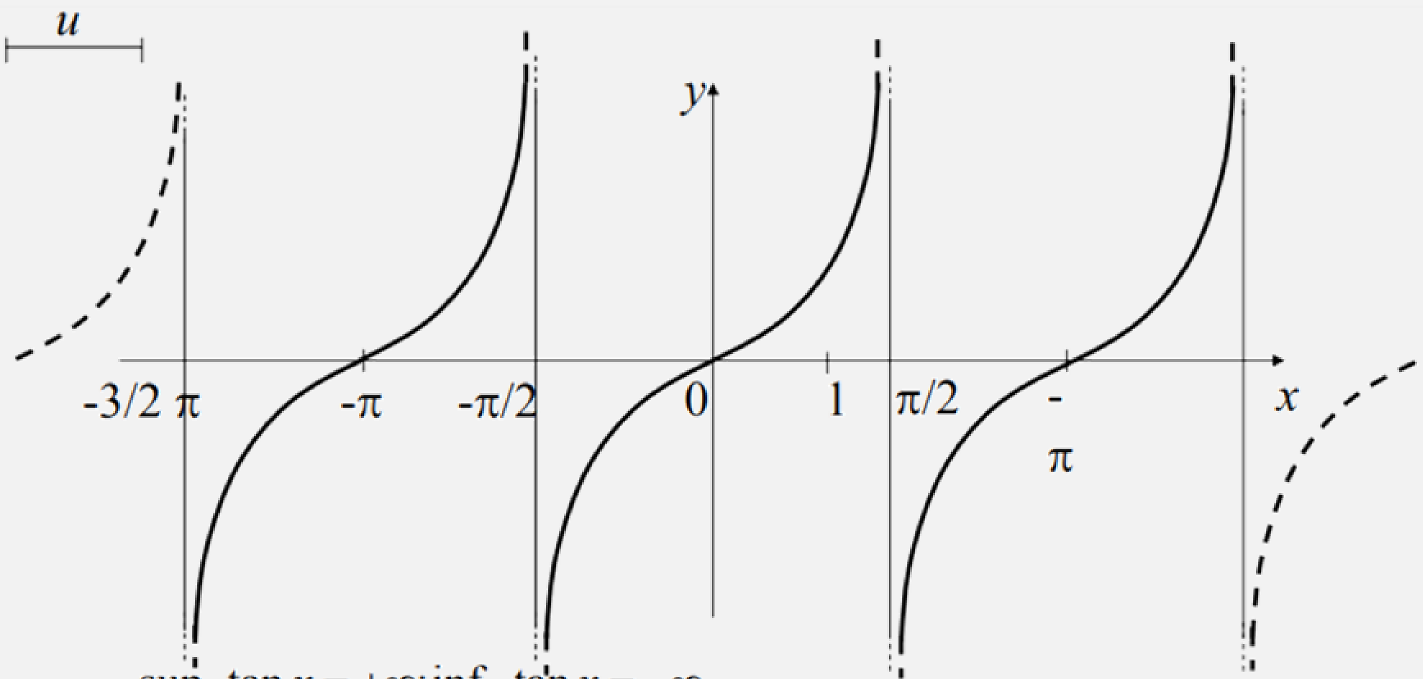
Periodicità
Ogni **mezzo** giro (pari ad metà arco che misura π) la funzione $\tan x$ assume gli stessi valori

→ La funzione seno è PERIODICA di periodo π:

$$\tan(x+\pi) = \tan x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Punti importanti

- $(0{,}0) \rightarrow f(0) = 0$
- $(\pi, 0) \rightarrow f(\pi) = 0$
- $(2\pi, 0) \rightarrow f(2\pi) = 0$



$\sup \tan x = +\infty; \inf \tan x = -\infty$

f strettamente crescente in $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right), \forall k \in Z$

f dispari: $-\tan x = \tan(-x)$

La funzione tangente è strettamente crescente in ciascuno degli intervalli

$$(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$$

Così, se invece di considerare come dominio tutto

$$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

consideriamo solo una parte di esso e cioè l'intervallo$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, allora in tale intervallo la funzione seno risulta strettamente crescente e quindi invertibile

Le funzioni trigonometriche, essendo periodiche, non sono iniettive

Tuttavia, sono strettamente crescenti o decrescenti in opportuni intervalli: le restrizioni in questi intervalli sono iniettive, quindi sono invertibili.

Per ciascuna funzione trigonometrica, si sceglie una **regione fondamentale**, cioè un insieme su cui la restrizione della funzione risulti iniettiva.

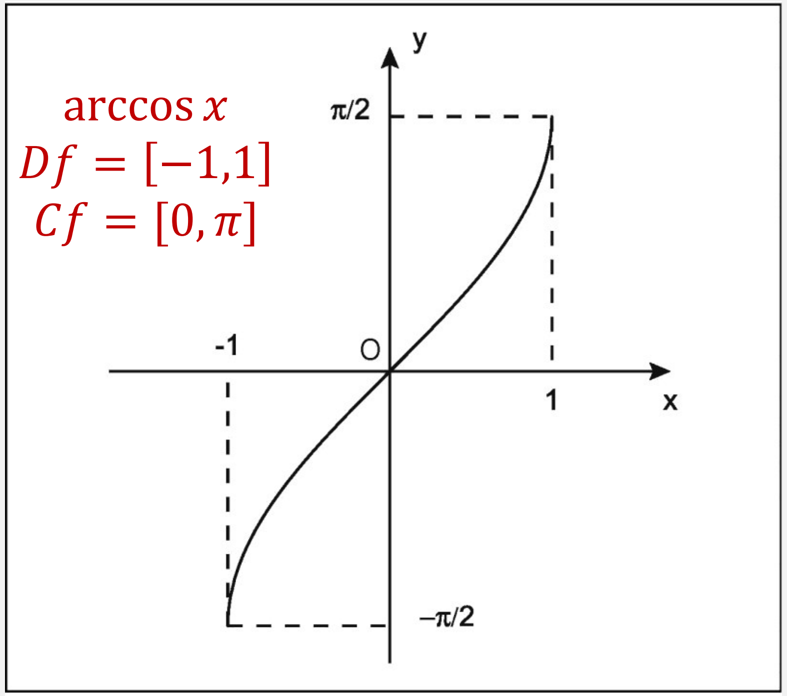
In ogni regione fondamentale, si può considerare la **funzione inversa** della funzione.

Funzione trigonometrica	*Regione fondamentale*	*Funzione inversa*
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arcsin x$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$\arctan x$

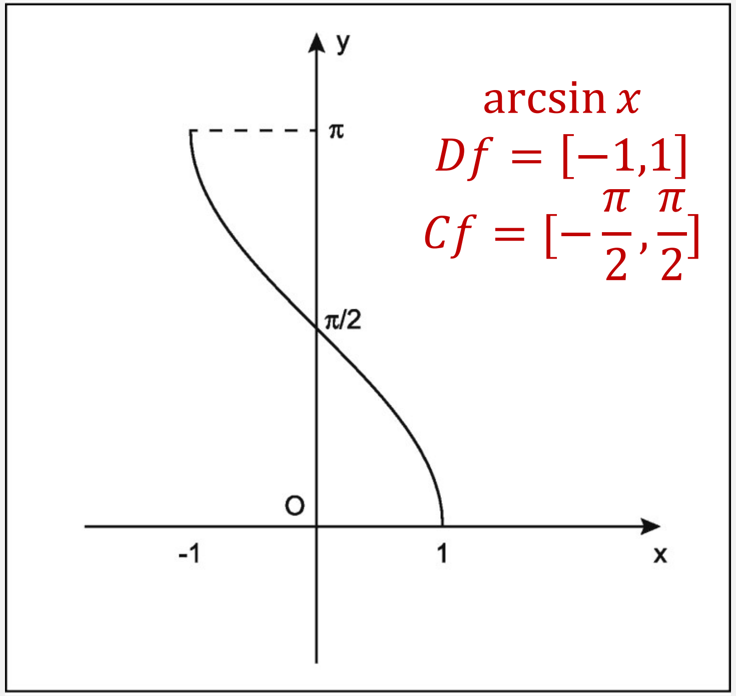
Valgono le seguenti identità (per tutte le funzioni trigonometriche):

$\arcsin(\sin x) = x, \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

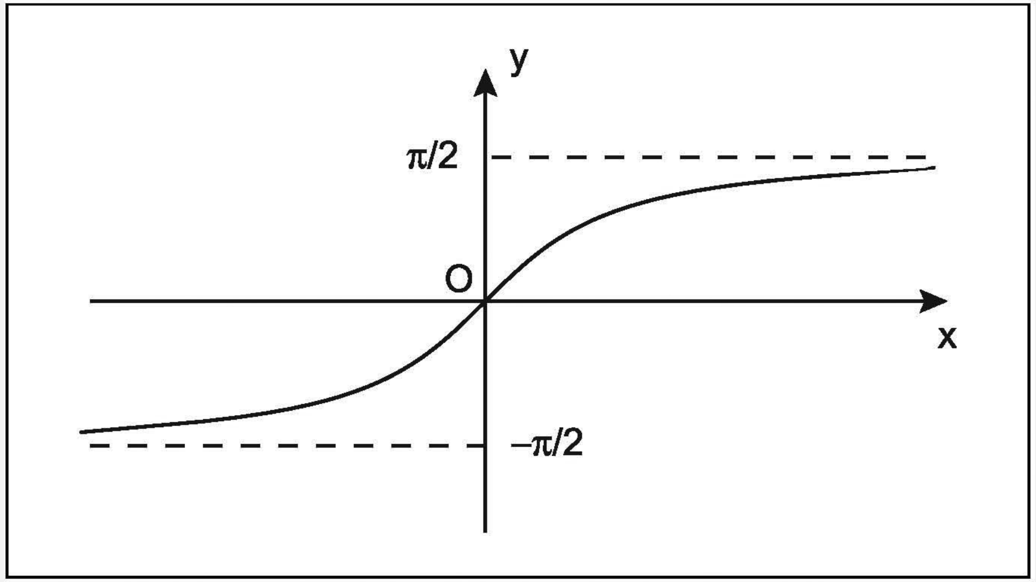
$\sin(\arcsin x) = x, \forall x \in [-1,1]$



$\arccos x$
$Df = [-1,1]$
$Cf = [0, \pi]$



$\arcsin x$
$Df = [-1,1]$
$Cf = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\arctan x$
$Df = \mathbb{R}$
$Cf = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$