Focus: limiti

- $\lim_{x \to +\infty} (x^3 + x^2 + 2) = +\infty$

- $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{0}{0} \to$ forma indeterminata

Scomponiamo il limite: $\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-1) = -2 \neq \frac{0}{0}$

- $\lim_{x \to 7} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \to 7} \frac{1}{x}} = e^{1/7}$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3+x^2-1}{2x^2+2} = \frac{+\infty}{+\infty} \to$ forma indeterminata

Scomponiamo il limite: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3})}{x^3(\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2})} = \frac{+1+0-0}{0+0} = \frac{+1}{0} = +\infty$

Esercizio esemplificativo sul limite notevole: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}, a\in\mathbb{R}$

Il limite notevole originale veniva da $1^{\infty}=e$. Anche questa variazione viene da 1^{∞}, ma avendo una a non posso usare la forma del limite notevole: devo ricondurlo a tale forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{x}, y=\frac{x}{a}\Rightarrow x\to+\infty : y=+\frac{\infty}{a}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ya}\Leftrightarrow a>0, a\in\mathbb{R}^{+}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a}=e^{a}$$ la stessa cosa vale per $a<0,\in\mathbb{R}^{-}$

Esercizio esemplificativo sul limite notevole: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$

Altra variazione dello stesso limite notevole. Chiamo $3x=y$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

Lo si può capire anche scrivendo: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1/3}{x}\right)^{x}$

Se $x\to+\infty$, anche $3x\to+\infty$

In questo modo, $1/3$ sarebbe la a, che va come esponente di e

Focus: limiti

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\cos x}{3-x} = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2+\cos x}{3-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\underbrace{\frac{2}{x}}_{\downarrow \atop 0}+\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\downarrow \atop 0}\right)}{x\left(\underbrace{\frac{3}{x}}_{\downarrow \atop 0}-1\right)} = -1$$

- $\lim_{x\to+\infty} e^x(\cos x - 2\sin x) = 1$

Prodotto di funzioni continue: il limite si valuta calcolando il valore della funzione in quel punto

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin e^x}{2x} = -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+\sin e^x}{2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1+\underbrace{\frac{\sin e^x}{x^2}}_{\downarrow \atop 0}\right)}{2x} = -\infty$$

Focus: limiti

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3\sqrt{x}}{2x-5\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\underbrace{\frac{3}{\sqrt{x}}}_{\downarrow \atop 0}\right)}{x\left(2+\underbrace{\frac{5}{\sqrt{x}}}_{\downarrow \atop 0}\right)} = \frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-1}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2} \overset{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \lim_{y\to0} \frac{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-1}{y^2}$$
$$= \lim_{y\to0} \frac{\sin y\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos y-1}{y^2} = \lim_{y\to0} \frac{\cos y-1}{y^2} = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x-2\log(1+x)}{x+\sin x} = -\frac{1}{2}$

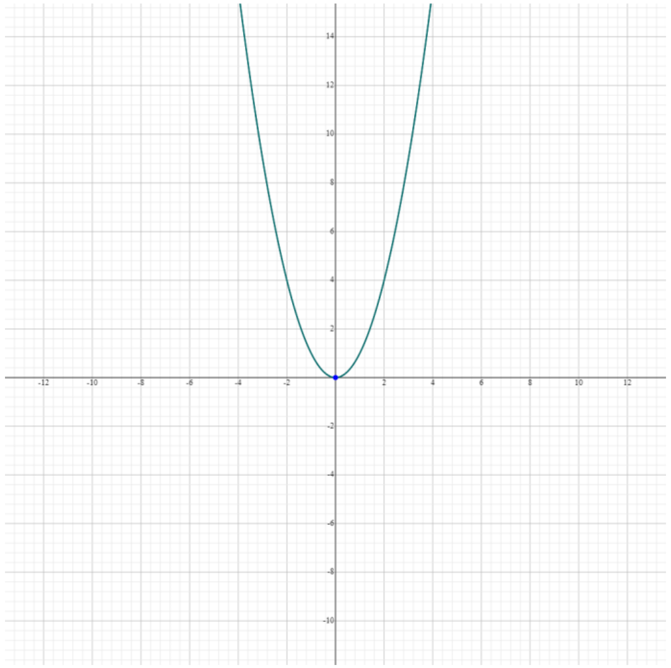
$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x-2\log(1+x)}{x+\sin x} = \lim_{x\to0} \frac{x\left(\frac{\sin x}{x}-2\frac{\log(1+x)}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)} = -\frac{1}{2}$$

Ricorda: limiti notevoli → $\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$

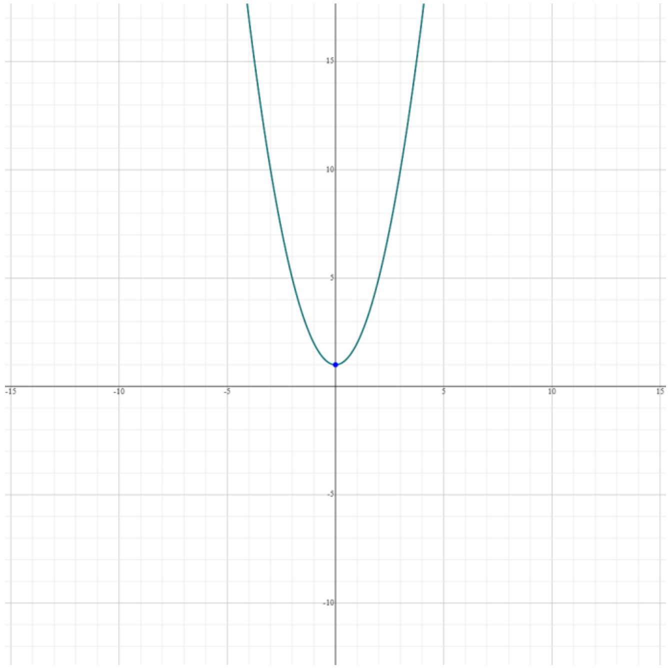
Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

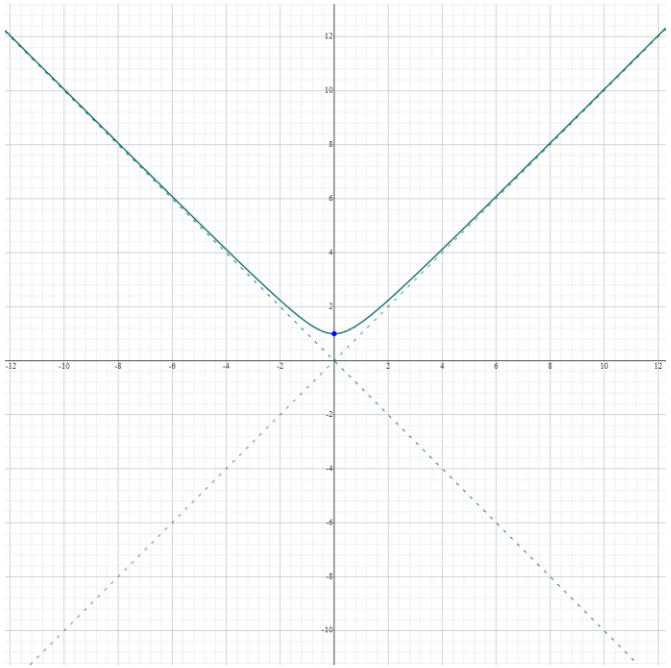
- $D_f = \mathbb{R}$
- la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione i due funzioni continue dà una funzione continua



$f(x) = x^2$



$f(x) = x^2 + 1$

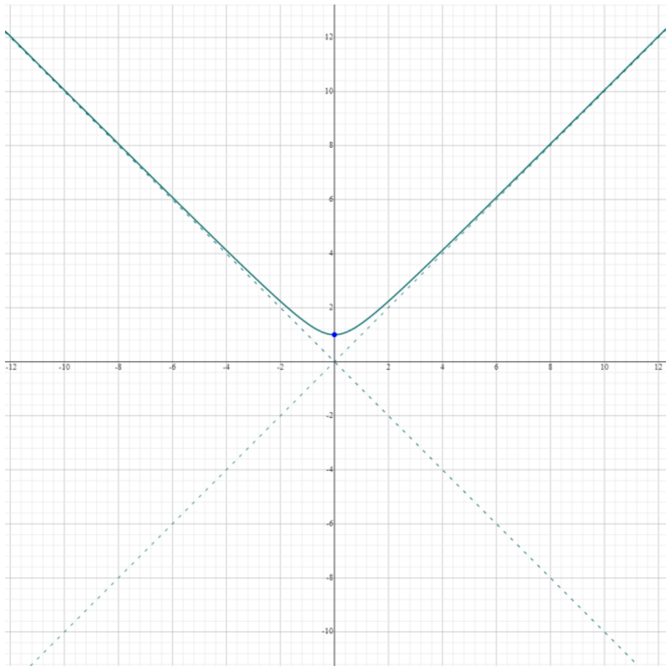


$f(x) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + 1}$

Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione i due funzioni continue dà una funzione continua



Ricordando:

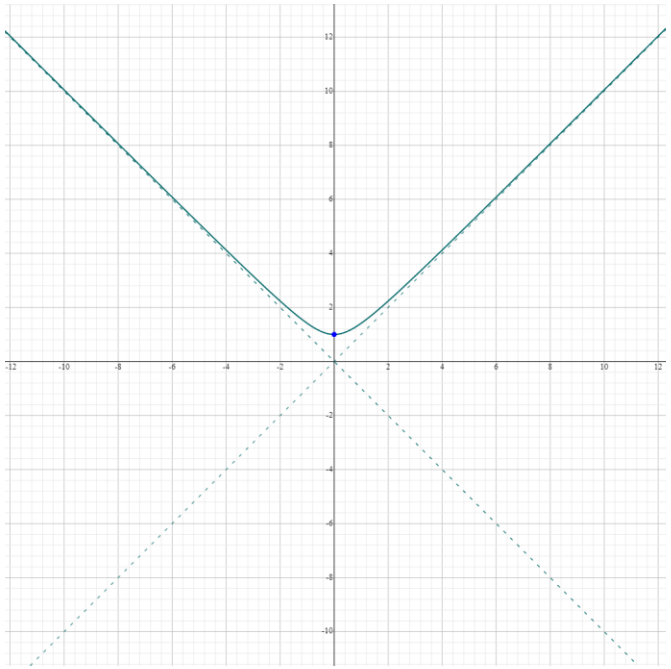
- Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ → asintoto orizzontale
- Se $\lim_{x\to c} f(x) = \pm\infty$ → asintoto verticale
- Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ → asintoto obliquo, con
  - $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
  - $q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$

$f(x) = \sqrt{x^2+1} \rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ → as. obliquo!

Esercizio. Valutare dominio, continuità e limiti.

$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

- $D_f = \mathbb{R}$
- la parabola è continua, la radice è continua, quindi la composizione i due funzioni continue dà una funzione continua



$f(x) = \sqrt{x^2+1} \rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ → as. obliquo!

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

$$q = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - mx)] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 1x = \infty - \infty \rightarrow f.i.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} - 1x \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1x}{\sqrt{x^2+1}+1x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{+\infty+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$m = 1, q = 0 \rightarrow y = 1x + 0 = x$$

cosa accade per $-\infty$? $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -1 \rightarrow y = -x$

So che le x che prendo sono negative