- **LIMITI DI FUNZIONI**

1. Definizione «informale» di limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Supponiamo che $f : D \to \mathbb{R}$ sia definita per tutti gli x vicini a x_0 tranne che, eventualmente, per $x = x_0$

Diciamo che f tende al limite L quando x tende a x_0, se f assume valori $f(x)$ arbitrariamente vicini a L pur di prendere x sufficientemente vicino a x_0 (da entrambi i lati), escludendo $x = x_0$.

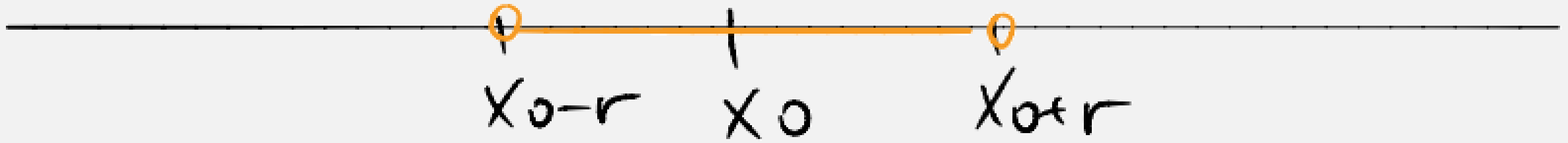
Richiamo: nozione di intorno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Consideriamo

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\},$$

l'intorno aperto di centro x_0, ossia l'insieme costituito da numeri $x \in \mathbb{R}$ tali che la loro distanza da x_0 sia minore di $r > 0$.

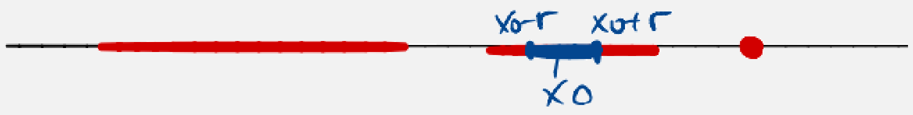


Richiamo: nozione di intorno

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

1. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **interno** ad A se:

$$\exists r > 0 : I_r(x_0) \subset \text{A}$$



Un punto interno è un punto per il quale esiste almeno un intorno interamente contenuto nell'insieme

Richiamo: nozione di intorno

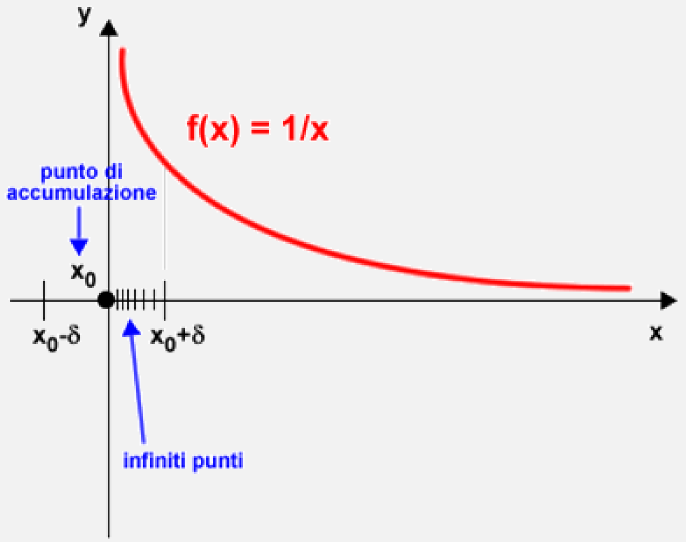
Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

2. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **punto di accumulazione** per A se:

$$\forall r > 0 \;\rightarrow A - \{x_0\} \cap I_r(x_0) \neq \emptyset$$

*Diremo che x_0 è punto di accumulazione di A se **ogni** intorno di x_0 contiene almeno un elemento di A diverso da x_0 stesso.*

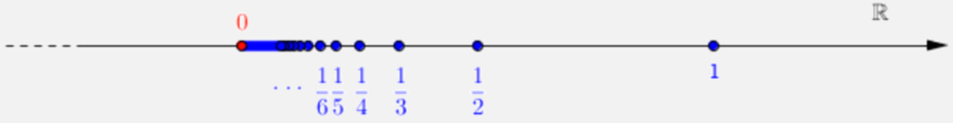
*Un punto di accumulazione è un punto nel cui intorno cadono **infiniti punti** di I_r distinti dal punto stesso*



- Un punto di accumulazione per A non deve appartenere per forza ad A. Per esempio, prendiamo l'insieme

$$A = \left\{ a \in \mathbb{R} \;\middle|\; a = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Questo insieme ammette come punto di accumulazione $x = 0$: infatti, comunque scelto un intorno $B_\varepsilon(0) = (-\varepsilon, \varepsilon)$ possiamo trovare un n tale che $\frac{1}{n} < \varepsilon$ (basta scegliere $n > \frac{1}{\varepsilon}$). Inoltre, $0 \notin A$, dato che nessuna frazione del tipo $\frac{1}{n}$ può essere uguale a 0.



L'insieme A è rappresentato in blu; 0 è un punto di accumulazione per A.

Richiamo: nozione di intorno

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $A \neq \emptyset$.

3. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **punto isolato** di A se:

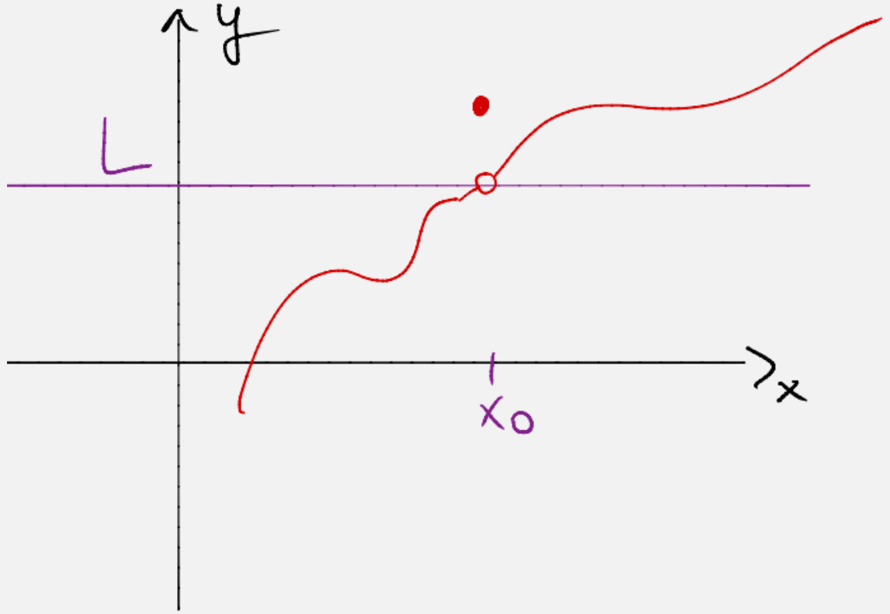
$$\exists r > 0 \ \rightarrow A \cap I_r(x_0) = \{x_0\}$$

Un punto isolato di un insieme A è un punto appartenente all'insieme per il quale esiste almeno un intorno completo del punto stesso tale da non contenere alcun punto dell'insieme A oltre ad x_0

4. Diciamo che $x_0 \in \mathbb{R}$ è **aderente** ad A se x_0 è d'accumulazione per A oppure x_0 è un punto isolato di A.

2. Definizione di limite con gli intorni

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



con

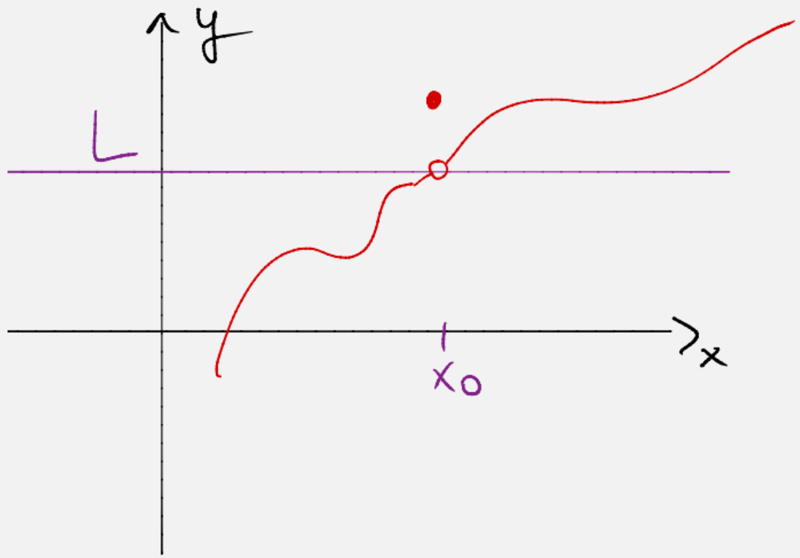
- $L \in \mathbb{R}$

Diremo che la funzione f tende al limite L per $x \to x_0$ se:

$$\forall I(L, \varepsilon), \varepsilon > 0 \; \exists \; I(x_0, \delta), \delta > 0 : \forall x \in (I(x_0, \delta) - \{x_0\}) \cap D \Longrightarrow f(x) \in I(L, \varepsilon)$$

3. Definizione «rigorosa» di limite

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$



Supponiamo:
- $D \subset \mathbb{R}$ e $f : D \to \mathbb{R}$
- x_0 punto di accumulazione per D
- $L \in \mathbb{R}$

Diremo che la funzione f tende al limite L per $x \to x_0$ se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Longrightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in D, 0 < |x - x_0| \leq \delta, (x \neq x_0) \; \Longrightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

Si impone che $x \neq x_0$ perché non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite

Casi dei limiti

Generale: Il limite per x che tende a x_0 di $f(x)$ è uguale a L se e solo se per ogni intorno di L esiste un intorno di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno di x_0 (escluso al più x_0), risulta che $f(x)$ appartiene all'intorno di L

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L \; \exists \; I_{x0} \; : \; \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in I_L$$

I casi possono vedere:

$$L = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

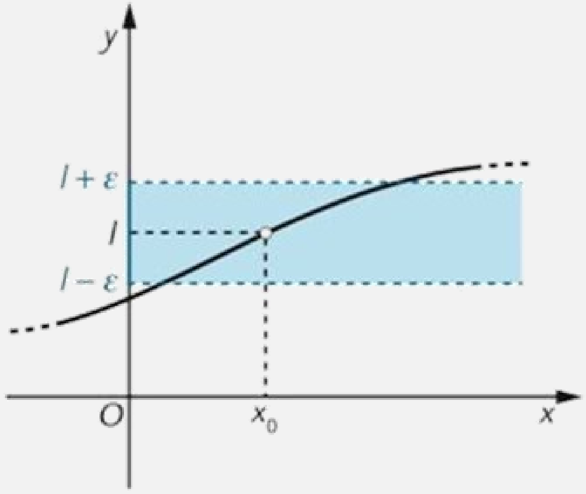
$$x_0 = \begin{cases} \in \mathbb{R} \to I_L = (L - \varepsilon, L + \varepsilon) \\ +\infty \to I_L \quad = (n, +\infty) \\ -\infty \to I_L = (-\infty, -n) \end{cases}$$

➢ Limite finito calcolato in un punto finito: $L, x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

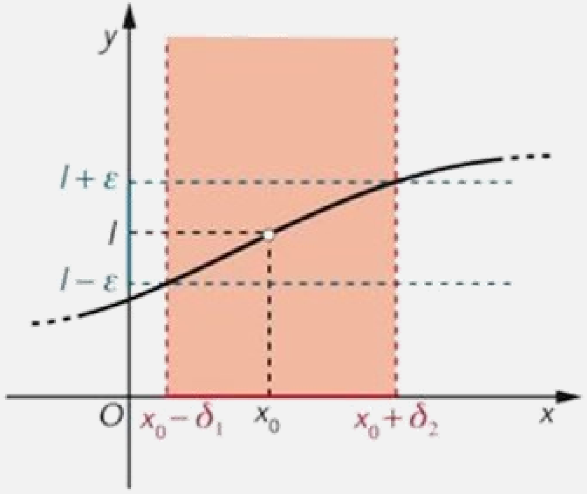
Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite il numero L, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε, si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \to L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

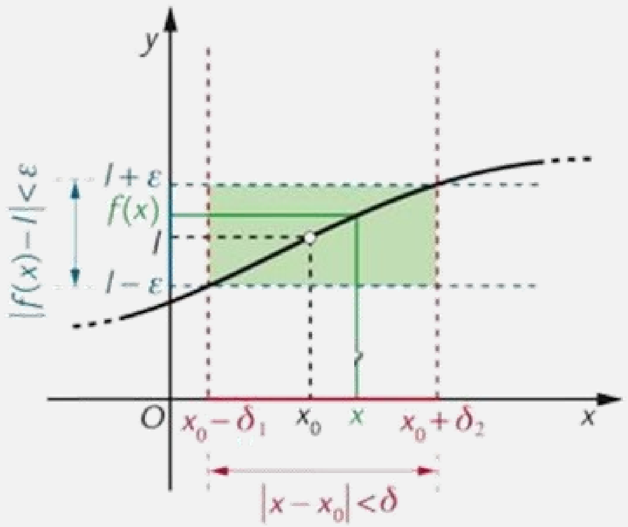
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, I_{x0} : \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



a. Per ogni $\varepsilon > 0$ (con la scelta di ε scegliamo un arbitrario intorno di l sull'asse y)...



b. ... esiste $\delta > 0$ (il quale individua un opportuno intorno di x_0 sull'asse x)...

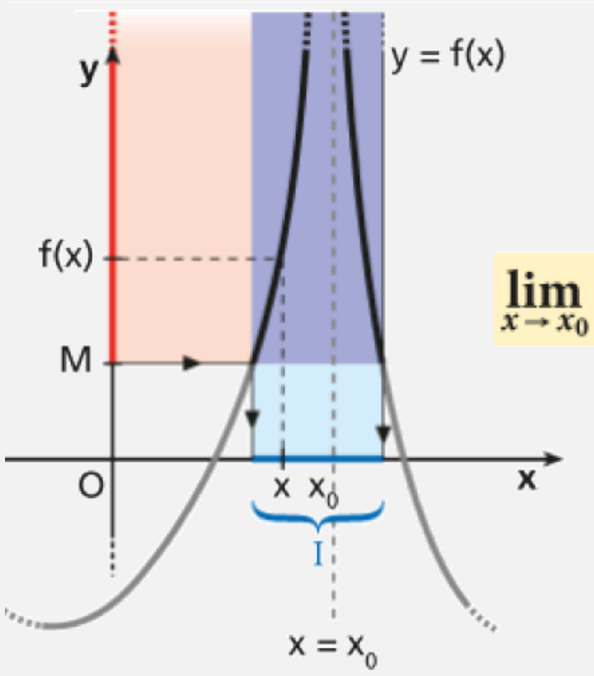


c. ... tale che per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $x \neq x_0$ risulta: $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$.

➢ Limite infinito calcolato in un punto finito: $L = \infty, x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 ha per limite ∞, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M, si può sempre determinare un intorno completo del punto x_0 tale che, per ogni x di tale intorno, risulti soddisfatta la disequazione:

$$|f(x)| > M$$



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall n > 0\ \exists\ I_{x0} :\ \forall x \in I_{x0} - \{x_0\} \Longrightarrow |f(x) - L| > M$$

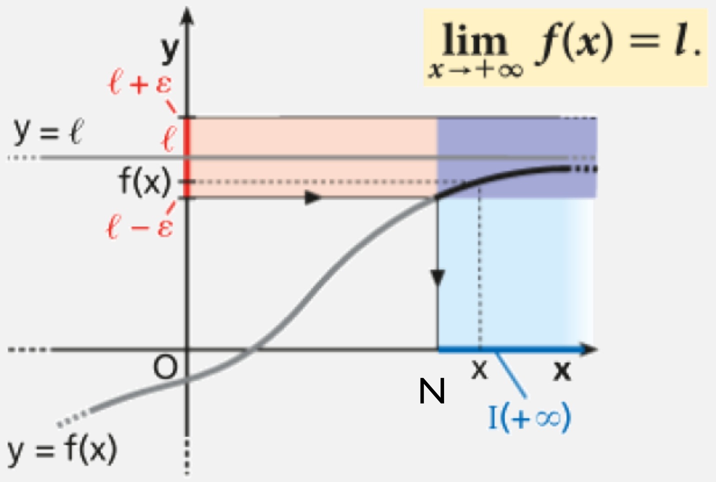
➢ Limite finito calcolato in un punto infinito:

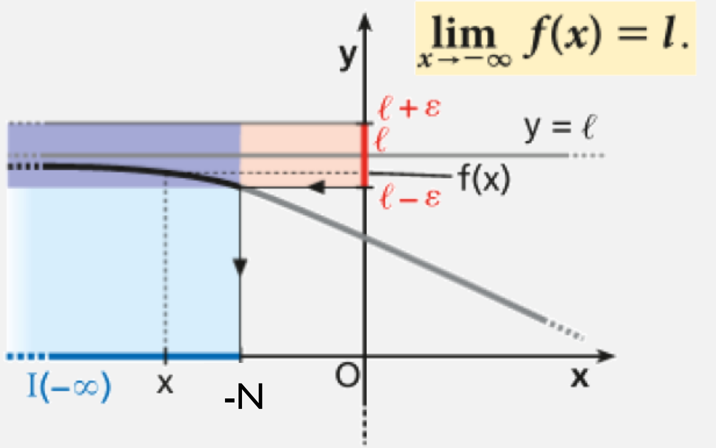
$L \in \mathbb{R}, x_0 = \infty \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite L, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo ε, si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; N > 0 : \; \forall x : |x| > N \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

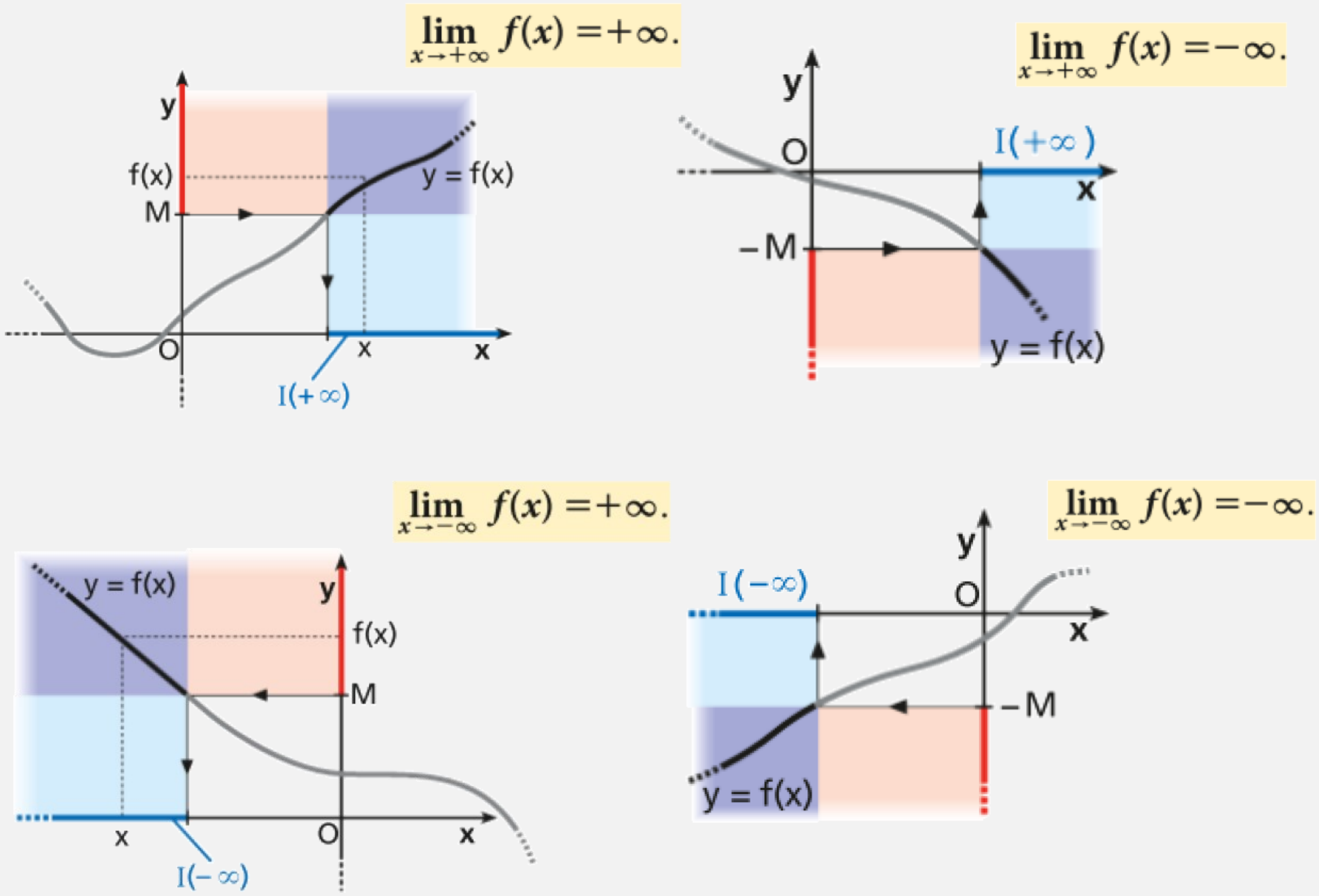




➢ Limite infinito calcolato in un punto infinito: $L, x_0 = \infty \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Sia una funzione $f(x)$ una funzione definita in un intervallo (a, b) escluso un punto x_0, si dice che la funzione $f(x)$ per x che tende all'infinito ha per limite l'infinito, quando in corrispondenza di un numero arbitrario positivo M, si può sempre determinare un numero $N > 0$ tale che, per ogni x che verifica la condizione $|x| > N$, risulta verificata la condizione:

$$|f(x)| > M$$



$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \; \exists \, N > 0 : \; \forall x : |x| > N \Longrightarrow |f(x)| > M$$

Teorema: Unicità del limite

Una funzione non può avere due limiti differenti; se:

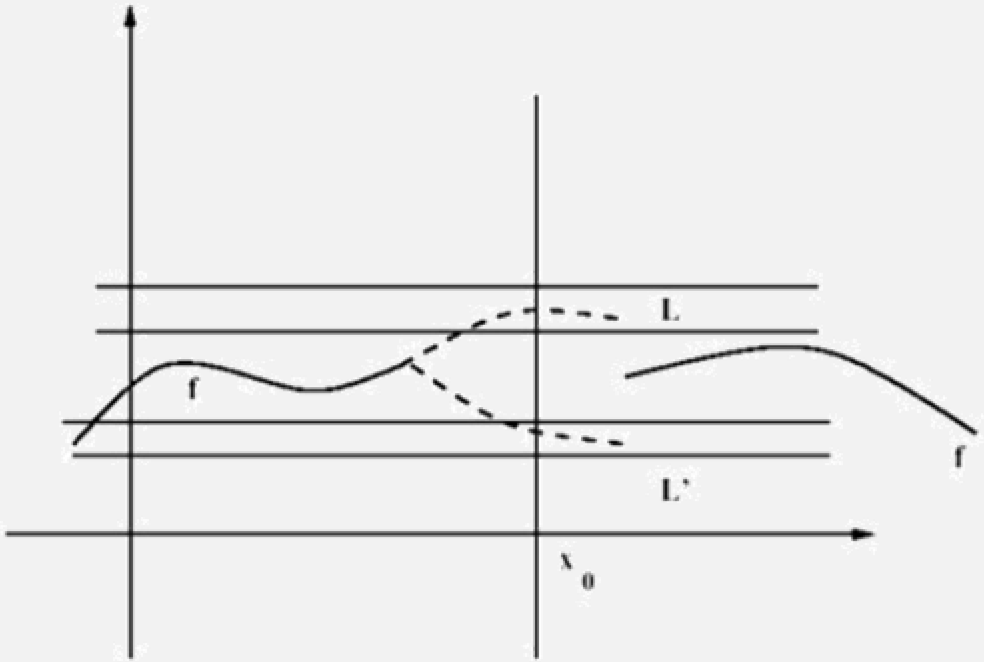
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \ \& \lim_{x \to x_0} f(x) = l' \to l = l'$$

Dimostrazione:
Se $l = l'$ posso scegliere due intorni di l e l' disgiunti:
$I_1 = I(l, \varepsilon_1), I_2 = I(l', \varepsilon_2), I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

$f(x)$ con $x \in I(x_0, \delta)$ a quale intorno apparterrebbe?

Si arriva a una contraddizione: dal punto di vista analitico, esiste δ_1 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1, f(x) \in I_1$$



Teorema: Unicità del limite

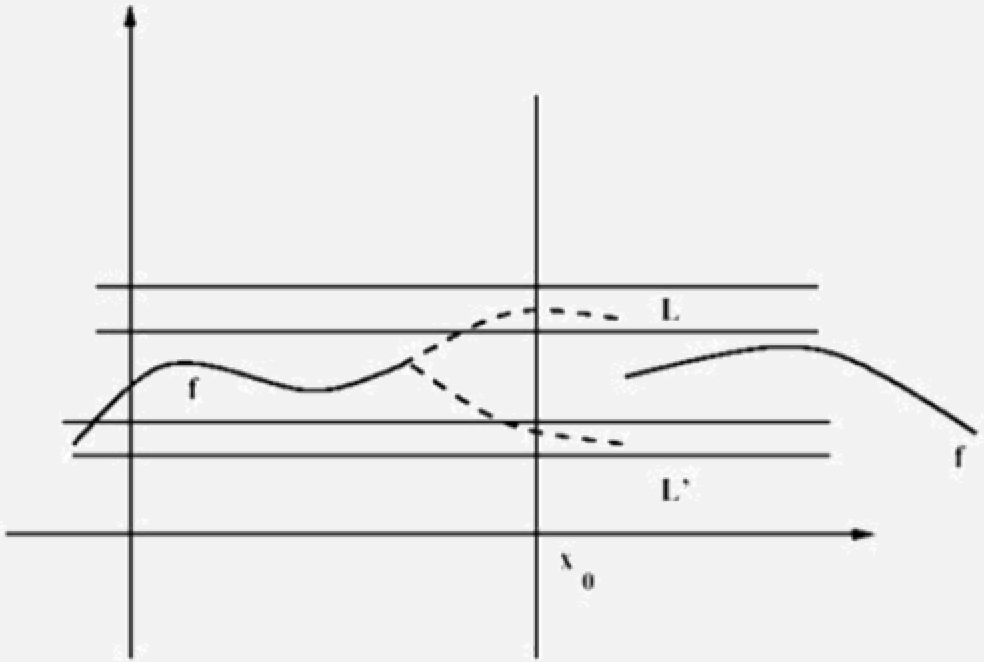
Analogamente, esiste δ_2 tale che per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \delta_2, f(x) \in I_2$$

Allora, per $x \in D_f$:

$$0 < |x - x_0| < \min\{\delta_1, \delta_2\}, f(x) \in I_1 \ \& \ f(x) \in I_2$$

Ma ciò è impossibile, perché $I_1 \cap I_2 = \emptyset$



Leggi dei limiti

Siano x_0 un punto di accumulazione di A e $c \in \mathbb{R}$ una costante,

$$f, g : A \rightarrow \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$$

Se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \& \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2, con\ l_1, l_2 \in \mathbb{R}$$

Allora:

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 + l_2$

2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) - \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 - l_2$

3. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to 0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = l_1 \cdot l_2$

Leggi dei limiti

4. $\lim_{x \to x_0} (f(x)/g(x)) = \dfrac{\lim_{x \to 0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = l_1/l_2, \quad l_2 \neq 0$

5. $\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to 0} f(x) = c \cdot l_2$

6. $\lim_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{\frac{p}{q}} = (\lim_{x \to x_0} f(x))^{\frac{p}{q}}, \quad p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$

7. Se esiste un intorno J di x_0 tale che: $\forall x \in D_f \cap J - \{x_0\}, f(x) \leq g(x)$, allora:

$$l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

Limite destro e limite sinistro

- Sia $x_0 = +\infty$: chiamiamo intorno aperto di x_0 una semiretta aperta $(a, +\infty)$ e intorno chiuso $[a, +\infty)$
- Sia $x_0 = -\infty$: chiamiamo intorno aperto di x_0 una semiretta aperta $(-\infty, a)$ e intorno chiuso $(-\infty, a]$
- Dato $a \subset \mathbb{R}$, diciamo che $+\infty$ è un punto di accumulazione di A se
$$A \cap (a, +\infty) \neq \emptyset \quad \forall a > 0$$
- Dato $a \subset \mathbb{R}$, diciamo che $\pm\infty$ è un punto di accumulazione di A se
$$A \cap (-\infty, a) \neq \emptyset \quad \forall a < 0$$

Definizione unificata di limite

Siano $x_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$, sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, sia x_0 punto di accumulazione per D_f.
Diciamo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 → $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, se per ogni intorno J di L esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$\forall x \in \left(I \cap D_f\right) - \{x_0\} \text{ si ha che: } f(x) \in J$$

Limite destro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (x_0, +\infty)$.

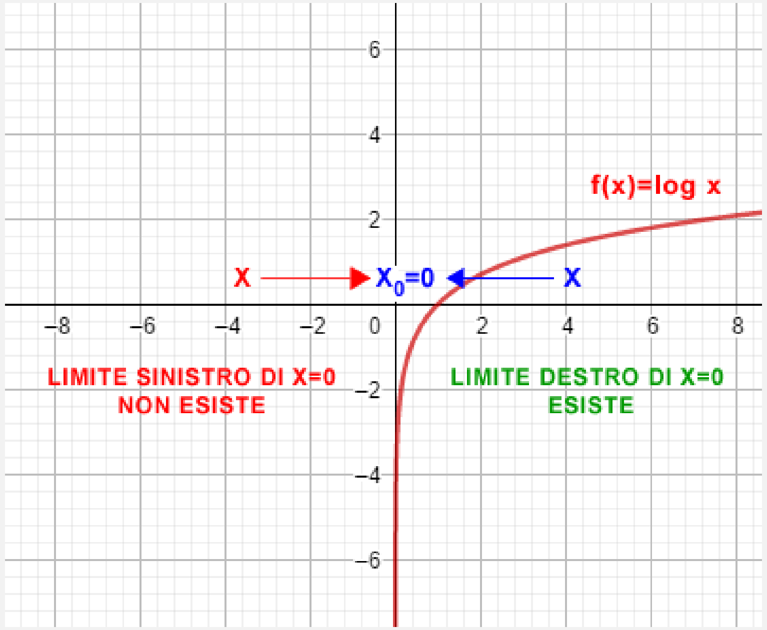
Se esiste il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $D_f \cap (x_0, +\infty)$, allora tale valore è detto **limite destro** di f in x_0, denotato:

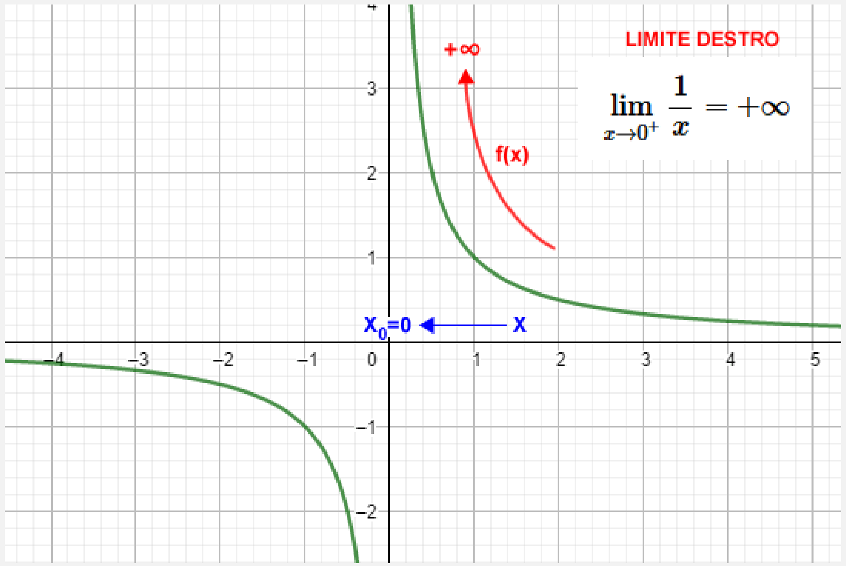
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \ \to \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$





Limite sinistro

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f : D_f \to \mathbb{R}$, si supponga x_0 punto di accumulazione per l'insieme $D_f \cap (-\infty, x_0)$.

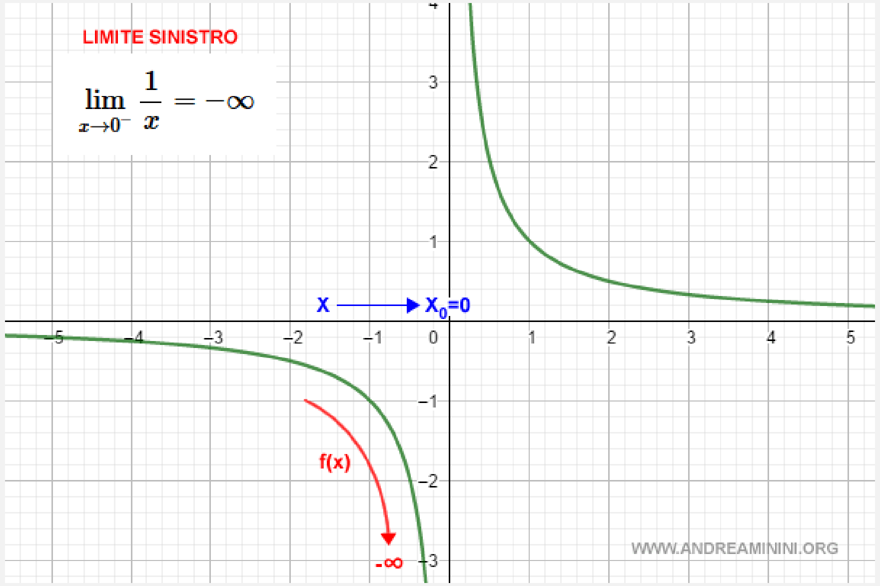
Se esiste il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $D_f \cap (-\infty, x_0)$, allora tale valore è detto **limite sinistro** di f in x_0, denotato:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Dicitura con i quantificatori (nel caso $L \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap D_f \ \to \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$



Limiti di funzioni polinomiali

Dalle regole di calcolo dei limiti, si deduce che esiste il limite per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ di ogni funzione polinomiale

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Tramite la definizione di limite, è facile verificare che:

$$\lim_{x \to x_0} a_0 = a_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_1 x = a_1 x_0, \qquad \lim_{x \to x_0} a_n x^n = a_n x_0$$

Quindi, in generale:

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n$$

Limiti del quoziente di due polinomi: funzioni razionali fratte

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \begin{matrix} 1.\, n > m \to \lim = \pm\infty \\ 2.\, n < m \to \lim = 0 \\ 3.\, n = m \to \lim = a_n/b_m \end{matrix}$$

Esempi.

1. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^2+3x^3}{2x^2-1+5x^3} = \frac{3}{5} \to n = m$

2. $\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^3+2}{12x^4-x+7} = 0^- \to n < m$

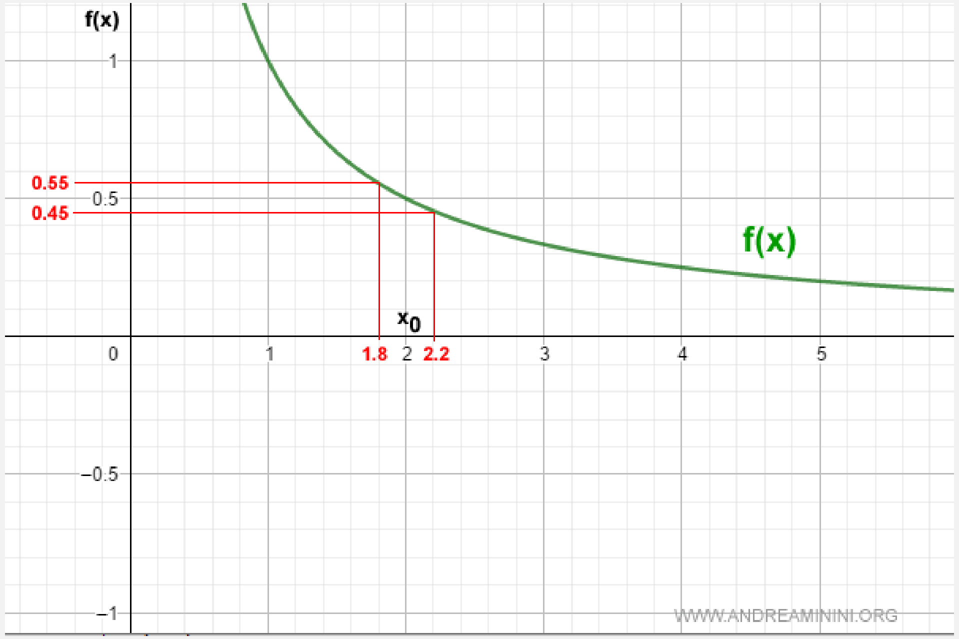
3. $\lim_{x\to1^\pm} \frac{x^3-7x+1}{x^2-1} = \frac{-3}{0} = \pm\infty \to n > m$

Teorema: Permanenza del segno

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L > 0$, allora esiste I intorno di x_0 tale che:

$$f(x) > 0 \; \forall x \in I - \{x_0\} \cap D_f$$

Data una funzione $f(x)$ definita e continua in un intorno del punto x_0. Se $f(x_0) > 0$ allora esiste un numero $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per ogni x nell'intorno $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Sia la funzione: $f(x) = \frac{1}{x}$.

Nel punto $x_0 = 2$ la funzione $f(x_0) = 0.5 \rightarrow f(2) = 0.5$

Considero un intorno di $x_0 = 2$ con $\delta = 0.2$:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = (2 - 0.2, 2 + 0.2) = (1.8, 2.2)$$

Nell'intorno $(1.8, 2.2)$ la funzione è sempre maggiore di zero:

$$f(1.8) = \frac{1}{1.8} = 0.55$$

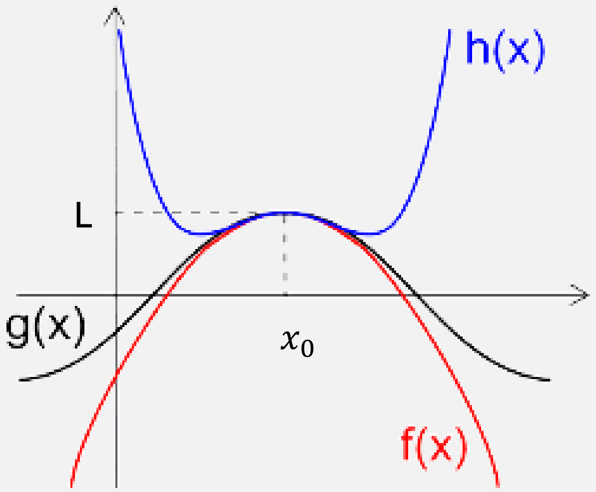
$$f(2.2) = \frac{1}{2.2} = 0.45$$

Teorema dei due carabinieri / del confronto per i limiti

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che in un intorno I del punto x_0 si abbia:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I - \{x_0\}$$

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$, allora anche g ammette limite per $x \rightarrow x_0$ e si ha $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$



Sia $\varepsilon > 0$, da $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ deriva che $\exists \delta_1 > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_1$

Analogamente, $\exists \delta_2 > 0 : |h(x) - L| < \varepsilon$ per $0 < |x - x_0| < \delta_2$

Scelto $\bar{\delta} = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, per $0 < |x - x_0| < \bar{\delta}$, allora: $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$ & $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

Quindi, per $0 < |x - x_0| < \min\{\bar{\delta}, r\} = \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$, da cui deriva:

$$|g(x) - L| < \varepsilon \rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

Richiamo: funzioni monotone

Una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ si dice:

- Monotona non decrescente o **monotona crescente** se
$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

- Monotona non crescente o **monotona decrescente** se
$$\forall x, y \in D_f : x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

- Strettamente crescente se
$$\forall x, y \in D_f : x < y \implies f(x) < f(y)$$

- Strettamente decrescente se
$$\forall x, y \in D_f : x < y \implies f(x) > f(y)$$

Teorema: limiti di funzioni monotone

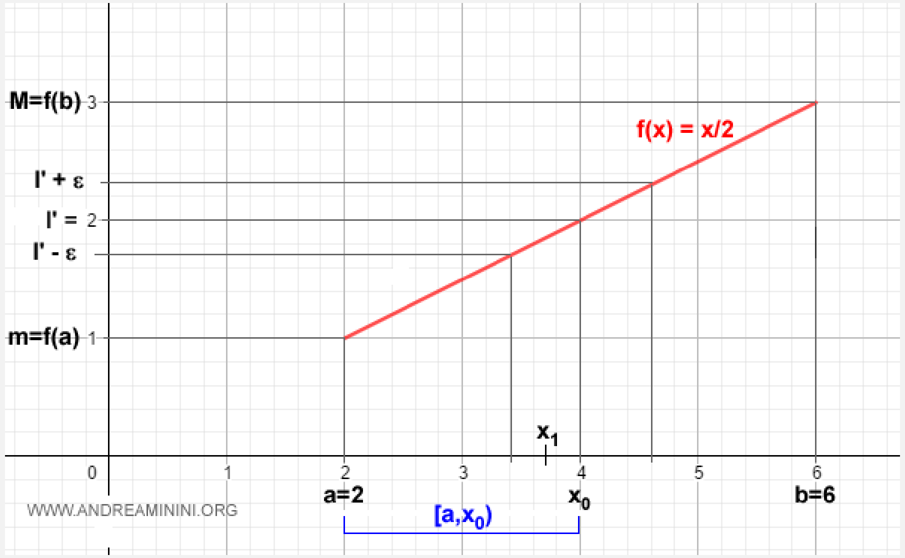
Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$ una <u>funzione crescente</u> e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione per D_f. Allora:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ e si ha:}$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D_f, x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D_f, x > x_0\}$$

Analogamente per le funzioni decrescenti



Infiniti e infinitesimi

Sia f un funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) fatta eccezione per un punto $x_0 \in I$ (con x_0 punto al finito o all'infinito),

- Si dice che f è **infinitesima** per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad oppure \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

- Si dice che f è **infinita** per $x \to x_0$ oppure $x \to \pm\infty$ se risulta che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \quad oppure \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Forme indeterminate

Le forme indeterminate sono operazioni che coinvolgono infiniti e infinitesimi nel calcolo dei limiti per le quali non è possibile determinare un risultato a priori:

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty^0$$

Non sono forme indeterminate:

$$k + \infty = +\infty$$
$$k - \infty = -\infty$$
$$\infty + \infty = \infty$$
$$k \cdot \infty = \infty$$
$$\infty \cdot \infty = \infty$$
$$\frac{k}{\infty} = 0$$
$$\frac{0}{\infty} = 0$$
$$\frac{\infty}{k} = \infty$$
$$\frac{k}{0} = \infty$$

Forme indeterminate

È necessario risolvere le forme indeterminate.

$$\lim_{x \to \pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$$

Raccogliere la x di grado massimo

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Raccogliere la x di grado massimo al numeratore e al denominatore; semplificare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$$

Scomporre numeratore e denominatore; semplificare

Forme indeterminate

È necessario risolvere le forme indeterminate.

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

Ricordando che: $\left(\sqrt{A} - \sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A} + \sqrt{B}\right) = A - B$, moltiplicare e dividere per $\sqrt{A} + \sqrt{B}$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = +\infty - \infty$$

Ricordando che: $\left(\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}\right)\left[\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right] = A - B$,

Moltiplicare e dividere per $\left(\sqrt[3]{A}\right)^2 + \sqrt[3]{AB} + \left(\sqrt[3]{B}\right)^2$

Forme indeterminate

Soluzione alternativa più rapida ai primi due casi:

$$\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$$

Sostituire $+\infty$ o $-\infty$ al monomio di grado massimo e trascurare gli altri termini del polinomio

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Se il polinomio al numeratore è di grado maggiore, il risultato è $\pm\infty$, a seconda dei segni.
Se i gradi sono uguali, il risultato è il rapporto tra i coefficienti dei monomi di grado massimo.
Se il denominatore è di grado maggiore, il risultato è zero.

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x\to\pm\infty} polinomio = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = 2\cdot(+\infty)^3 - (+\infty)^2 + 3 = 2\cdot(+\infty) - (+\infty) + 3 = +\infty - \infty$$

la forma indeterminata $+\infty - \infty$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo del polinomio, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3}\right) = (+\infty)^3\cdot\left(2 - \frac{1}{+\infty} + \frac{3}{(+\infty)^3}\right) =$$

$$= +\infty\cdot(2 - 0 + 0) = +\infty\cdot 2 = +\infty$$

Soluzione alternativa più rapida:

$$\lim_{x\to+\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = 2\cdot(+\infty)^3 = 2\cdot(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - x^2 + 3 = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = 2\cdot(-\infty)^3 = 2\cdot(-\infty) = -\infty$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \frac{(+\infty)+2}{2 \cdot (+\infty)^2 - 5} = \frac{+\infty}{2 \cdot (+\infty) - 5} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve raccogliendo la x di grado massimo al numeratore e al denominatore:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{2x^2-5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot \left(1+\frac{2}{x}\right)}{x^2 \cdot \left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x \cdot \left(2-\frac{5}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{2}{(+\infty)}}{(+\infty) \cdot \left(2-\frac{5}{(+\infty)^2}\right)} = \frac{1}{(+\infty) \cdot 2} = \frac{1}{(+\infty)} = 0$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{polinomio}{polinomio}=\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Soluzione alternativa più rapida: polinomio al numeratore grado maggiore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5-3x+2}{2x^2+4}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+2x-5}{x-4}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5-3x+2}{2x^2+4}=-\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4+5x^3}{x^3+2x^2-1}=+\infty$$

Soluzione alternativa più rapida: numeratore e denominatore stesso grado

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7x^3-3x+2}{2x^3+4}=\frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+2}{4x-2x^2-1}=-\frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^3-3x+2}{2x^3+4}=\frac{7}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-x+2}{4x-2x^2-1}=-\frac{3}{2}$$

Soluzione alternativa più rapida: polinomio al denominatore grado maggiore

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^3-3x+1}{2x^4+4}=0 \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{2x^3+4}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3-3x+1}{2x^4+4}=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x+1}{-2x^2+4x+3}=0$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{polinomio}{polinomio} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si risolve scomponendo numeratore e denominatore e poi semplificando:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1) \cdot (x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Forme indeterminate: esempi

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{A} - \sqrt{B} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) = \sqrt{3\cdot(+\infty)} - \sqrt{(+\infty)} = \sqrt{+\infty} - \sqrt{+\infty} = +\infty - \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(3x+1) - x}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \frac{2\cdot(+\infty)+1}{\sqrt{3\cdot(+\infty)+1} + \sqrt{(+\infty)}} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

la forma indeterminata $\frac{+\infty}{+\infty}$ si risolve applicando la tecnica vista in precedenza, cioè:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x}\cdot\left[\sqrt{3+\frac{1}{x}}+1\right]} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{x}}+1} = \frac{\sqrt{+\infty}\cdot\left(2+\frac{1}{(+\infty)}\right)}{\sqrt{3+\frac{1}{(+\infty)}}+1} = \frac{+\infty}{\sqrt{3}+1} = +\infty$$

Limiti di funzioni continue

Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo I (limitato o illimitato) e sia x_0 un punto appartenente all'intervallo $x_0 \in I$

Si dice che f è **continua** nel punto x_0 se:

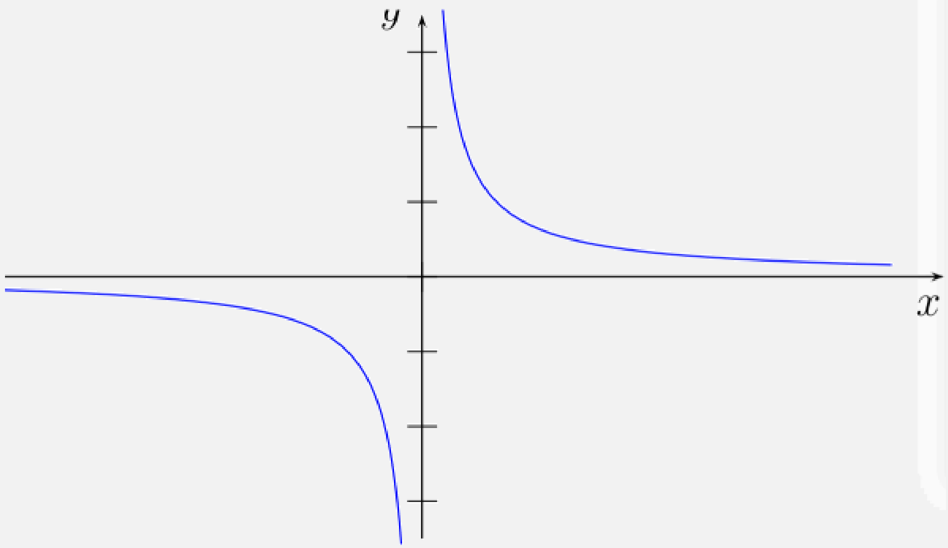
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Quindi, si dice che f è continua in un punto x_0 interno al proprio intervallo di definizione se:

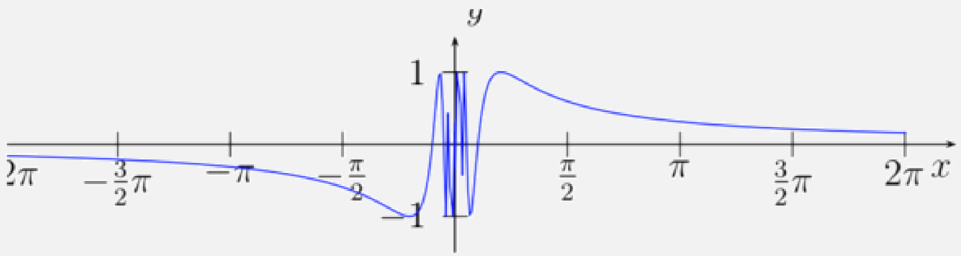
- $\exists f(x_0)$
- $\exists$ finito il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$
- Il limite coincide con il valore $f(x_0)$ di f nel punto x_0

Limiti di funzioni continue

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \text{ è continua su } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ è continua su } \operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



Limiti di funzioni continue

- Se si verifica solo che:

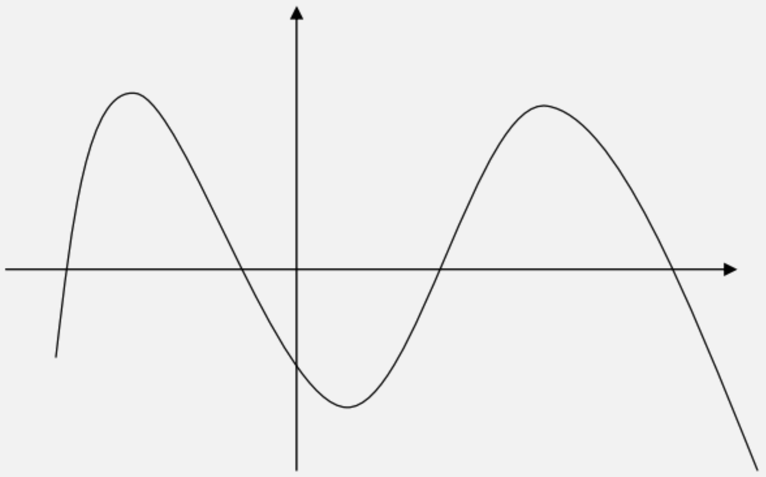
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Allora si dice che la funzione è **continua a destra**

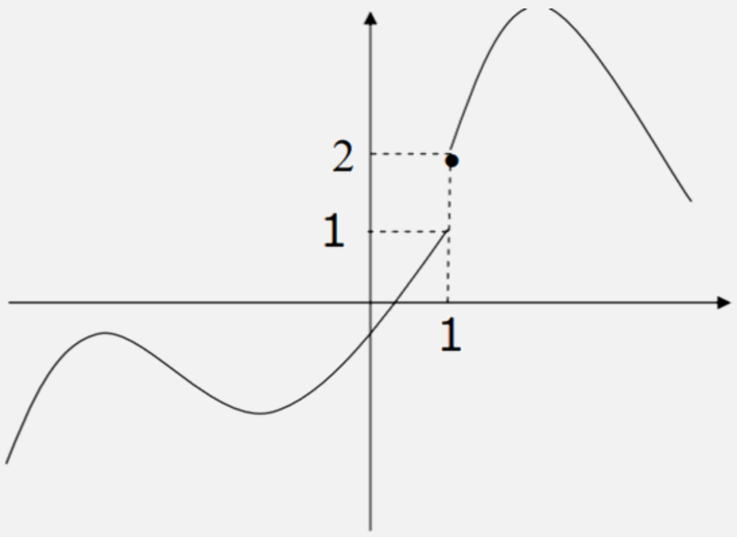
- Se si verifica solo che:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Allora si dice che la funzione è **continua a sinistra**



Funzione continua



Funzione non continua

Limiti di funzioni continue

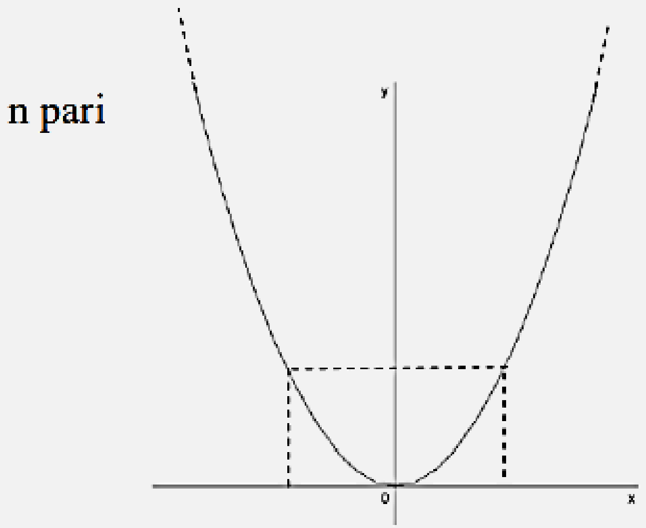
Tutte le funzioni elementari che abbiamo presentato sono continue nel proprio dominio.
La somma, prodotto, rapporto composizione, di funzioni continue è ancora una funzione continua.

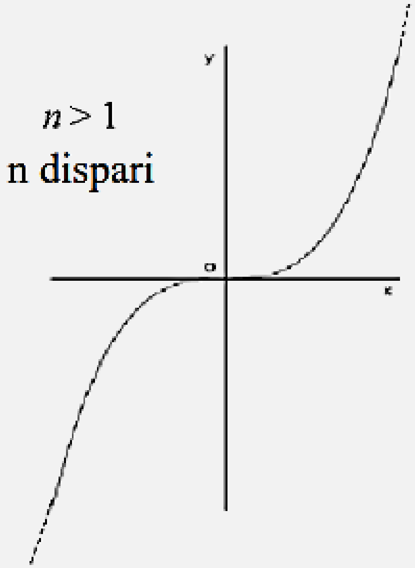
$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^r, && r \in \mathbb{R},\\
f(x) &= a^x, && a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\\
f(x) &= \log_a(x), && a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\},\\
f(x) &= \sin(x),\\
f(x) &= \cos(x),\\
f(x) &= \tan(x)\\
f(x) &= \arcsin(x),\\
f(x) &= \arccos(x),\\
f(x) &= \arctan(x)
\end{aligned}
$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione potenza con esponente intero

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$





n *pari*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$

n *pari*

$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

n *dispari*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

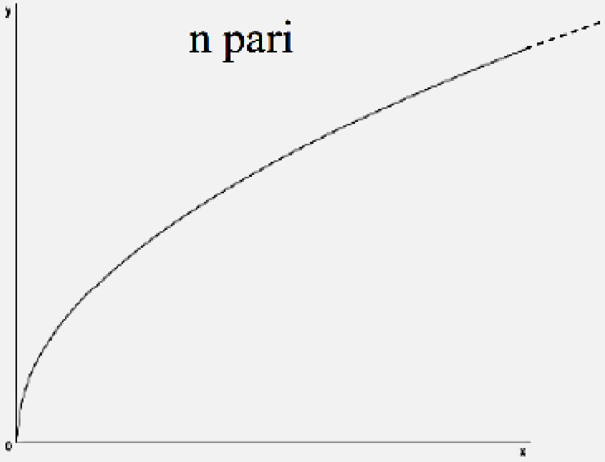
n *dispari*

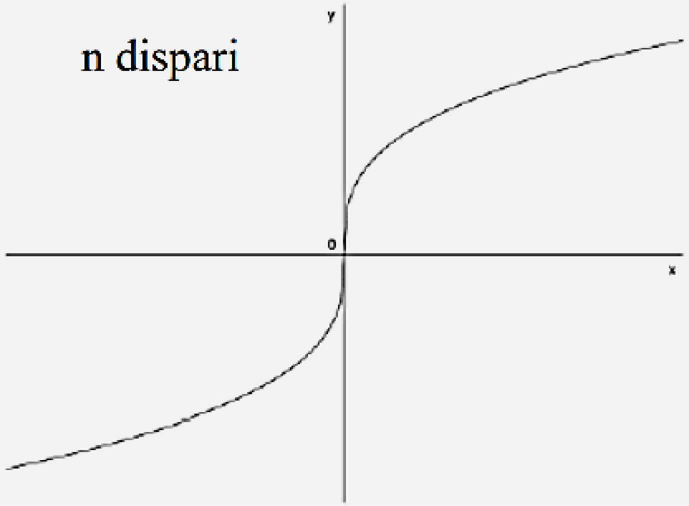
$$\lim_{x \to 0} x^n = 0$$

Limiti di funzioni elementari

<u>Funzione radice ennesima</u>

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty,$$
$\forall n \in \mathbb{N}$





$n\ pari$

$$\nexists \lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x}$$

$n\ dispari$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty$$

$n\ pari$

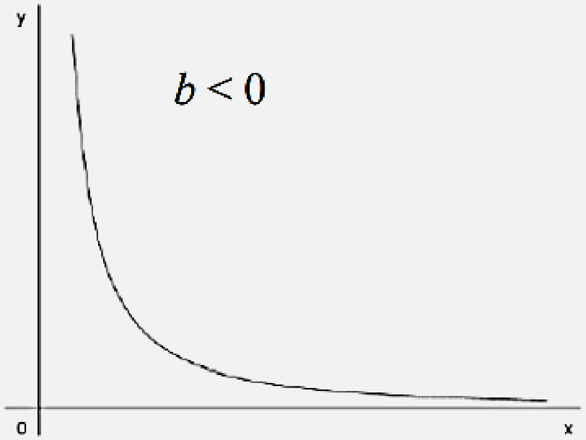
$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt[n]{x} = 0^+$$

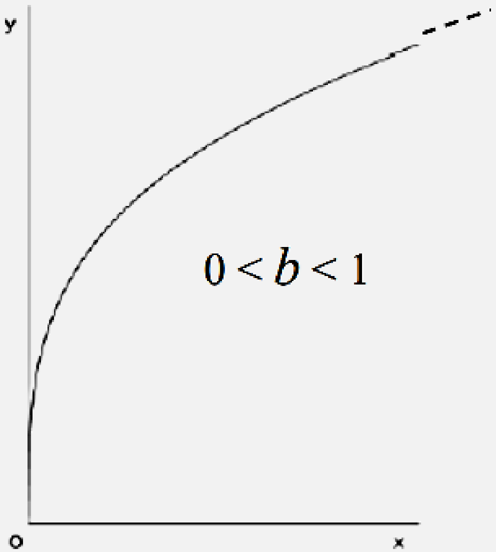
$n\ dispari$

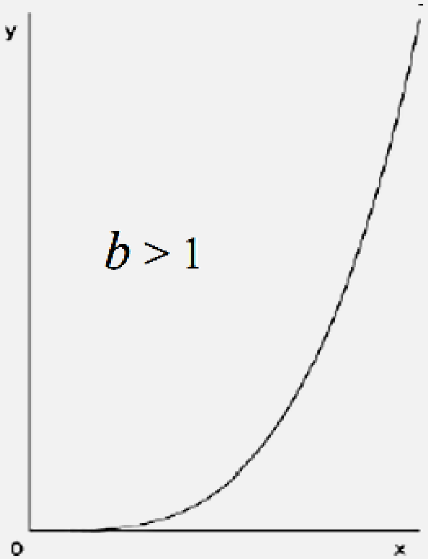
$$\lim_{x \to 0} \sqrt[n]{x} = 0$$

Limiti di funzioni elementari

<u>Funzione potenza con esponente reale</u>







$$\lim_{x \to +\infty} x^b = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} x^b = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0} x^b = 0$$

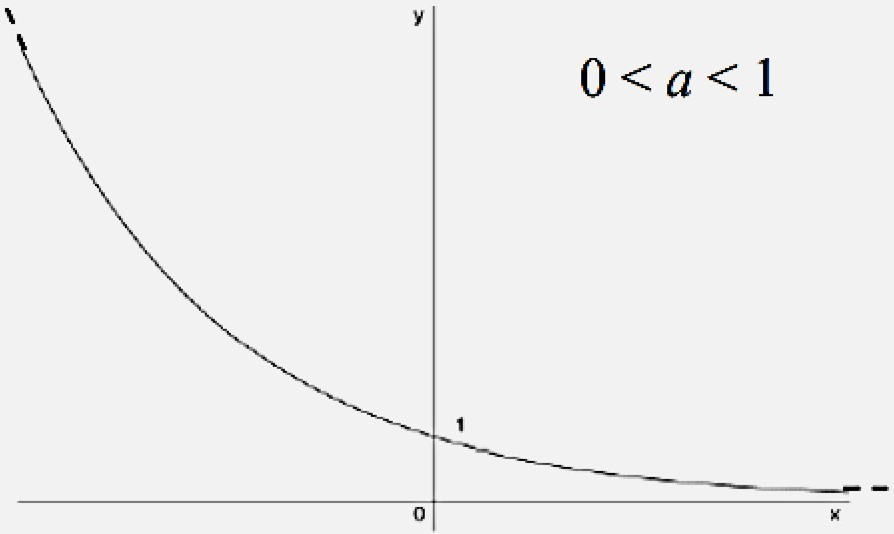
$$\lim_{x \to +\infty} x^b = +\infty$$

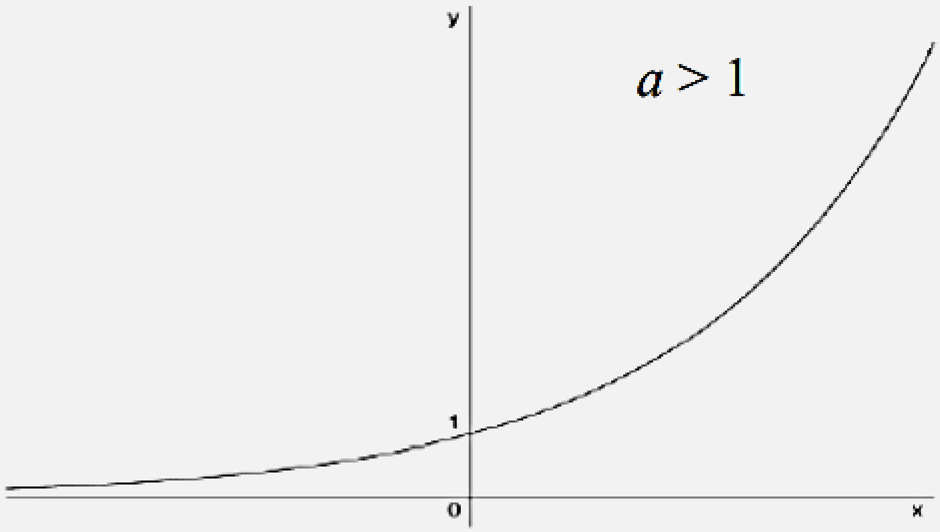
$$\lim_{x \to 0} x^b = 0$$

Continuità in zero

Limiti di funzioni elementari

<u>Funzione esponenziale</u>





$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$

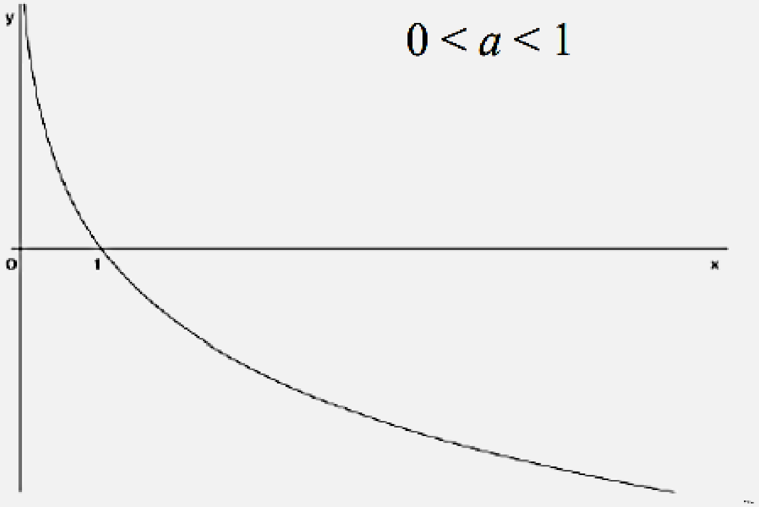
$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

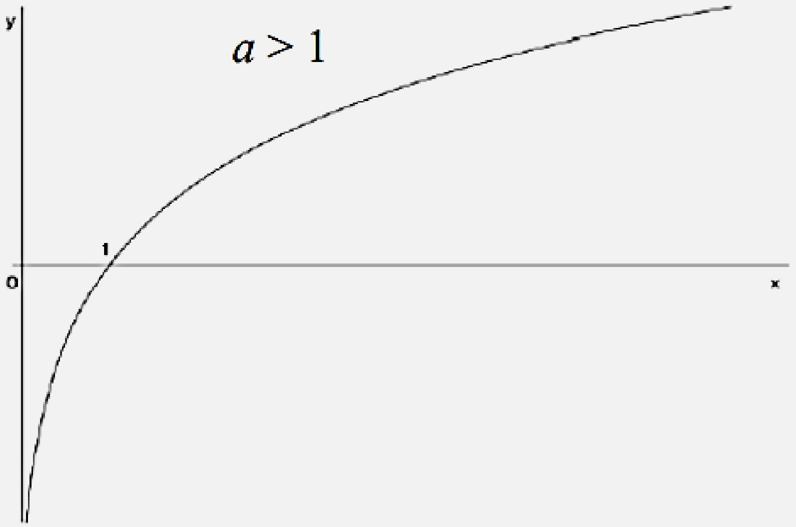
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione logaritmo





$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$

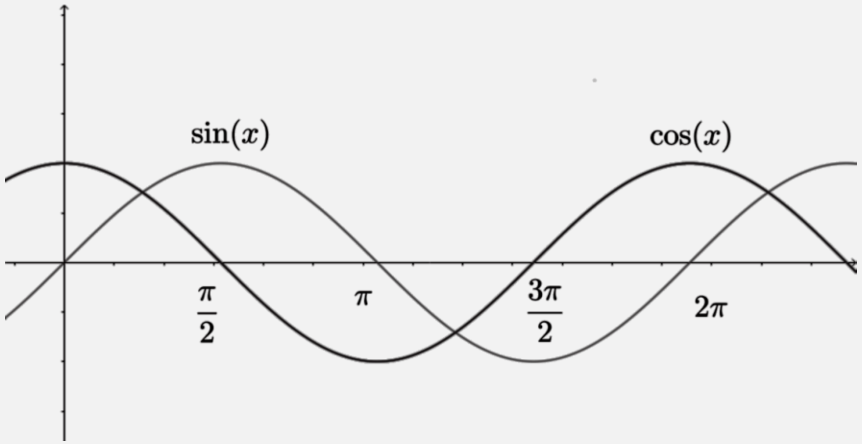
Limiti di funzioni elementari

<u>Funzione seno / coseno</u>

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin x$$

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos x$$

Pur non esistendo, tali limiti rappresentano qualcosa di limitato (finito) poiché sia la funzione seno che la funzione coseno assumono valori nell'intervallo chiuso e limitato [-1,1]



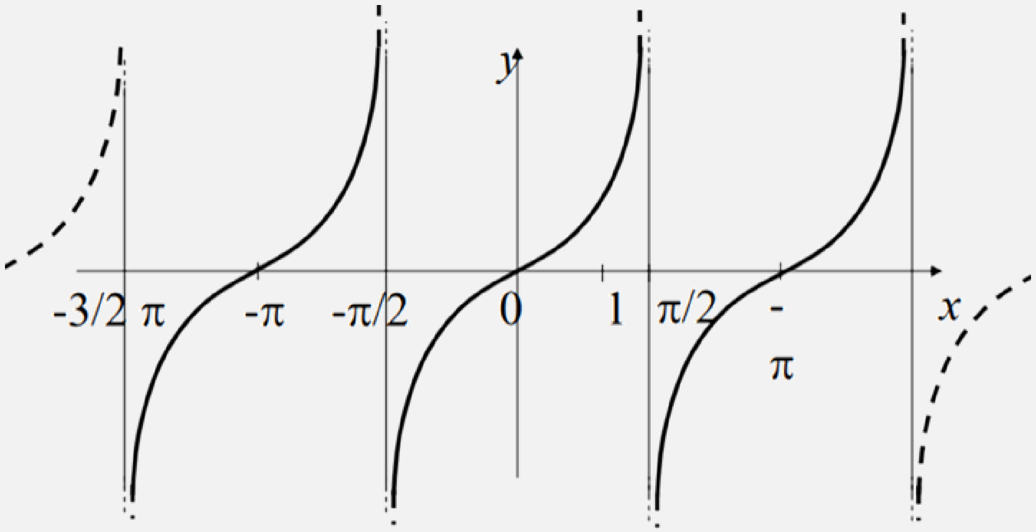
$$\lim_{x \to 0} \sin x = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1 \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

Limiti di funzioni elementari

Funzione tangente

$$\nexists \lim_{x\to\pm\infty} \tan x$$



$$\lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

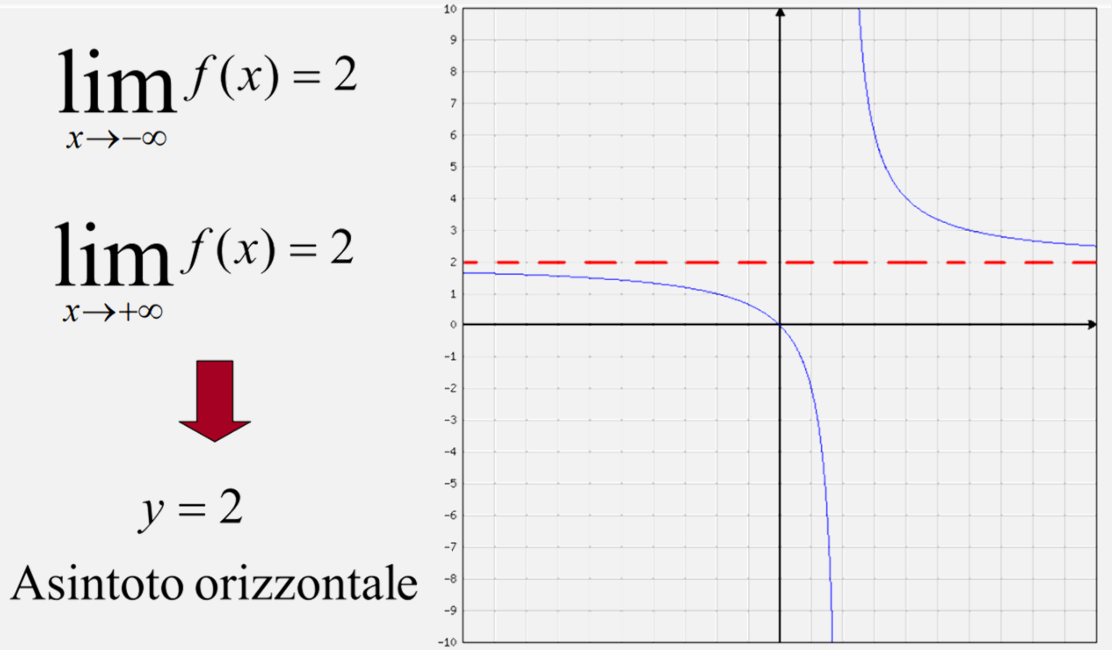
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Asintoti orizzontali

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I, se il limite all'infinito di risulta finito, cioè se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$$

Allora, la retta $y = l$ è detta **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione $f(x)$



Asintoti orizzontali

Se succede che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$$

Allora, il grafico di $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali: $y = l_1$ a $+\infty$ e $y = l_2$ a $-\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$$

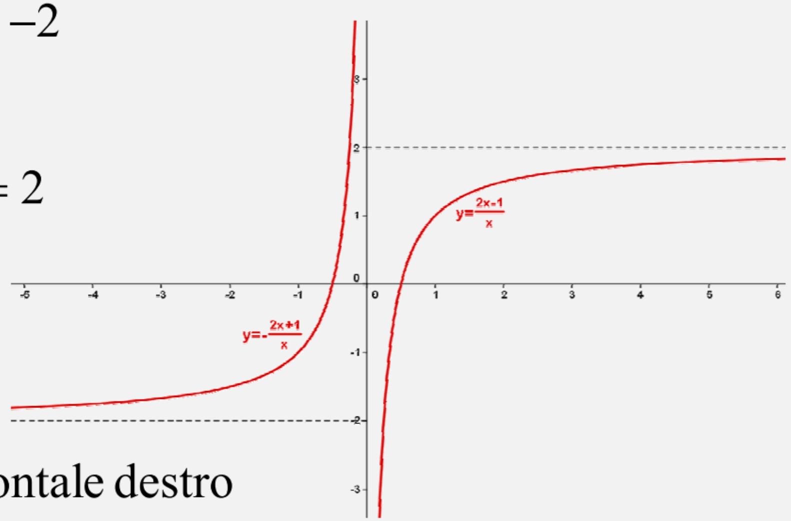
$$\Downarrow$$

$$y = 2$$

Asintoto orizzontale destro

$$y = -2$$

Asintoto orizzontale sinistro



Asintoti orizzontali

Se il limite all'infinito di una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I risulta invece infinito, cioè se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la funzione sicuramente NON ammette asintoto orizzontale

Asintoti obliqui

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo illimitato I, se si verifica che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

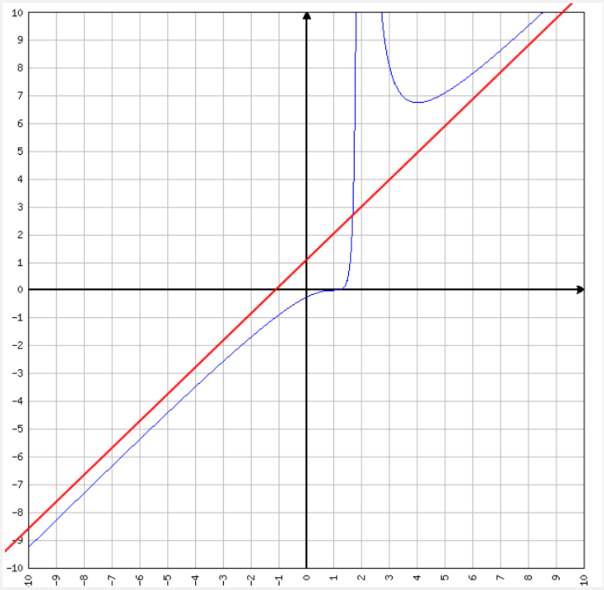
Allora, la funzione sicuramente NON ammette asintoto orizzontale
È possibile verificare se il grafico della funzione considerata ammetta asintoto obliquo.

Se si verificano le seguenti condizioni, allora il grafico della funzione $f(x)$ ammette asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \; finito$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \; finito$$



Asintoti obliqui

Se si verifica che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m = 0 \; oppure \; infinito$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \; infinito$$

$\Rightarrow$ Il grafico della funzione $f(x)$ non ammette neppure asintoto obliquo

Asintoti verticali

Assegnata una funzione f a valori reali definita in un intervallo I privato al più di un punto x_0, se il limite al finito x_0 risulta infinito, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$$

Allora, la retta $x = x_0$ è detta **asintoto verticale** per il grafico della funzione $f(x)$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$x = 2$$

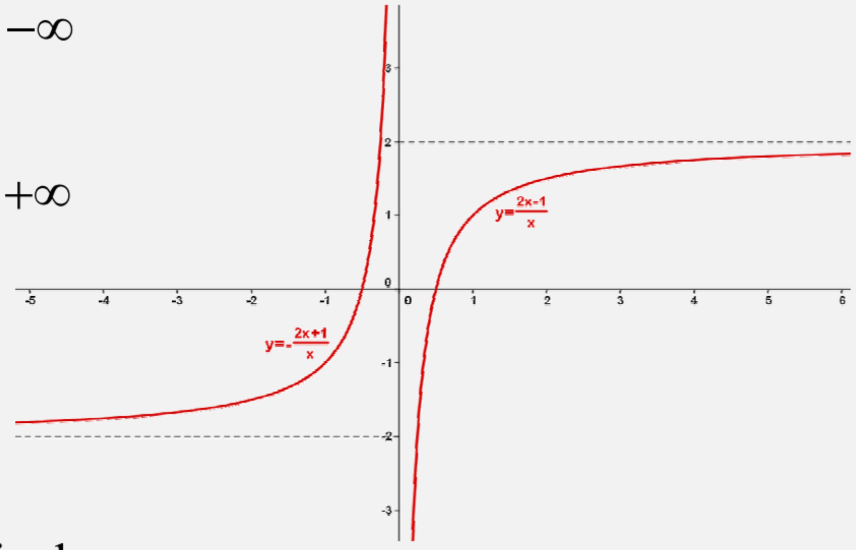
Asintoto verticale

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$

$$x = 0$$

Asintoto verticale



Esempio.

Determinare gli eventuali asintoti della seguente funzione: $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1}$

La prima cosa da fare nel determinare la presenza di eventuali asintoti è determinare il dominio della funzione:

$$x - 1 \neq 0 \ \Rightarrow x \neq -1$$

Il dominio pertanto è:

$$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Poiché la funzione assegnata ammette un punto in cui non è definita, ha senso ricercare gli eventuali asintoti verticali e orizzontali:

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-3}{-1^- + 1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{x^2-4}{x+1} = \frac{-3}{-1^+ + 1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x = -1$ a. verticale

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

Non esiste a. orizzontale sinistro

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-4}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Non esiste a. orizzontale destro

Esempio.

Non esiste asintoto orizzontale → verifichiamo se esiste l'asintoto obliquo

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\frac{x^2-4}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4}{x^2+x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-4}{x+1}-x\right]=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}-x}{x+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-4-x}{x+1}\right]=-1$$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1$$

$$q=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]=-1$$

➡ $y=x-1$

asintoto obliquo

a sinistra

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4}{x^2+x}=1$$

$$q=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-4-x}{x+1}\right]=-1$$

⬇

$y=x-1$

asintoto obliquo

a destra

Discontinuità

- Se f è definita in un intervallo $[a, b]$ escluso al più il punto x_0

oppure

- Se f non è continua in un punto x_0

Si dice che il punto x_0 è un **punto singolare** o un **punto di discontinuità**

Punti di discontinuità di I specie (punti di salto)

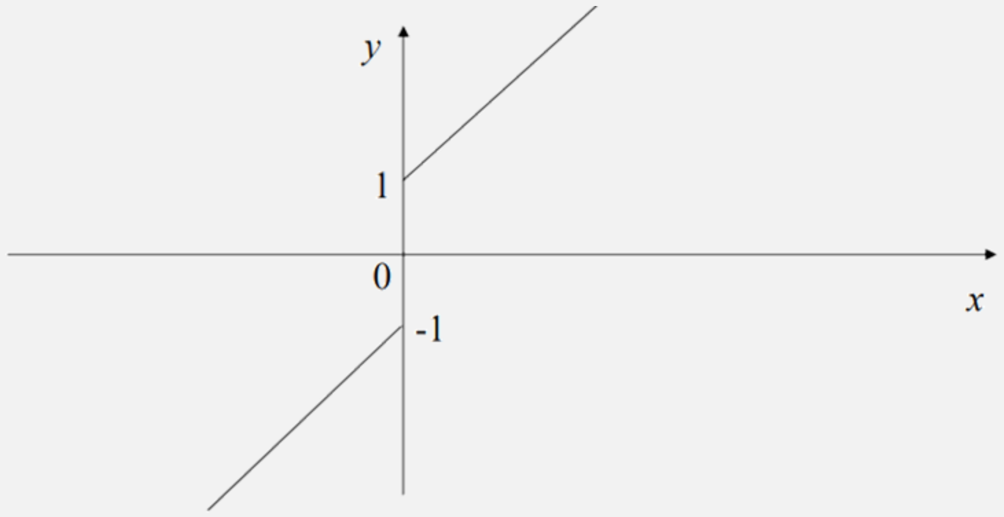
Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di I specie se in tale punto esistono finiti il limite destro ed il limite sinistro di f ma sono diversi tra loro. Cioè:

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$$

Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità di I specie in $x = 0$:

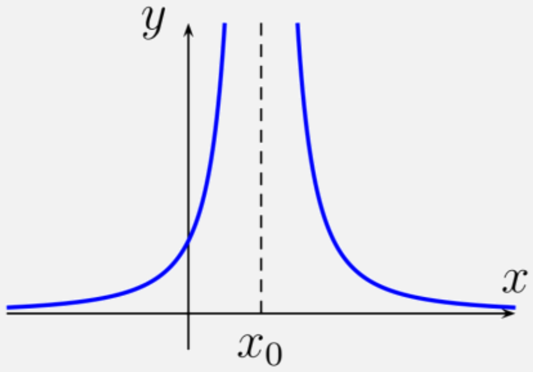
$$f(x) = x + \frac{|x|}{x} = \begin{cases} x + 1, se\ x > 0 \\ x - 1, se\ x < 0 \end{cases}$$

$$1 = \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$



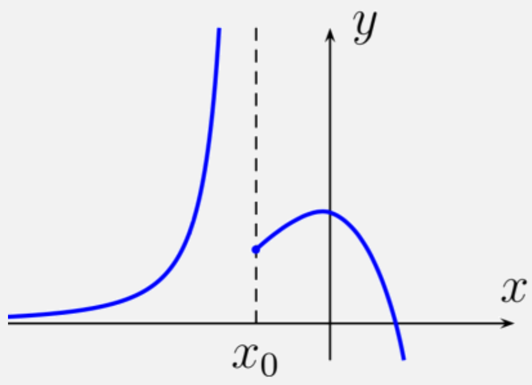
Punti di discontinuità di II specie

Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità di II specie se in tale punto almeno uno dei due limiti destro o sinistro di f è infinito oppure non esiste. Cioè:

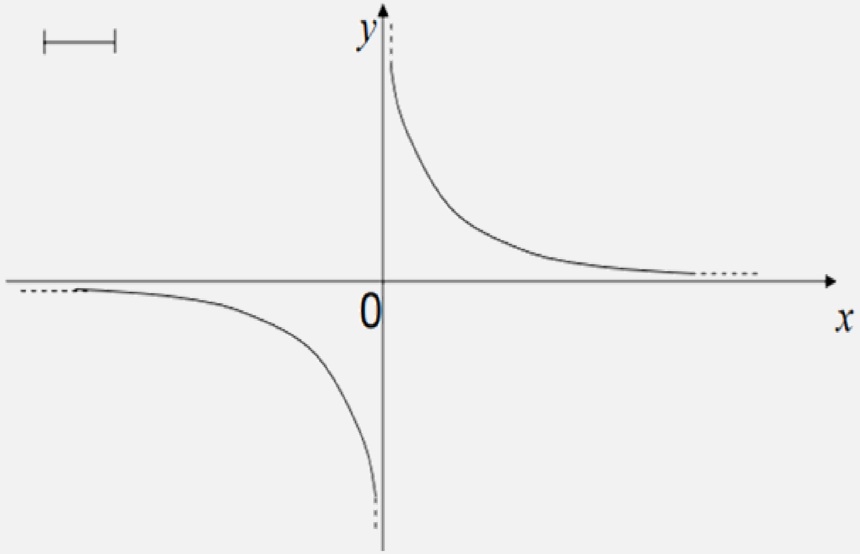


Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità di II specie in $x = 0$:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$+\infty = \lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$



La presenza di asintoti verticali è rappresentativa di discontinuità di II specie

Punti di discontinuità di III specie (o eliminabili)

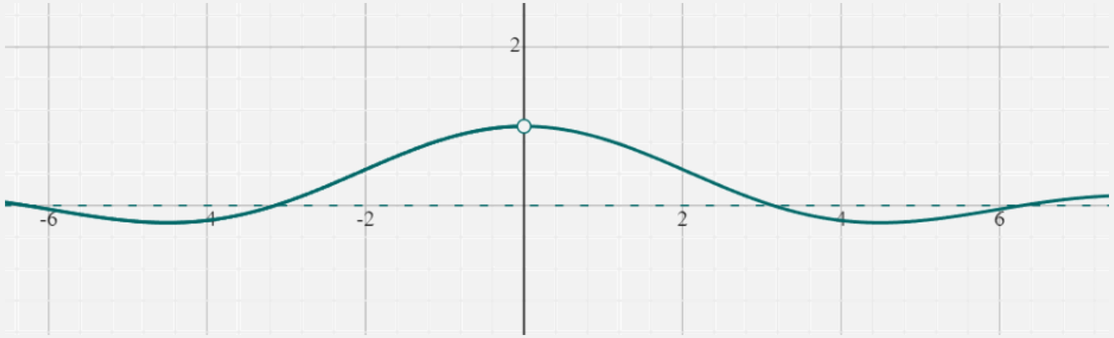
Si dice che nel punto x_0 una funzione f ha una discontinuità eliminabile se in tale punto esiste finito il limite di f ma f in tale punto:

- Non è definita

- $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Esempio. La funzione seguente presenta una discontinuità eliminabile in $x = 0$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

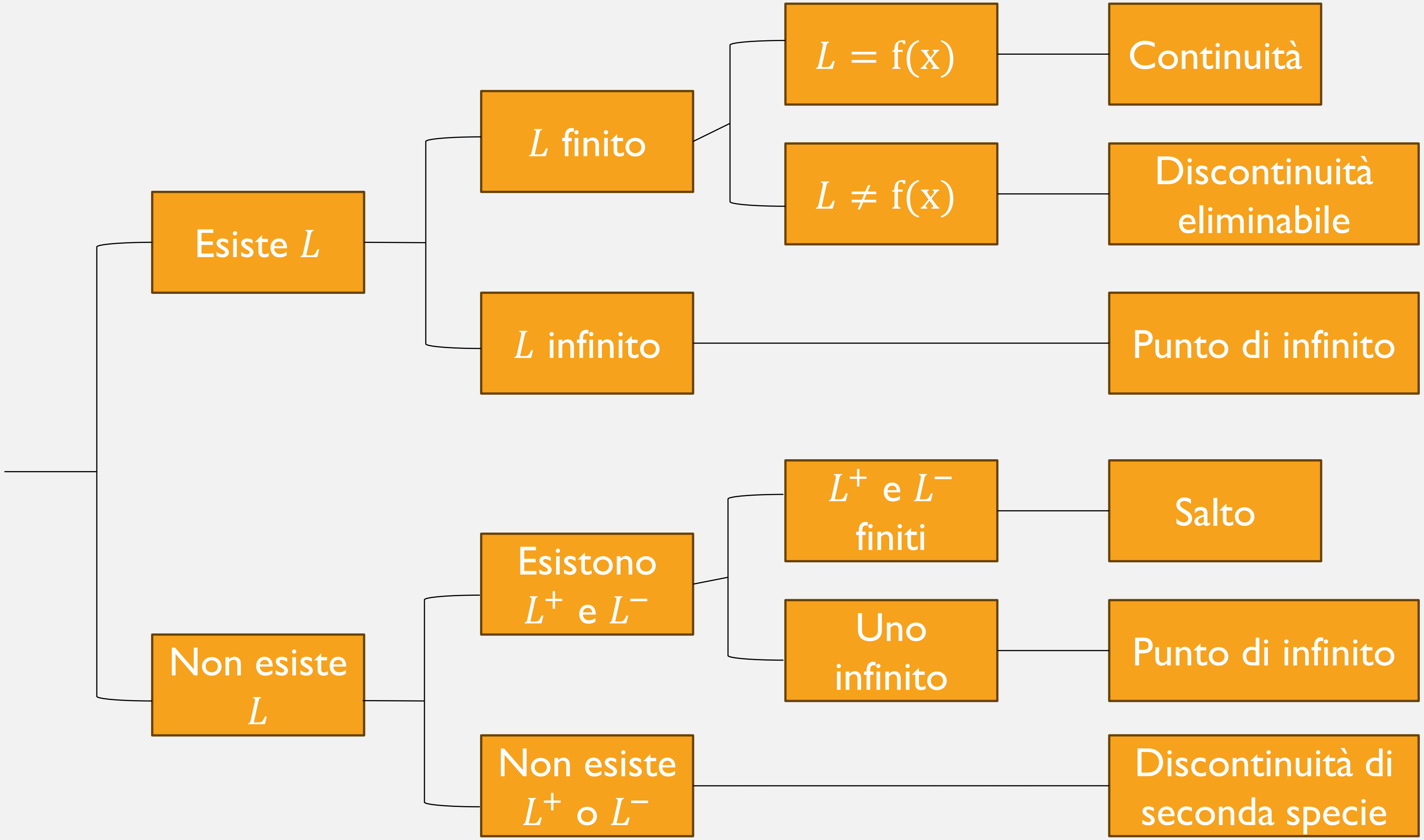


Infatti:

- *f non è definita in* $x = 0 \Rightarrow \nexists f(0)$

- *Però esiste* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Punti di discontinuità



Limiti notevoli

Limite	Forma di indeterminazione
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$	1^∞
$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=0$	$0\cdot\infty$
$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$

Limite	Forma di indeterminazione
$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$	1^∞
$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$	$\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k$	$\frac{0}{0}$

Limiti notevoli

Ad ogni limite notevole, possono essere applicate le seguenti proprietà

limite iniziale	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito	se nel limite al posto di **x** c'è **nx** il risultato del limite resta lo stesso	se il testo del limite è invertito anche il risultato sarà invertito
$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(\boldsymbol{nx})}{\boldsymbol{nx}} = 1$	$\lim_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{nx}}{\sin(\boldsymbol{nx})} = 1$