FISICA APPLICATA E BIOSTATISTICA

MODULO MAT2 — Funzioni

il linguaggio delle relazioni biologiche

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

Come la biologia parla per funzioni

- Una funzione è una regola ingresso → uscita: a ogni valore in ingresso corrisponde esattamente un valore in uscita. In biologia quasi ogni grandezza è funzione di un'altra.

Esempi: concentrazione del farmaco in funzione del tempo; velocità enzimatica in funzione del substrato; popolazione in funzione del tempo; assorbanza in funzione della concentrazione (una retta di taratura).

Il dominio è l'insieme dei valori in ingresso biologicamente significativi — una concentrazione o un tempo non possono essere negativi; per questo 'determiniamo il dominio'.

Monotona, limitata, massimi/minimi, zeri: il vocabolario che useremo per leggere qualsiasi curva biomedica.

Funzione Reale

Sia $A, B \subseteq \mathbb{R},\ A, B \neq \emptyset$.
Una funzione reale f da A (dominio) a B (codominio), di variabile reale, è una corrispondenza che associa a ogni elemento $x \in A$ uno e un solo elemento $y \in B$. Si indica con:

$$f: A \to B$$

$$f : x \in A \to y \in \mathrm{B}$$

- A è detto dominio di f , indicato anche con $dom(f), Df$
- B è detto codominio di f ,

La regola che associa alla variabile indipendente x la sua immagine $f(x)$ definisce la funzione.

- L'immagine di una funzione è l'insieme di tutti i possibili valori $f(x)$ associati ad almeno un elemento del dominio:

$$im(f) = \{y \in B : y = f(x), x \in A\}$$

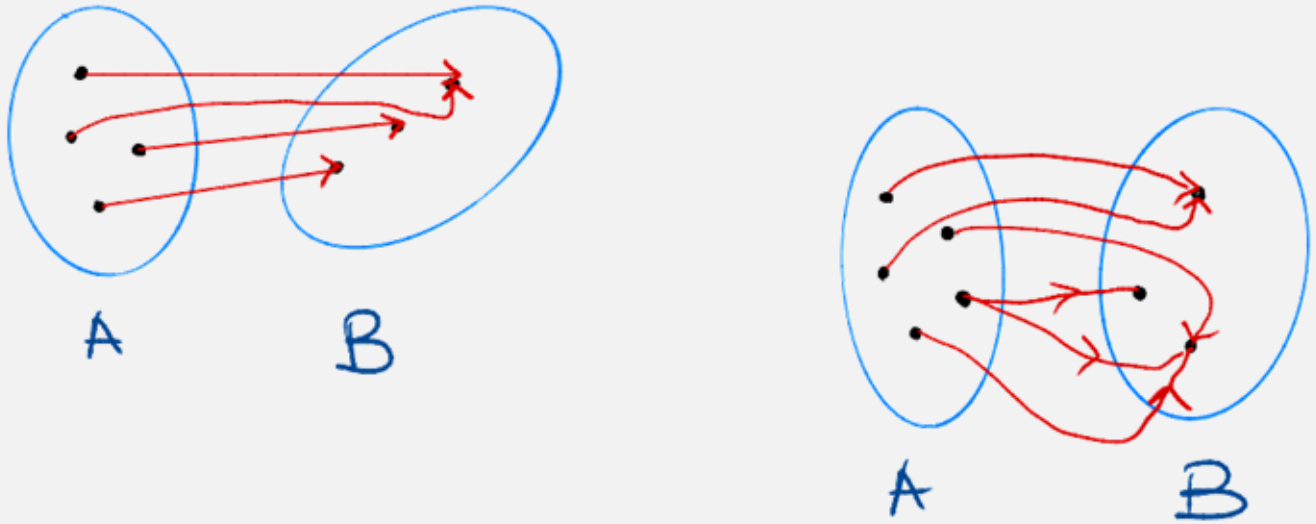
Unicità dell'Immagine

Perché una corrispondenza sia una funzione, deve associare in modo unico a ogni $x \in dom(f)$ un valore $f(x)$.

Non è necessario che valori diversi di x corrispondano a valori diversi di $f(x)$: può accadere che per $x_1, x_2 \in dom(f),\ \text{con}\ x_1 \neq x_2$ si abbia

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\forall x \in A, \quad \exists! y \in B : y = f(x).$$



La definizione consente che lo stesso y corrisponda a valori diversi di x

Espressione analitica

Una funzione si definisce fornendo la sua espressione analitica, ovvero un insieme di operazioni matematiche ben definite che, applicate in un dato ordine, permettono di calcolare il valore corrispondente $y = f(x)$ per ogni valore assegnato di x

$$y = x + 1 \Rightarrow \text{Se } x = 1, y = 2; \text{Se } x = 2, y = 3;...$$

$$y = x^3 + x^2 \Rightarrow \text{Se } x = 1, y = 2; \text{se } x = 2, y = 12;...$$

Nota: nel caso di una funzione reale di variabile reale $f : dom(f) \rightarrow \mathbb{R}$, considereremo sempre $\mathbb{R}$ come codominio.

Le funzioni possono essere iniettive, surgettive o biunivoche:

- $f: A \to B$ è iniettiva se

$$\forall a_1, a_2 \in A, \qquad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall a_1, a_2 \in A, \qquad f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

si prendono due elementi diversi e le loro immagini sono diverse; vale anche il viceversa

- $f: A \to B$ è surgettiva se $im(f) = B$

tutti gli elementi di B sono assunti dalla funzione; ciò non implica, tuttavia, che sia iniettiva, poiché valori diversi a_1 e a_2 possono avere la stessa immagine:

$$\forall y \in B \; \exists x \in A : f(x) = y$$

- $f: A \to B$ è biunivoca se è sia iniettiva sia surgettiva.

In questo caso vale il viceversa ed esiste la funzione inversa.

Il grafico di una funzione $f : D \to \mathbb{R}$

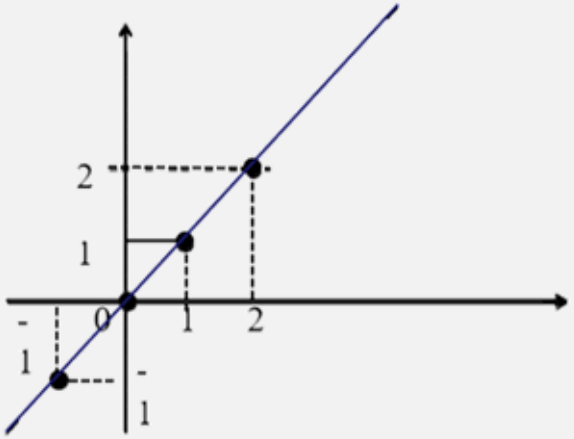
è l'insieme di tutti i punti del piano cartesiano Oxy di coordinate (x, y) dove x appartiene al dominio D e $y = f(x)$

$$G_f = \{(x, y) : x \in D, y = f(x)\}$$

$f : x \in R \to x \in R$

$f(x) = x$

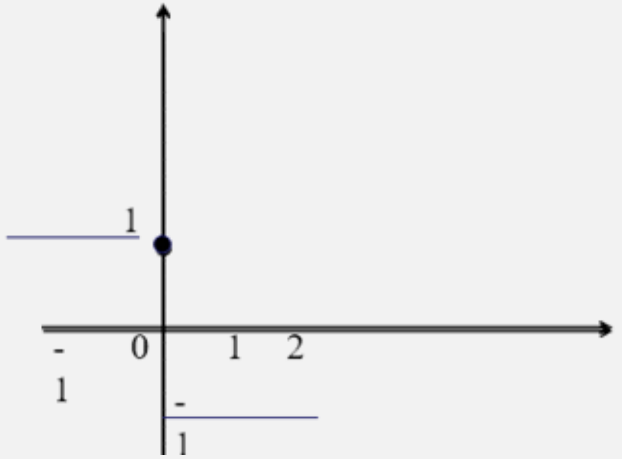
x	f(x)
-1	-1
0	0
1/2	1/2
1	1
2	2
…	…



Il grafico è la retta passante per i punti individuati

$f : x \in R \to \begin{cases} 1 & \text{Se } x \geq 0 \\ -1 & \text{Se } x < 0 \end{cases}$

x	f(x)
-2	-1
-1	-1
0	1
1/2	1
1	1
…	…



Funzione definita a tratti

Operazioni tra Funzioni

Le funzioni possono essere combinate mediante operazioni aritmetiche.

Sia $f : A \to \mathbb{R}, \quad g : A \to \mathbb{R}$ due funzioni reali con lo stesso dominio:

- $(f + g)x = f(x) + g(x)$
- $(f - g)x = f(x) - g(x)$
- $(f \cdot g)x = f(x) \cdot g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}, con\ g(x) \neq 0$

Operazioni tra Funzioni – Composizione di Funzioni

Sia $f : A \to B, \quad g: B \to C$, la composizione di $\boldsymbol{f}$ **and** $\boldsymbol{g}$ è la funzione da A to C indicata con:

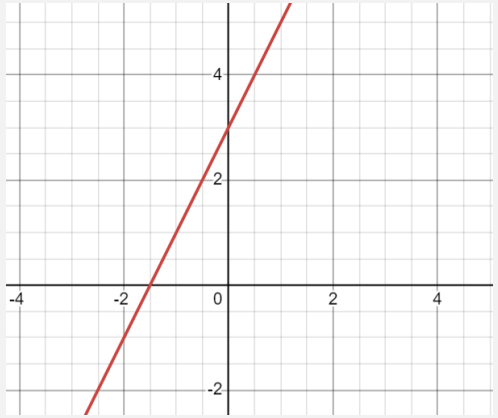
$$g \circ f : A \to C$$

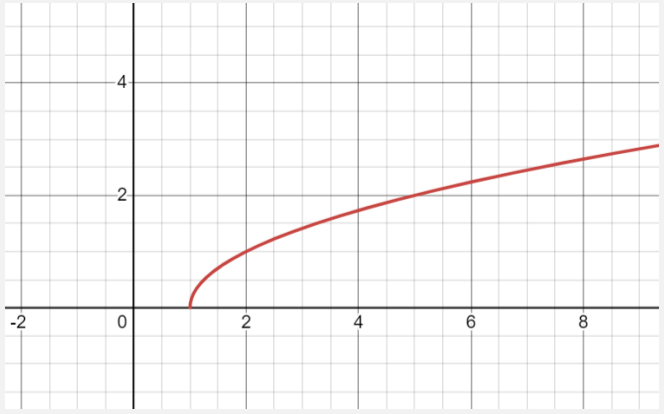
Definita come:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Nota. Si calcola prima f poi si applica g

Esempio. $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$





$$(g \circ f) = g\big(f(x)\big) = g(2x+3)$$
$$= \sqrt{2x-2} = \sqrt{2(x-1)}$$

$$(f \circ g) = f\big(g(x)\big) = f\big(\sqrt{x-1}\big)$$
$$= 2\sqrt{x-1} + 3$$

I risultati sono diversi: la composizione non è commutativa.

Determinazione del Dominio di una Funzione

Determinare il dominio di una funzione significa imporre le condizioni che escludono i valori per cui la funzione non è definita.

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$
$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

REGOLE:

- Per le radici di indice pari, il radicando deve essere ≥ 0

- Per le frazioni, il denominatore deve essere $\neq 0$:

$f(x) = \frac{1-x}{x^2-3}$ → tutte le operazioni sono ammesse singolarmente, ma è necessario che

$$x^2 - 3 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 3 \rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$
$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm\sqrt{3}\}$$

- Per i logaritmi, l'argomento deve essere > 0:

$$f(x) = 2 - xlog(x+5) \rightarrow x + 5 > 0 \rightarrow x > -5$$
$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x > -5\}$$

Dominio e Immagine (o Codominio)

$$g(x) = \sqrt{x-1} \qquad x - 1 \geq 0 \ \rightarrow x \geq 1$$

$$Df = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

$\boldsymbol{Df}$: insieme dei valori che x può assumere (dominio) (insieme di definizione)

L'immagine di x tramite f è il valore corrispondente y;

$\boldsymbol{Cf}$ o $\mathrm{Im}(\boldsymbol{f})$: insieme di tutti i valori assunti dalla funzione.

Funzione Inversa

Data una funzione biunivoca:

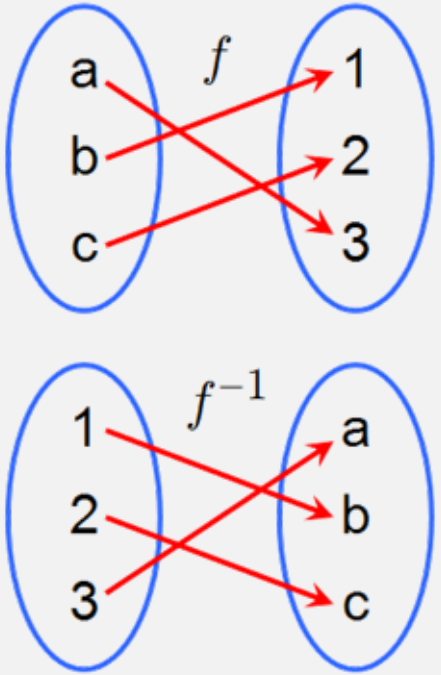
$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

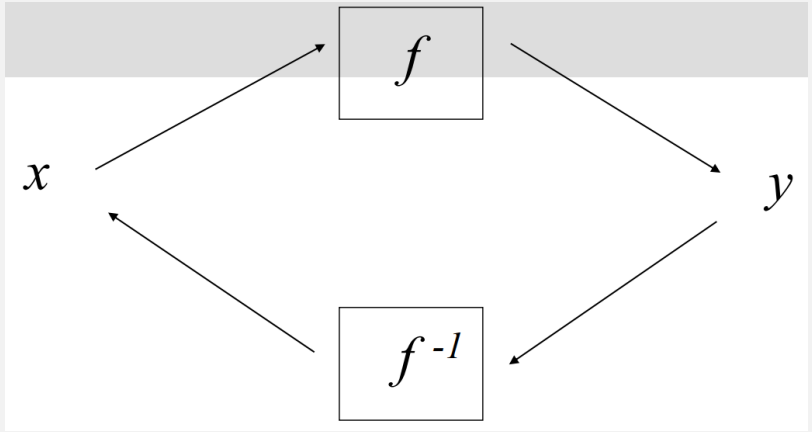
la funzione inversa, indicata con f^{-1} è definita come:

$$f^{-1}: f(A) \longrightarrow A$$
$$y \qquad\qquad x$$

Tale che $\forall y \in f(A)$ esiste un unico $x \in A$ tale che:

$$x = f^{-1}(y)$$





Se si parte da x e si applica prima f e poi f^{-1} , si ritorna a x.

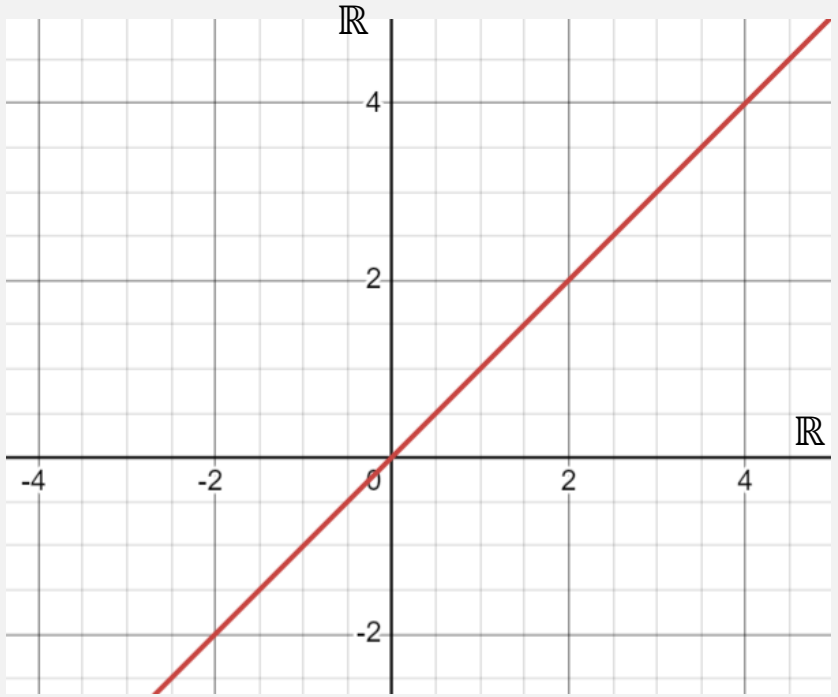
$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x, \qquad \forall x \in A$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$(f^{-1} \circ f)$ è detta funzione identità di A

$(f^{-1} \circ f)(a)$ funzione identità dell'insieme A

$(f \circ f^{-1})(b)$ funzione identità dell'insieme B



Esempio — una retta di taratura e la sua inversa

- Nell'analisi quantitativa, l'assorbanza A è proporzionale alla concentrazione c (legge di Beer–Lambert):

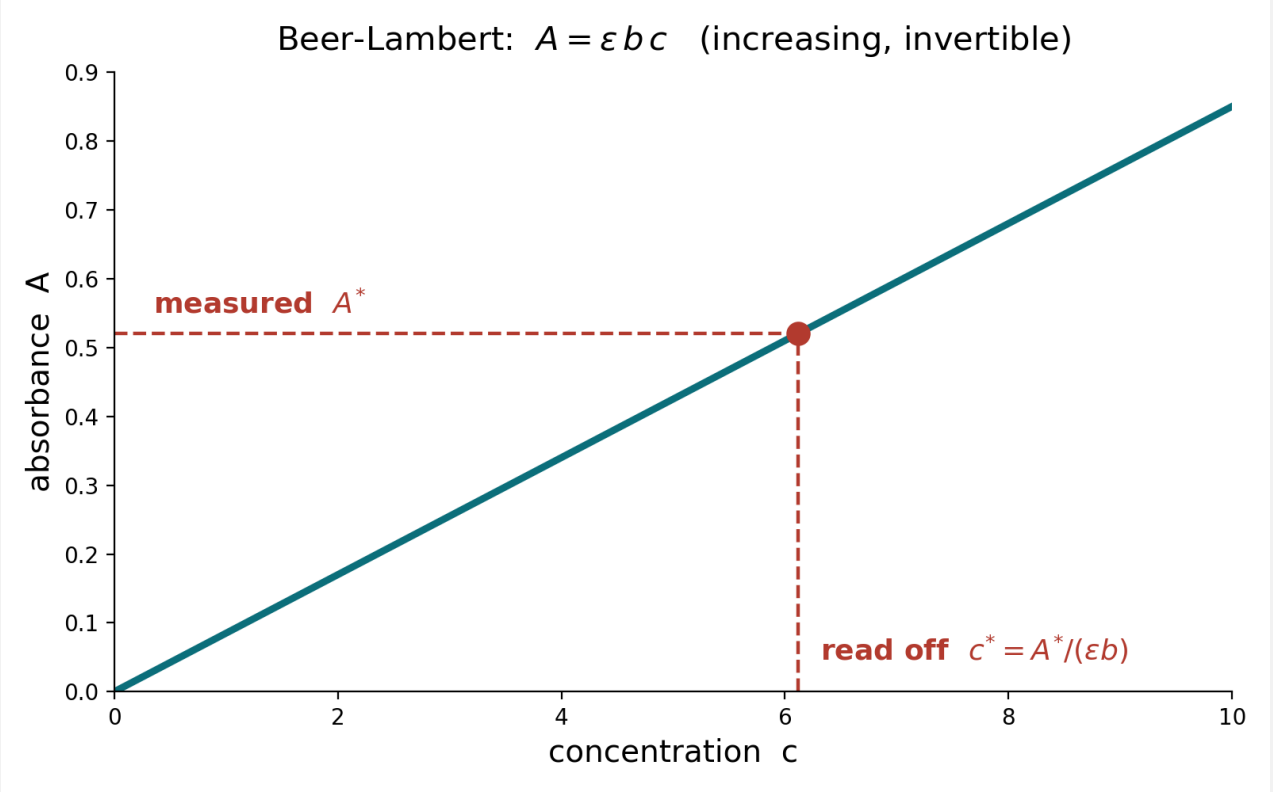
$$A = \varepsilon \cdot l \cdot c$$

La retta è strettamente crescente, quindi iniettiva — perciò ammette una funzione inversa.

L'inversa permette di ricavare una concentrazione incognita da un'assorbanza misurata:

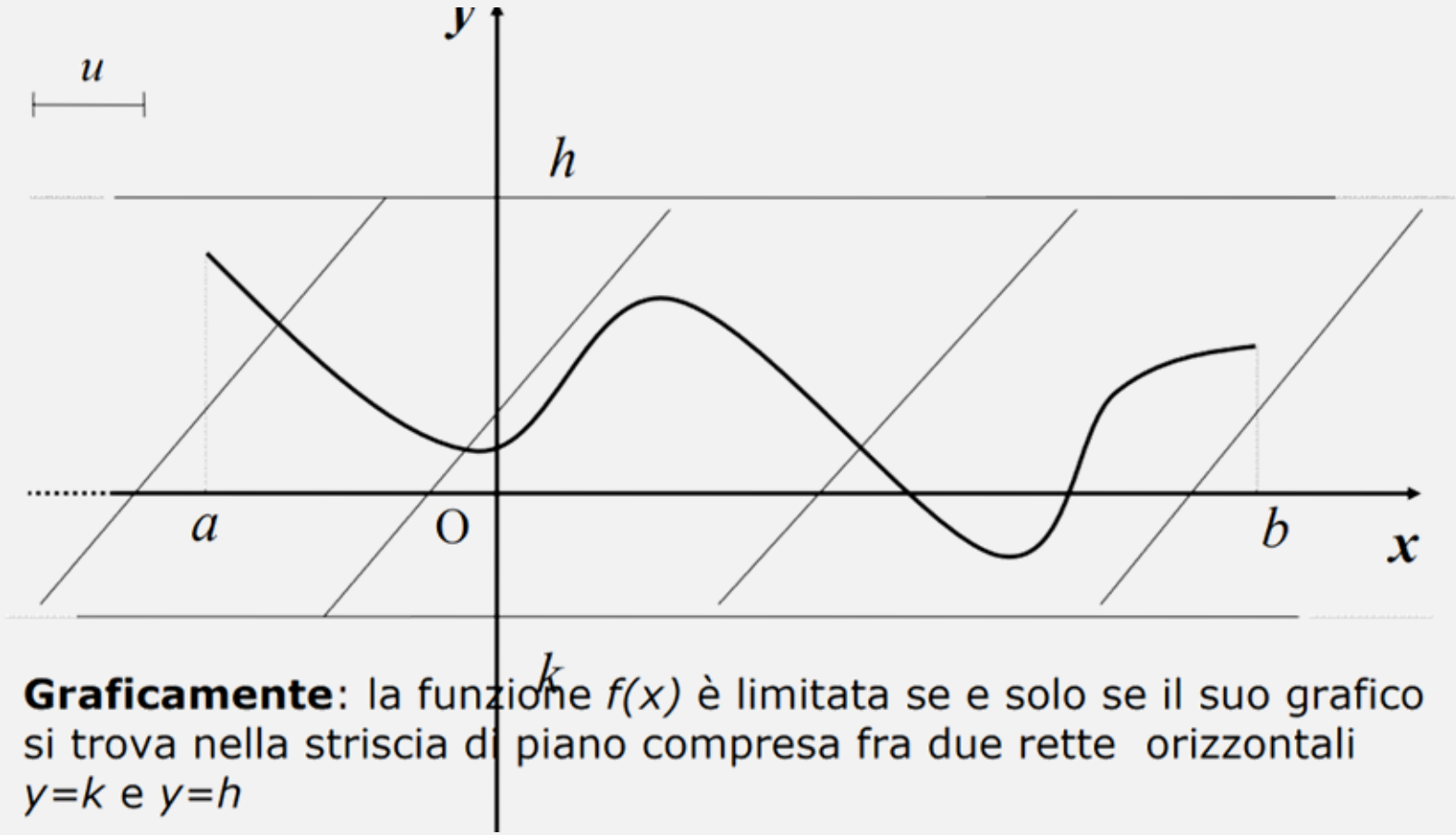
$$c = A/(\varepsilon \cdot l)$$

Le funzioni inverse trasformano una curva di taratura in uno strumento di misura.



Funzione Limitata

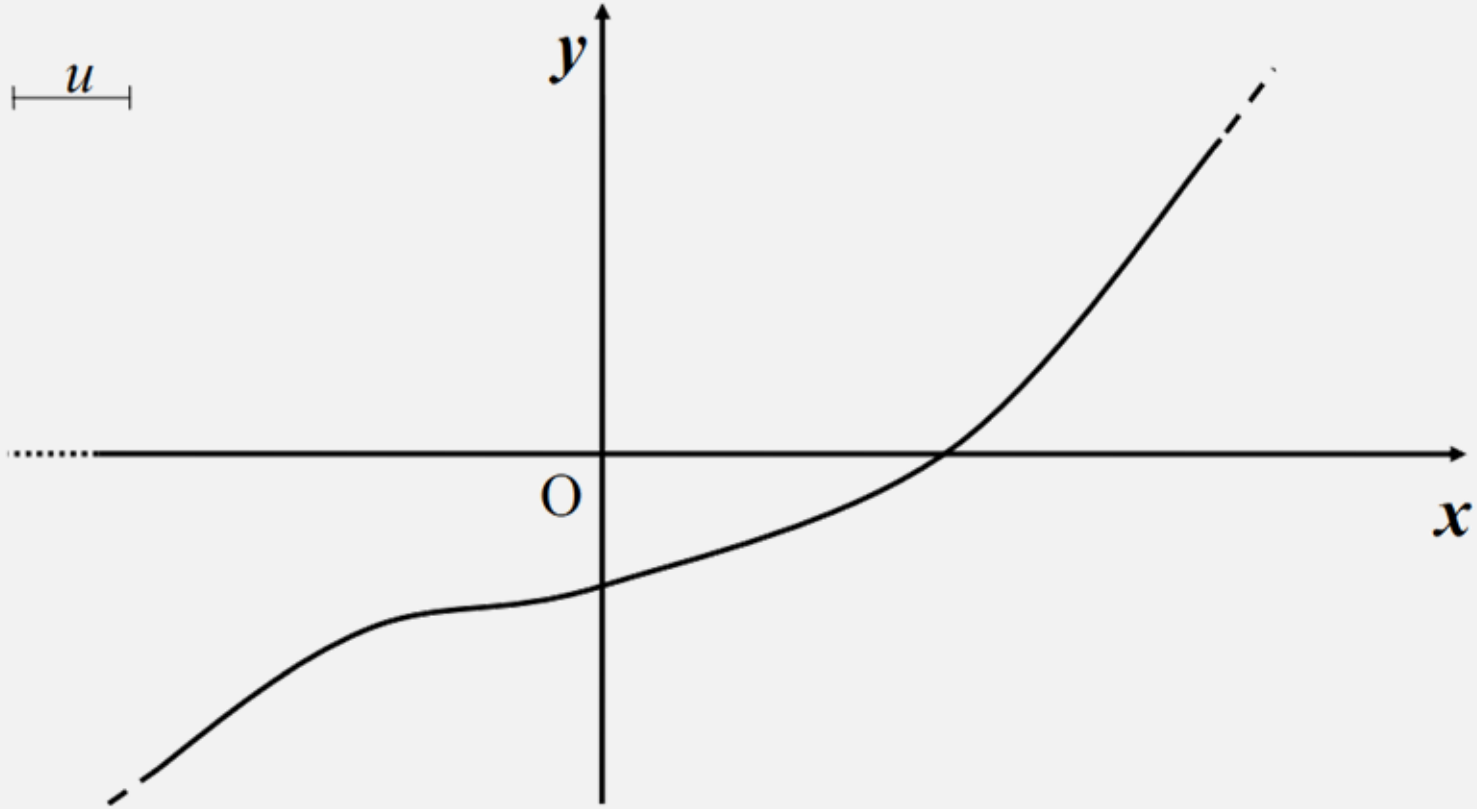
$$f \text{ limitata } \Leftrightarrow \exists h, k \in \mathbb{R} : k \leq f(x) \leq h, \forall x \in A$$



Graficamente: la funzione *f(x)* è limitata se e solo se il suo grafico si trova nella striscia di piano compresa fra due rette orizzontali *y=k* e *y=h*

Funzione Illimitata

Una funzione illimitata è una funzione la cui immagine non ammette né maggioranti né minoranti.



Estremo Superiore

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

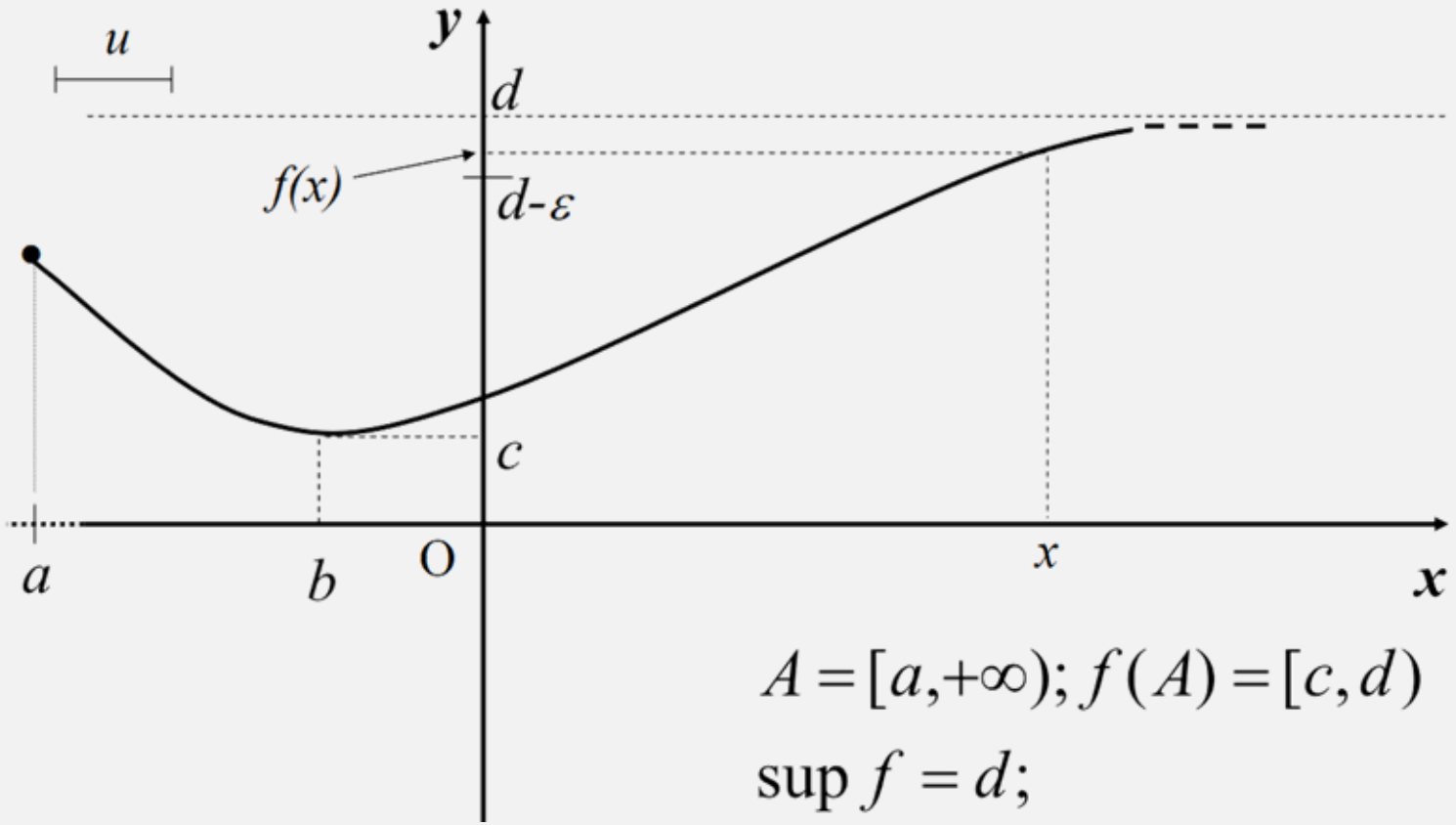
limitata superiormente ($\Rightarrow$ il suo codominio $f(A)$ ammette maggioranti).

Si dice che M è l'**estremo superiore** di f se è l'estremo superiore di $f(A)$:

$$M = \sup f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \leq M \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata superiormente, allora: $\sup f = +\infty$

Esercizio. Dal grafico, dedurre dominio, codominio, estremo superiore.



$$A = [a, +\infty); f(A) = [c, d)$$

$$\sup f = d;$$

Estremo Inferiore

Sia data una funzione

$$f : A \to B, \qquad con\, A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

limitata inferiormente ($\Rightarrow$ il suo codominio $f(A)$ ammette minoranti).

Si dice che m è l'**estremo inferiore** di f se è l'estremo inferiore di $f(A)$:

$$m = \inf f \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, f(x) \geq m \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : m + \varepsilon > f(x) \end{cases}$$

Se f non è limitata inferiormente, allora: $\inf f = -\infty$

Massimo Assoluto

Sia

$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Un numero reale M è detto massimo assoluto di f Se M è un valore appartenente all'immagine di f e se è il valore più grande:

$$M = \max f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = M \\ \forall x \in A, f(x) \leq M \end{cases}$$

con x_0 detto punto di massimo assoluto



Minimo Assoluto

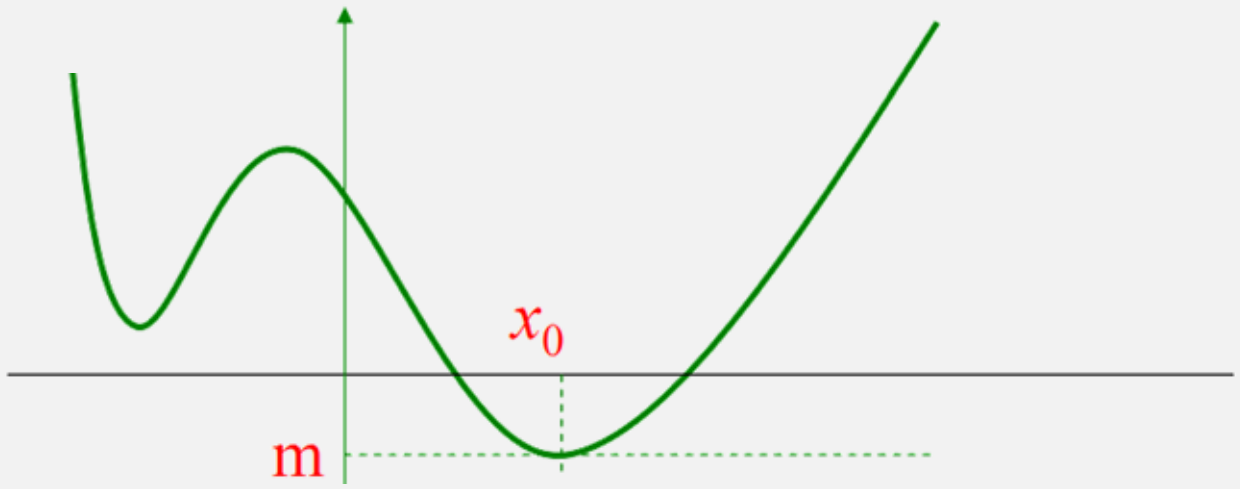
Sia

$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

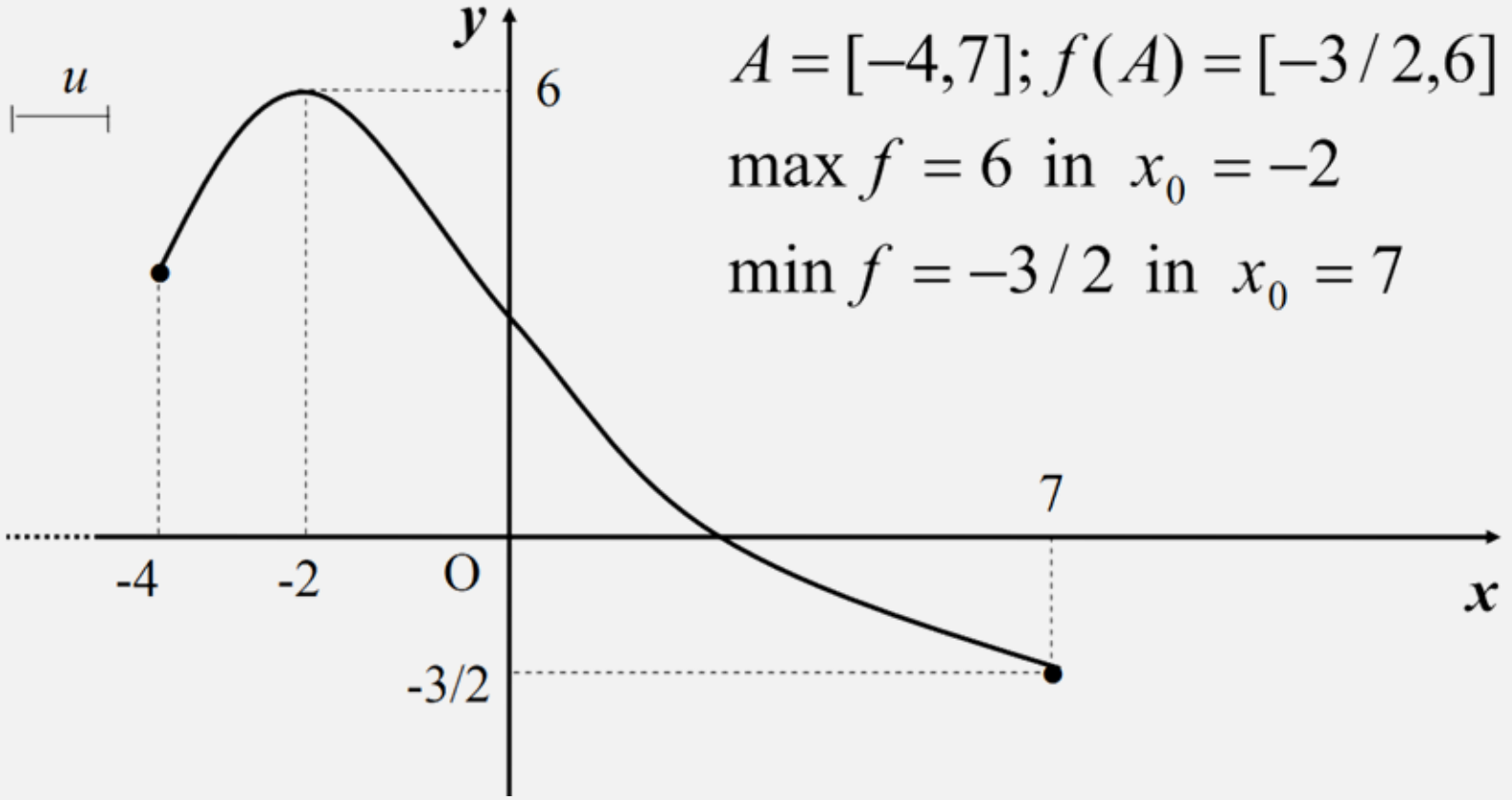
Un numero reale m è detto minimo assoluto di f Se m è un valore appartenente all'immagine di f e se è il valore più piccolo:

$$m = \min f \Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in A : f(x_0) = m \\ \forall x \in A, f(x) \geq m \end{cases}$$

con x_0 detto punto di minimo assoluto.



Esempio. Dal grafico, deduci dominio, codominio, massimo e minimo.



$$A = [-4,7]; f(A) = [-3/2,6]$$

$$\max f = 6 \text{ in } x_0 = -2$$

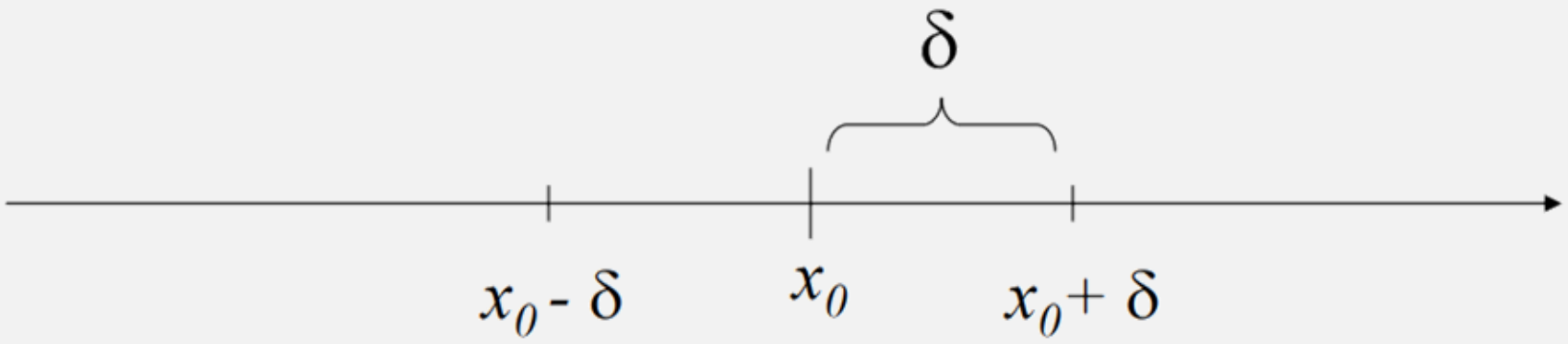
$$\min f = -3/2 \text{ in } x_0 = 7$$

Intorno

Si fissi un punto x_0 sull'asse reale. Un intorno $\boldsymbol{I_{x0}}$ del punto x_0 è un intervallo aperto che contiene x_0.

Se δ indica la semiampiezza dell'intervallo, l'intorno si scrive:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$



Massimo Locale (o Relativo)

Sia

$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

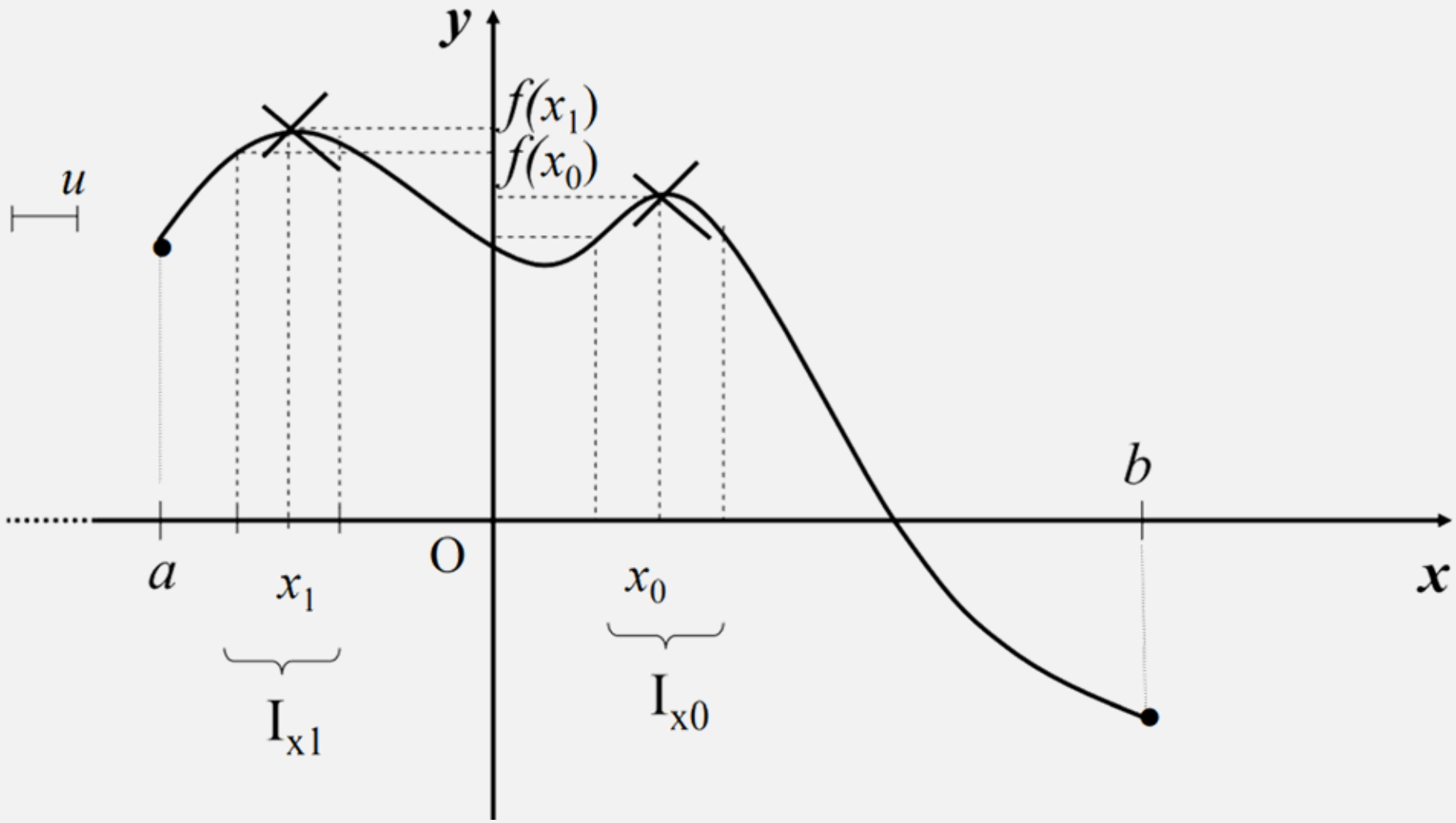
Dato un punto $x_0 \in \mathrm{A}$, il valore $L = f(x_0)$ è un massimo locale (relativo) se:

$$\exists\, I_{x0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \leq L$$

Il punto x_0 è detto punto di massimo locale

Massimo Locale (Rappresentazione Grafica)



Minimo Locale (o Relativo)

Sia

$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

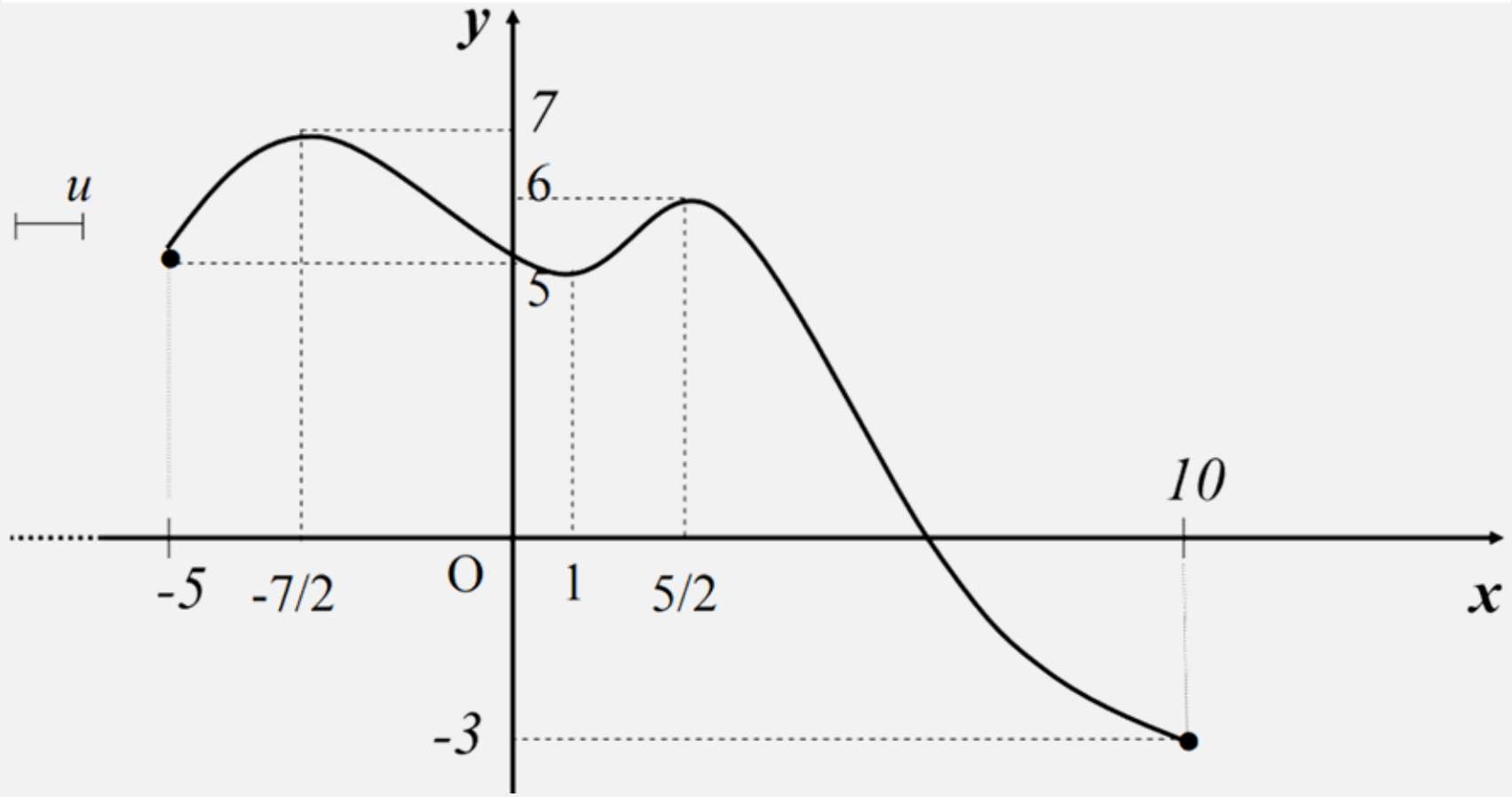
Dato un punto $x_0 \in \mathrm{A}$, il valore $l = f(x_0)$ è un minimo locale (relativo) se:

$$\exists\, I_{x0} \text{ tale che}$$

$$\forall x \in I_{x0} \cap A, f(x) \geq l$$

Il punto x_0 è detto punto di minimo locale

Esempio. Dal grafico, deduci dominio, codominio, massimo (rel. e ass.), minimo (ass. e rel.).



Funzioni Monotone (Crescenti)

Sia

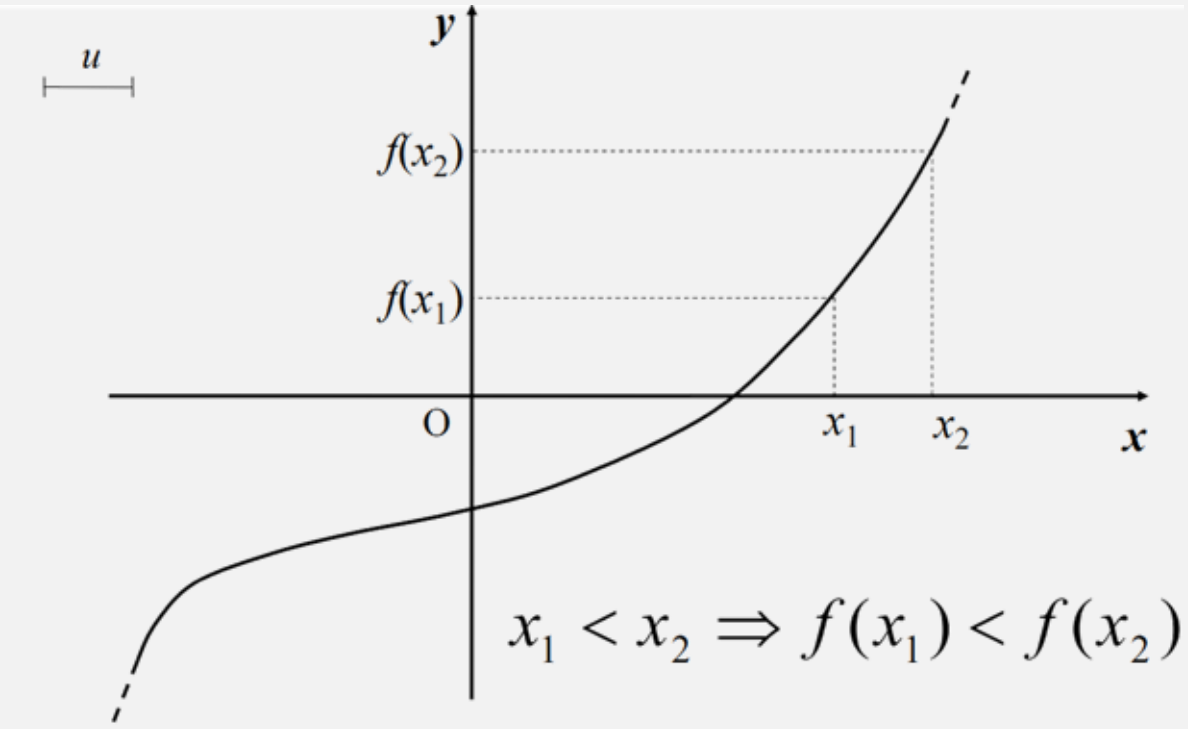
$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$

f è strettamente crescente in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f è crescente in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



Funzioni Monotone (Decrescenti)

Sia

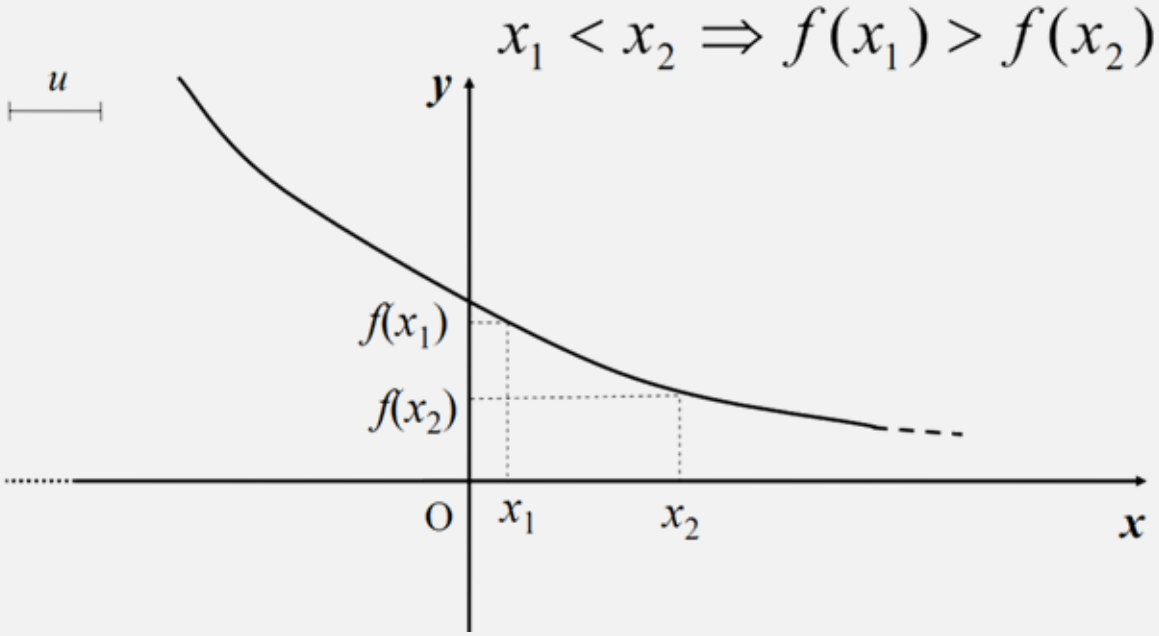
$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

f è strettamente decrescente in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

f è decrescente in A se:

$$\forall x_1, x_2 \in A : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



Funzioni Monotone

Sia

$$f : A \to B, \qquad con\ A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

Una funzione f è detta monotona se è:

- strettamente crescente,
- crescente,
- strettamente decrescente, oppure
- decrescente.

Attenzione: la nozione di monotonia è sempre riferita all'intervallo del dominio in cui la funzione presenta quel comportamento.

Funzione Positiva/Negativa e Zeri

Sia

$$f : A \to B, \qquad \text{con } A, B \subseteq \mathbb{R}, \qquad A, B \neq \emptyset$$

La funzione f è detta positiva in A se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) > 0$$

La funzione f è detta negativa in A se:

$$\forall x \in A \Rightarrow f(x) < 0$$

Un punto x_0 è detto zero di f in A se:

$$f(x_0) = 0$$

Esempio — leggere una curva concentrazione–tempo di un farmaco

- Dopo una singola somministrazione orale, la concentrazione plasmatica segue la curva C(t), con dominio t ≥ 0.

Cresce durante l'assorbimento, raggiunge un massimo assoluto C_{max} per $t = T_{max}$, poi decresce durante l'eliminazione.

È limitata inferiormente da 0 e tende a 0 (un asintoto orizzontale).

$$C(t) = A \cdot (e^{(-k_e \cdot t)} - e^{(-k_a \cdot t)})$$

Un'unica curva clinica mostra insieme dominio, massimo, monotonia e limitatezza.

