FISICA APPLICATA E BIOSTATISTICA

MODULO MAT5 — Derivate: tassi di variazione nei sistemi viventi

Velocità istantanee, regole di derivazione, estremi e studio di funzione

Prof.ssa Valentina Notarstefano | Università degli Studi di Teramo

MODULO MAT5 — DERIVATE

La Derivata è un tasso di variazione

La derivata misura quanto velocemente varia una grandezza — il suo tasso istantaneo.

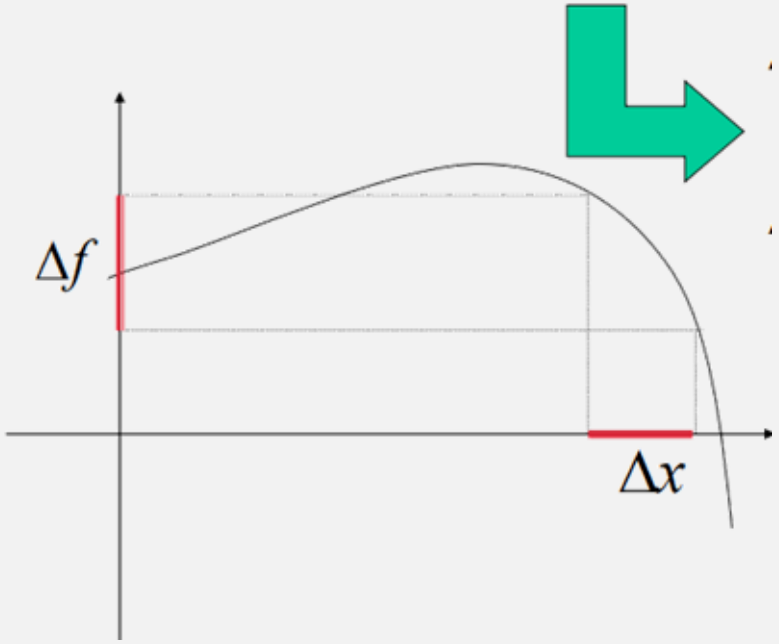
In biologia è una velocità di reazione, un tasso di crescita, una clearance di un farmaco, una velocità.

Dove la derivata è nulla, una grandezza raggiunge un massimo o un minimo (ad esempio il picco del farmaco).

Il segno della derivata indica se la funzione è crescente o decrescente; la derivata seconda indica la concavità. Il punto di flesso (derivata seconda nulla) è dove un processo cresce più rapidamente.

Il Rapporto Incrementale

l'incremento della variabile x è indicato dal simbolo Δx
l'incremento della funzione f è indicato dal simbolo Δf



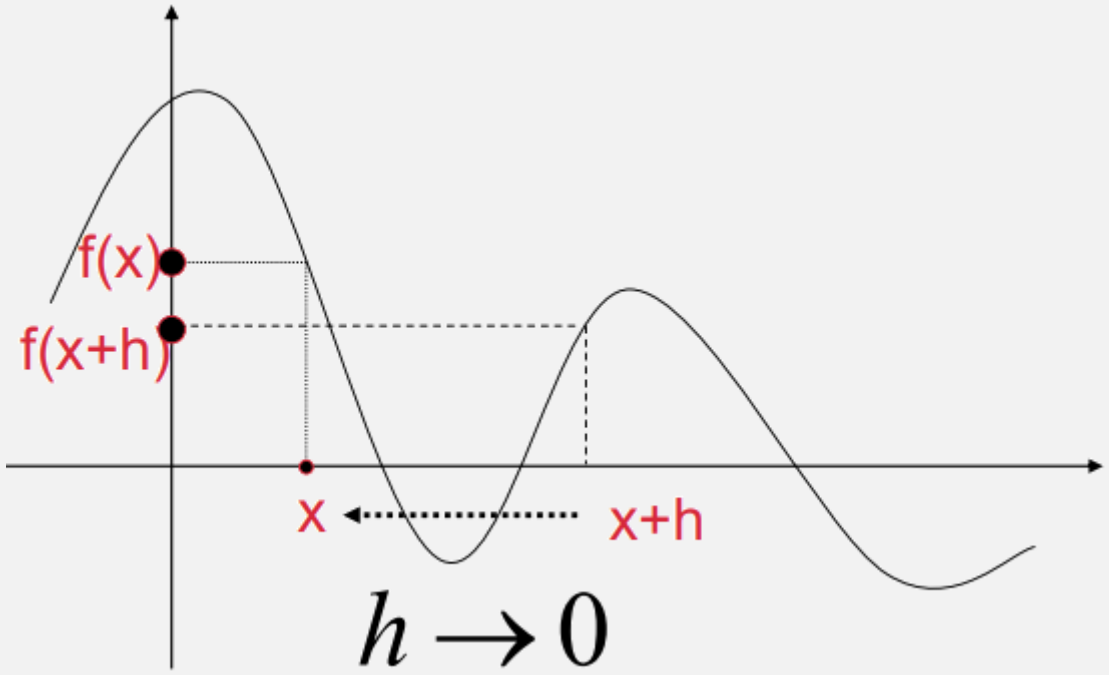
$$\Delta x = x_0 + h - x_0$$
$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

il rapporto tra l'incremento della variabile x nel passaggio da x_0 a $x_0 + \mathrm{h}$ e l'incremento della funzione f si chiama rapporto incrementale della funzione relativo al passaggio da x_0 a $x_0 + \mathrm{h}$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

il rapporto incrementale esprime la «variabilità di f» rispetto a un certo intervallo

Rapporto incrementale → informazione puntuale



Un'informazione puntuale sulla monotonia in x_0 richiede di considerare un intervallo molto piccolo $[x_0 , x_0 + h]$, che si ottiene quando il punto $x_0 + h$ si «avvicina» a x_0 , cioè quando $h \to 0$.

Definizione di Derivata

Sia $f(x)$ definita su $[a, b]$ e sia x_0 un punto interno.

La derivata di $f(x)$ in x_0 è definita come il limite, se esiste ed è finito, del rapporto incrementale di $f(x)$ nel passaggio da x a $x + h$, cioè per $h \to 0$:

$$D\big(f(x_0)\big) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Derivata della funzione f in x

Definizione di Derivata

$$D\big(f(x_0)\big) = \frac{df(x_0)}{dx} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivata di una funzione $f(x)$ in un punto interno x_0 è un numero reale, quando esiste.

Se la funzione $f(x)$ è definita in un intervallo $[a, b]$, agli estremi dell'intervallo si possono definire solo la derivata destra (in a) e la derivata sinistra (in b).

Una funzione è derivabile in un intervallo $[a, b]$ se è derivabile in ogni punto interno di $[a, b]$ e se ammette derivata destra in a e derivata sinistra in b.

Derivabilità e Continuità

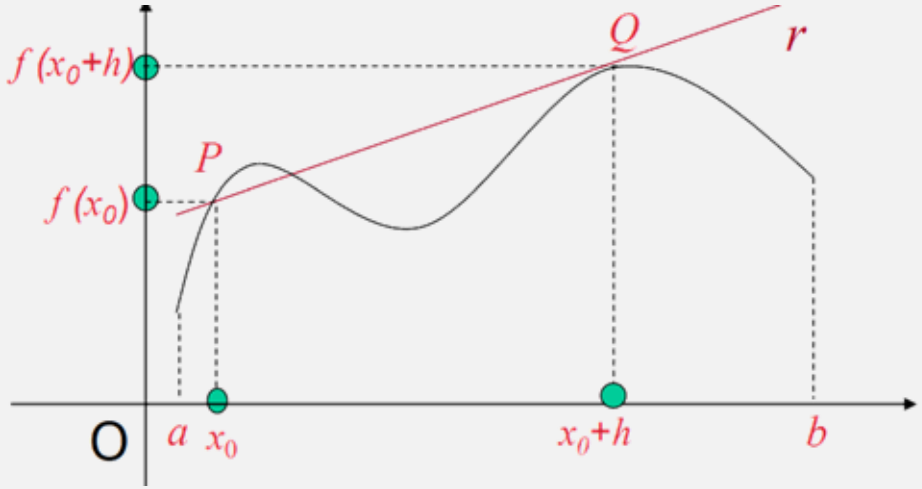
Se una funzione $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ è continua in x_0

da questo teorema segue immediatamente che: nei punti di discontinuità una funzione non ammette derivata (non è derivabile)

quindi, se $f(x)$ non è continua in $x_0 \in (a, b)$, allora $f(x)$ non è derivabile in x_0

Significato geometrico della derivata

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo $[a,b]$ e sia x_0 un punto interno fissato dell'intervallo $[a,b]$.
Ci spostiamo dal punto x_0 a un altro punto x_0+h interno all'intervallo $[a,b]$ per considerare i corrispondenti valori della funzione f .



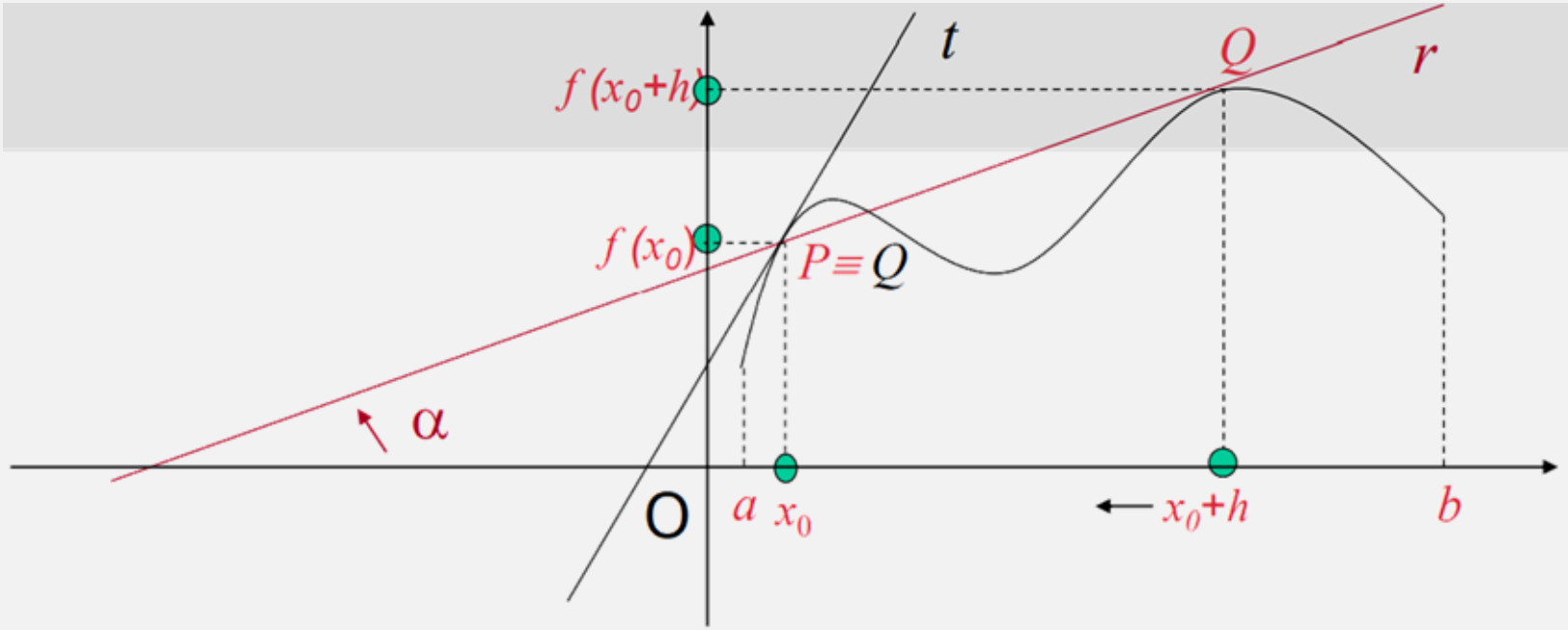
indichiamo i due punti appartenenti al grafico di f come:

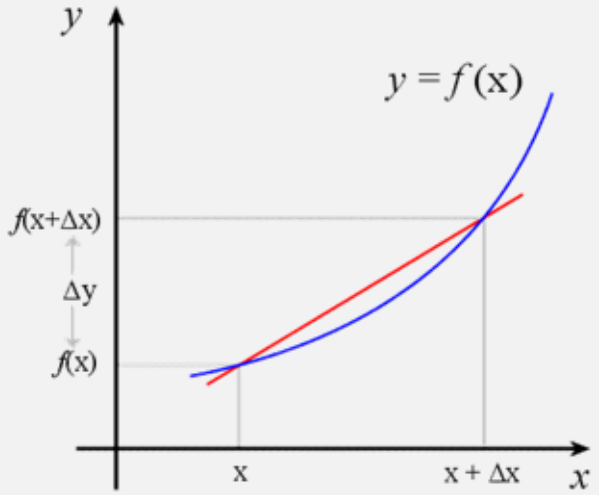
$$P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$$
$$Q\left(x_0+h, f\left(x_0+h\right)\right)$$

Sia r la retta passante per P e Q che forma un angolo α con il semiasse positivo delle x

Significato geometrico della derivata

Queste variazioni, per $h \to 0$, cessano quando il punto Q coincide con il punto P.
In quel momento la retta passante per P e Q tende a una posizione limite, che si identifica con la retta tangente al grafico della funzione f nel punto di ascissa x_0 cioè nel punto P.





Significato geometrico della derivata

Quindi, se α è l'angolo formato dalla retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0, e m_t è il suo coefficiente angolare, allora:

$$f'(x_0) = \tan\alpha = m_t$$

Cioè:

La derivata $f'(x_0)$ della funzione f nel punto x_0 è uguale al coefficiente angolare m_t della retta tangente al grafico nel punto $P\big(x_0, f(x_0)\big)$

Derivate delle Funzioni Elementari

Derivata della Funzione Potenza

Sia data la funzione $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}, x > 0$.

Si può dimostrare che la derivata di questa funzione, per ogni $x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}^{+}$) e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, è:

$$Dx^{\alpha} = \alpha x^{\alpha-1}, \forall x > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Esempio.
$f(x) = x^2$ in $x_0 = 2$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{(2+h)^2 - (2)^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{h^2 + 4h}{h} = h + 4$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} h + 4 = 4$$

La funzione $f(x) = x^2$ è derivabile in $x_0 = 2$ e $f'(2) = 4$

Derivata di funzioni elementari: regole di derivazione

$$Da^x = a^x \log a$$

$$De^x = e^x$$

$$D\log_a x = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$$

$$D\log x = \frac{1}{x}$$

$$D\sin x = \cos x$$

$$D\cos x = -\sin x$$

Derivate delle funzioni elementari

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$	$a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$
$\log_e x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_e e = \frac{1}{x}$
a^x	$a^x \log_e a = a^x \cdot \frac{1}{\log_a e}$
e^x	$e^x \log_e e = e^x$

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\lvert x \rvert$	$\frac{x}{\lvert x \rvert} = \frac{\lvert x \rvert}{x}$
$\lvert f(x) \rvert$	$f'(x)$ con $f(x) > 0$ $-f'(x)$ con $f(x) < 0$

Derivata Seconda – Derivata n-esima

A questo punto è naturale chiedersi se la funzione derivata $f'(x)$ sia a sua volta derivabile in un punto o su tutto l'intervallo (a, b).
In tal caso chiamiamo derivata seconda la derivata di f' , indicata con:

$$f''(x)$$

$$D^2 f(x)$$

Analogamente si definiscono la derivata terza $f'''(x)$, la derivata quarta $f^{IV}(x)$ e, in generale, la derivata n-esima:

$$f^n(x)$$

$$D^n f(x)$$

Regole di derivazione

Regole di derivazione (somma, prodotto, quoziente)

Siano $f : (a, b) \to \mathbb{R}, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b). Allora le funzioni:

$$f \pm g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (con } g \neq 0)$$

sono derivabili in (a, b) e valgono le seguenti formule:

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \to (k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \to \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Esempi. Calcola la derivata delle seguenti funzioni

$f(x) = 4x^2 + 4$

$\frac{d}{dx}(4x^2) + \frac{d}{dx}(4) =$

$f'(x) = 4 \cdot 2x^{2-1} + 0 = 8x$

$f(x) = \sqrt{x} + x^{2/3}$

$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{1}{2x^{1/2}} + \frac{2}{3x^{1/3}}$

$f(x) = -x^{-2} + 3x^3$

$\frac{d}{dx}(-x^{-2}) + \frac{d}{dx}(3x^3) =$

$f'(x) = -\ -2x^{-2-1} + 3 \cdot 3x^{3-2} = 2x^{-3} + 9x^2$

Teorema: derivata delle funzioni composte (Regola della catena)

Sia data la funzione composta $f\big(g(x)\big)$ definita da due funzioni $f(x)$ e $g(x)$.

Se g è derivabile in x e f è derivabile in $g(x)$, allora la funzione composta $f\big(g(x)\big)$ è derivabile e vale la seguente formula:

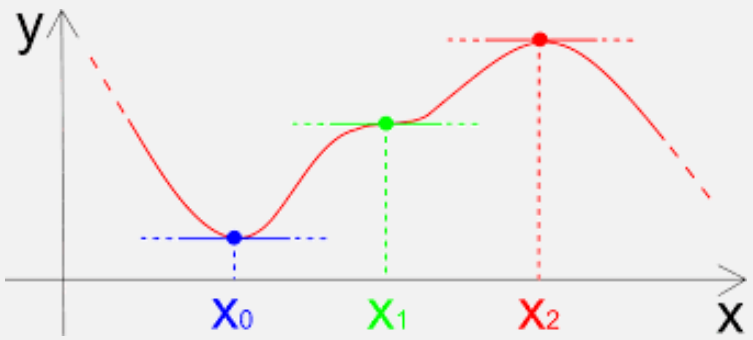
$$(f \circ g)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

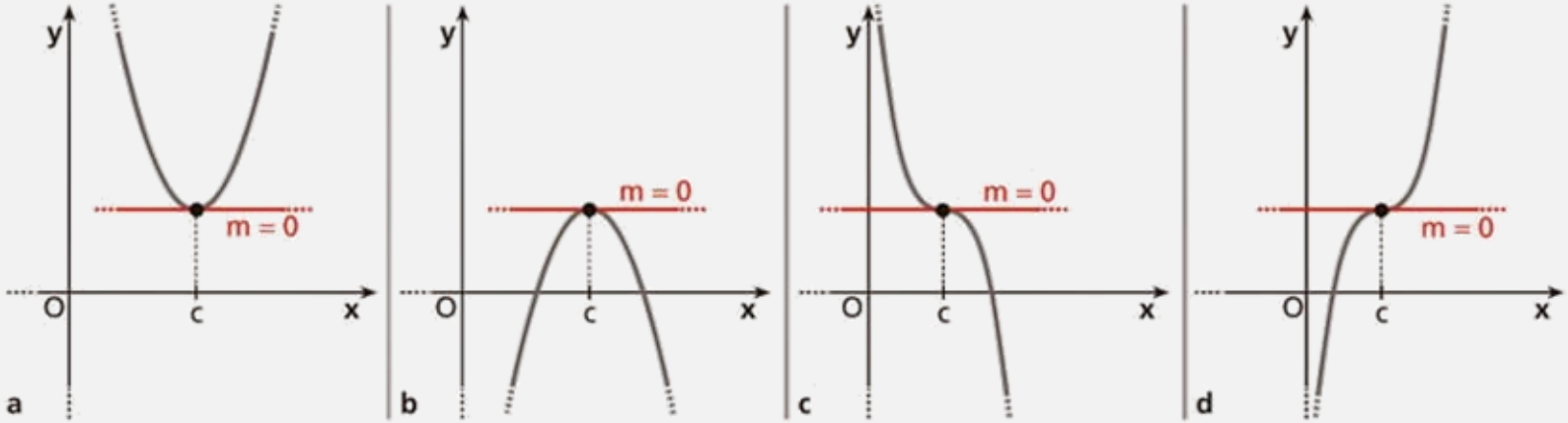
Punto Stazionario

I punti x in cui la derivata di una funzione f si annulla si chiamano punti stazionari di f.
Cioè, x_0 tale che:

$$f'(x_0) = 0$$

In modo equivalente, in un tale punto la retta tangente è orizzontale.





Caratterizzazione delle funzioni monotone

Criterio di Monotonia

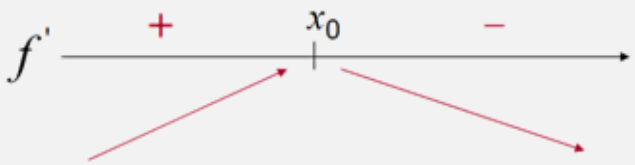
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ e derivabile in (a, b).
Allora:

- f crescente su $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$

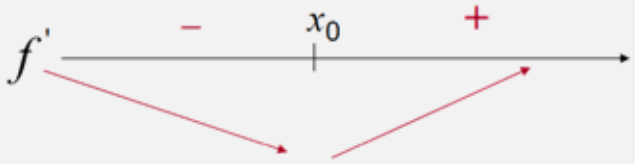
- f decrescente su $[a, b] \Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$

Dal criterio di monotonia è possibile studiare i massimi e i minimi relativi e assoluti di una funzione.

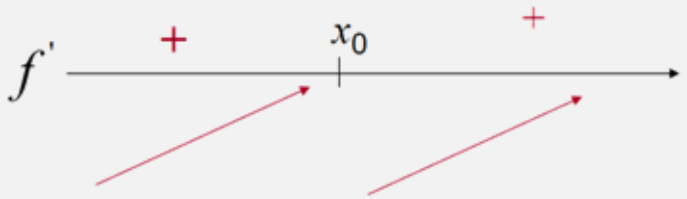
Più precisamente, se $f'(x_0) = 0$, si può verificare che:



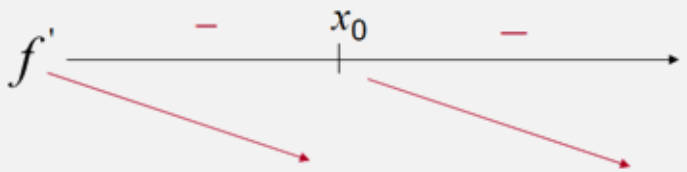
x_0 punto di massimo locale



x_0 punto di minimo locale



x_0 punto di flesso



x_0 punto di flesso

Individuati i possibili estremi locali, si calcola f in quei punti e si confronta con $f(a)$ e $f(b)$.

Esempio – Il picco: dove la derivata è nulla

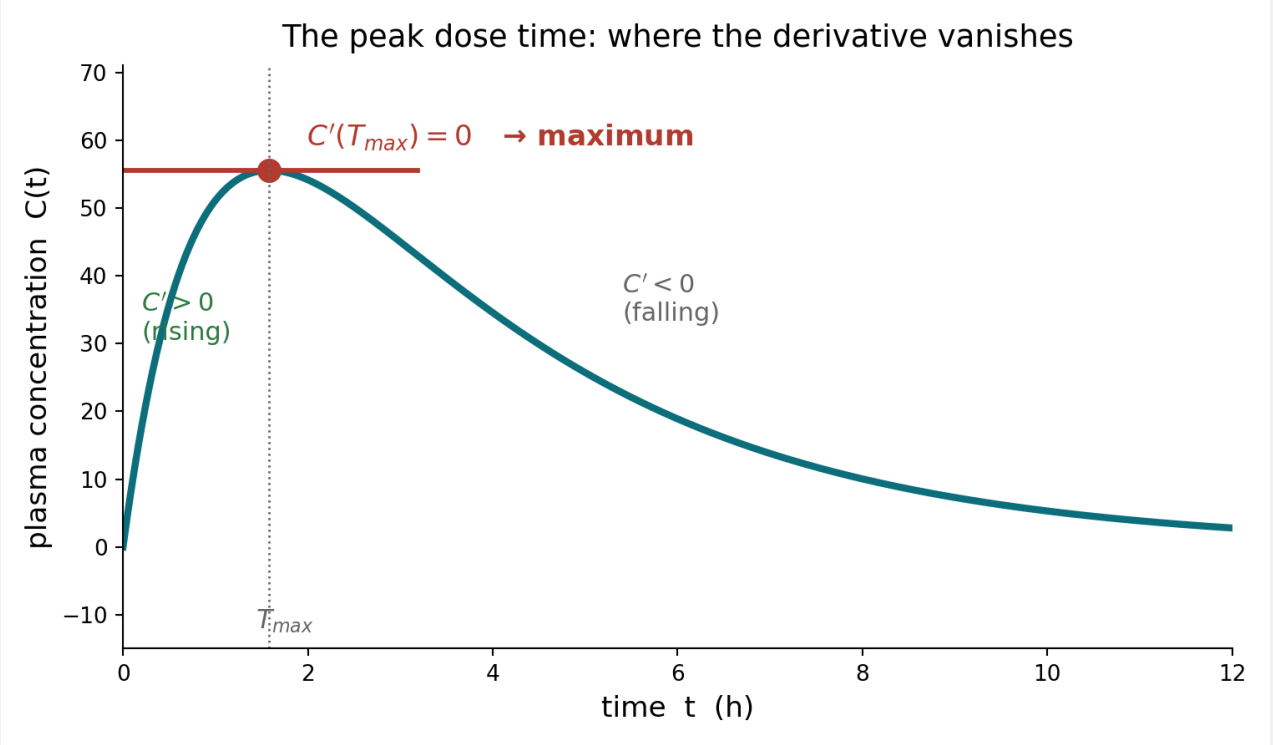
Dopo una somministrazione, la concentrazione plasmatica sale, raggiunge un picco, poi scende.

Al tempo di picco T_{max} il tasso di variazione istantaneo è nullo:

$$C'(T_{max}) = 0$$

Prima di T_{max} la derivata è positiva (crescente); dopo, è negativa (decrescente).

Porre la derivata uguale a zero individua i massimi e i minimi di qualsiasi curva biomedica.



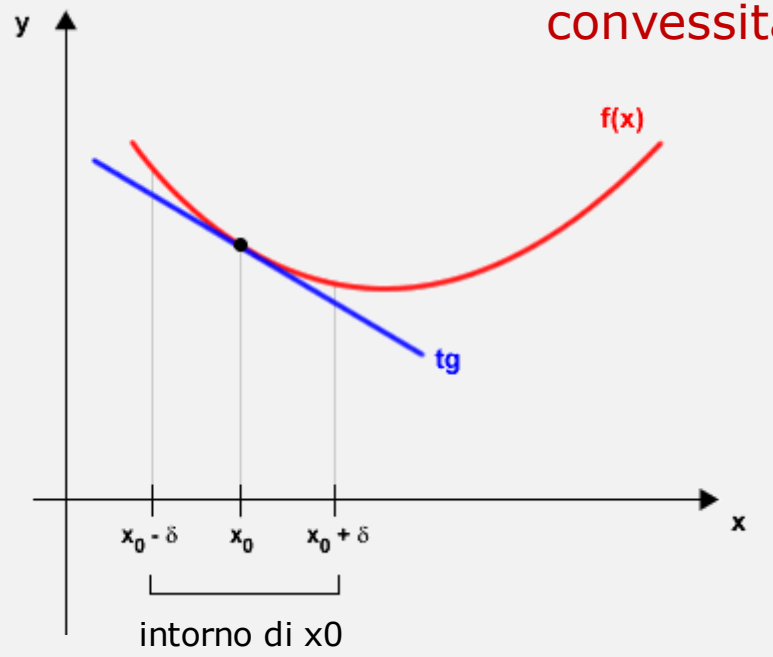
Concavità e Convessità

Funzioni convesse e concave

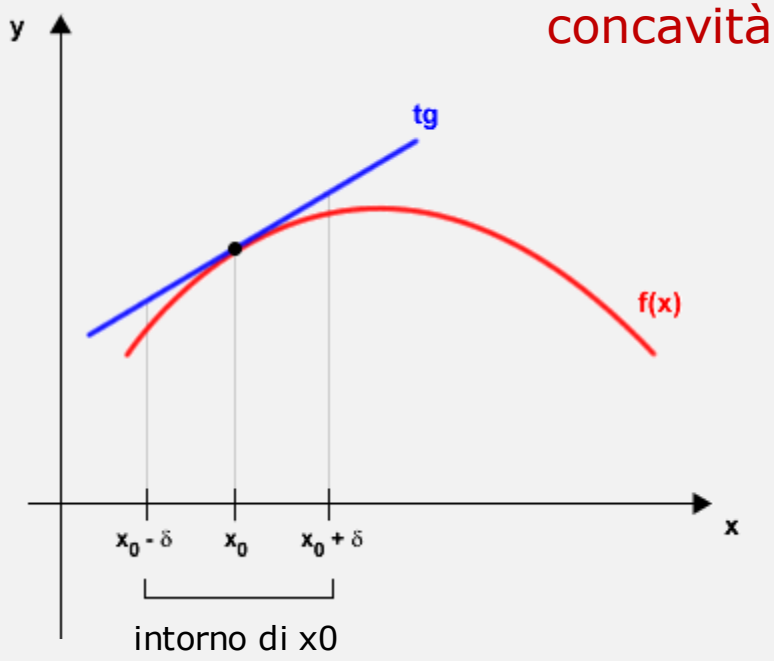
Una funzione $f(x)$ si dice convessa su $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$, il grafico di $f(x)$ sta sopra la retta tangente al grafico nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Una funzione $f(x)$ si dice concava su $[a,b]$ se $\forall x_0 \in [a,b]$, il grafico di $f(x)$ sta sotto la retta tangente al grafico nel punto $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

convessità



concavità



Criterio di convessità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua su $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b).

Allora:

- f convessa su $[a, b] \Leftrightarrow f'$ crescente su $[a, b] \Leftrightarrow f'' \geq 0 \, on \, [a, b]$

- f concava su $[a, b] \Leftrightarrow f'$ decrescente su $[a, b] \Leftrightarrow f'' \leq 0 \, on \, [a, b]$

Se la derivata prima di una funzione è crescente su $[a, b]$, la funzione $f(x)$ è convessa
Se la derivata prima di una funzione è decrescente su $[a, b]$, la funzione $f(x)$ è concava

Se la derivata prima rappresenta la pendenza del grafico della funzione, la derivata seconda rappresenta la variazione di quella pendenza.

Esempio – Il punto di flesso è la crescita più rapida

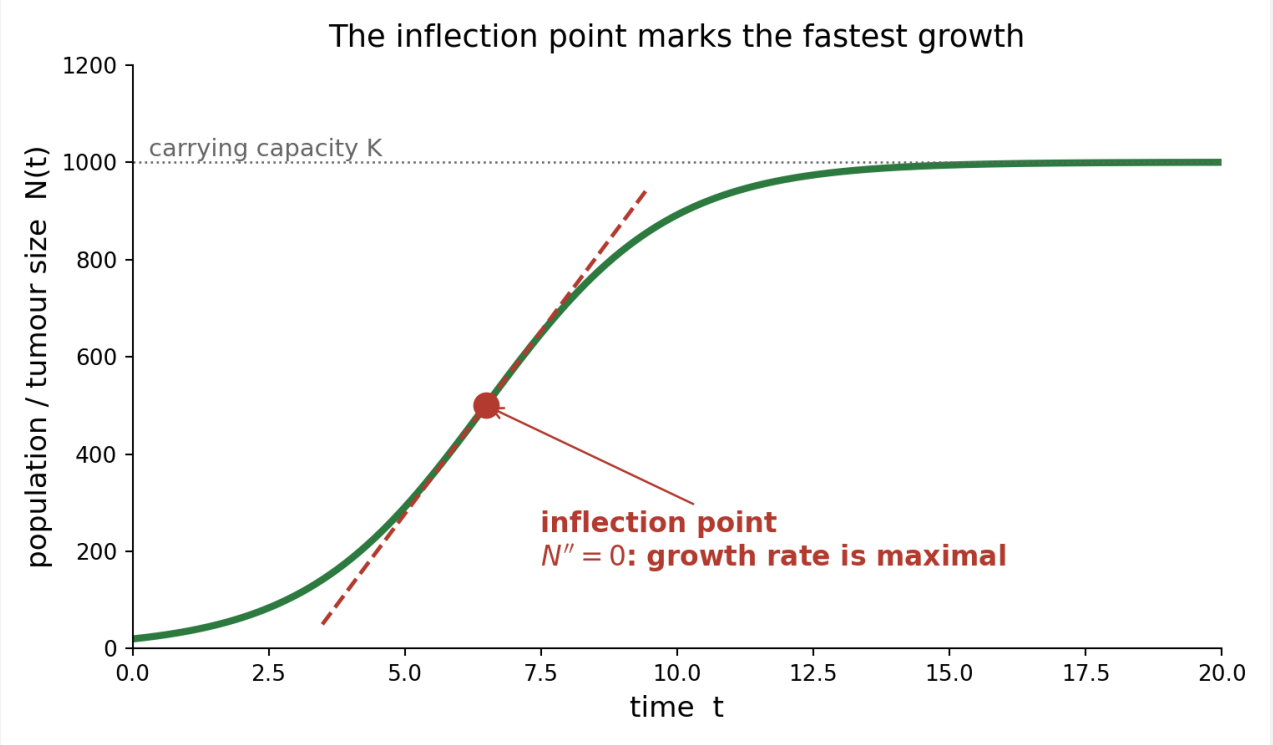
Un tumore o una popolazione cresce lentamente, poi rapidamente, poi rallenta vicino al proprio limite.

Il punto più ripido della curva è il punto di flesso, dove la derivata seconda è nulla:

N''(t) = 0 → il tasso di crescita N'(t) è massimo

Per la crescita logistica si verifica a circa metà della capacità portante.

La derivata seconda rivela quando un processo accelera e quando satura.



Lo studio di una funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

1. DOMINIO DI f

La prima informazione importante è determinare per quali valori reali la funzione è definita.

In questo esempio il dominio è dato da $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$, cioè da tutti i numeri reali tranne quelli che annullano il denominatore (± 2).

Ricorda:

- Per le funzioni razionali il dominio è dato dai punti in cui il denominatore è diverso da zero;
- Per le funzioni algebriche con radici di indice pari il dominio è dato dai valori per cui il radicando è non negativo;
- Per le funzioni con logaritmo l'argomento deve essere positivo;
- Per le funzioni esponenziali, trigonometriche e polinomiali il dominio coincide con tutto l'asse reale.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

2. INTERSEZIONI CON GLI ASSI

Determinare i punti di intersezione tra la curva e gli assi cartesiani significa trovare:

- le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse x, e
- le coordinate dei punti in cui la funzione interseca l'asse y.

- Per trovare i punti di intersezione con l'asse y, si calcola la funzione in $x = 0$.
- Per trovare i punti di intersezione con l'asse x, si determinano i valori di x per cui $y = 0$.

In questo esempio la funzione interseca sia l'asse x sia l'asse y solo nell'origine.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

3. SEGNO DI f

Vogliamo determinare i valori di x per cui $f(x) \geq 0$. Nell'esempio occorre studiare separatamente il segno del numeratore e del denominatore e poi combinare le informazioni ottenute. Il numeratore è positivo o nullo per $x \geq 0$, mentre il denominatore è positivo per $x < -2$ e $x > 2$. Quindi si ottiene che $f(x) \geq 0$ per $-2 < x \leq 0, x > 2$.

Ricorda:

- Studiare il segno di una funzione razionale equivale a risolvere due disequazioni, una per il numeratore e una per il denominatore, e poi combinare i risultati;
- Una funzione esponenziale è sempre strettamente positiva;
- Per studiare il segno di una funzione logaritmica occorre determinare per quali valori di x l'argomento del logaritmo è maggiore o uguale a 1;
- Per le radici di indice dispari il segno è determinato dal segno del radicando;
- Le radici di indice pari sono sempre non negative;
- Per le funzioni trigonometriche è utile fare riferimento alla circonferenza goniometrica per determinarne il segno.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

4. ASINTOTI DI f

Ricorda:

- se $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$, allora la retta $x = x_0$ si chiama asintoto verticale per $f(x)$
- se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l_1$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2$, allora $f(x)$ ammette due asintoti orizzontali: $y = l_1$ per $+\infty$ e $y = l_2$ per $-\infty$

- Se valgono le seguenti condizioni, il grafico della funzione $f(x)$ ammette un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ $finite$, $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q$ $finite$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

5. MASSIMI E MINIMI

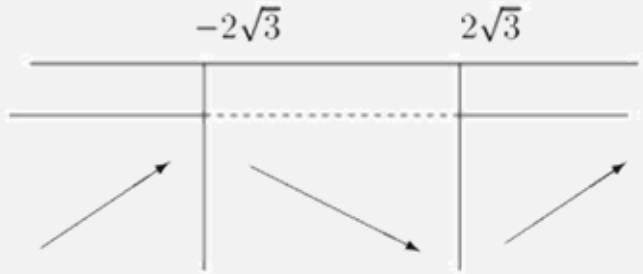
Per calcolare i massimi e i minimi di una funzione occorre calcolare la derivata prima e studiarne il segno.

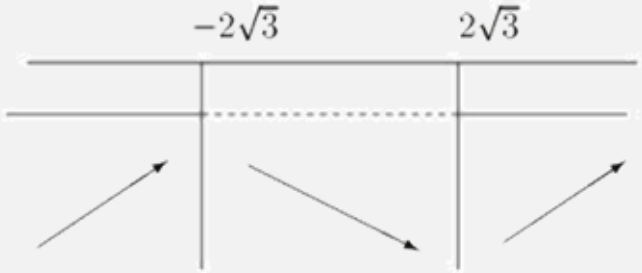
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2} \geq 0 \Longrightarrow x \leq -2\sqrt{3}, x \geq 2\sqrt{3}$$

Quindi, negli intervalli in cui $f'(x) > 0$ la funzione è crescente, mentre negli intervalli in cui $f'(x) < 0$ la funzione è decrescente.

La derivata si annulla in$x = \pm 2\sqrt{3}$. Per stabilire se questi punti sono massimi, minimi o punti di flesso si studia il segno della derivata. Quindi:

- la funzione è crescente su $(-\infty, -2\sqrt{3})$ e $(2\sqrt{3}, \infty)$
- la funzione è decrescente su $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$





I punti in cui la derivata si annulla sono $x = \pm 2\sqrt{3}$. Il punto $x = -2\sqrt{3}$ è un minimo locale, mentre $x = 2\sqrt{3}$ è un massimo locale.

Si osserva inoltre la presenza di un punto di flesso in $x = 0$, cioè un punto in cui la derivata prima si annulla ma che non è né massimo né minimo.
Quindi, in $x = 0$, il grafico di f ha una retta tangente orizzontale.

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

6. CONCAVITÀ

Lo studio del segno della derivata seconda $f''(x)$, cioè della derivata della derivata prima, permette di analizzare la concavità della funzione f. Infatti, se $f''(x) > 0$, la funzione è convessa; se $f''(x) < 0$, la funzione è concava.

In questo esempio: $f''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \geq 0 \rightarrow -2 < x \leq 0, x > 2$

Se $f''(x) > 0$, la funzione $f'(x)$ è crescente, quindi la retta tangente al grafico ha pendenza crescente; se $f''(x) < 0$, la funzione $f'(x)$ è decrescente, quindi la retta tangente al grafico ha pendenza decrescente;

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

7. GRAFICO

A questo punto occorre combinare tutte le informazioni ottenute nei passaggi precedenti e tracciare il grafico della funzione f.

